

Kolokwium nr 2: czwartek 23.10.2025, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 0–130.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach

w czwartek 9.10.2025, piątek 10.10.2025, czwartek 16.10.2025 i piątek 17.10.2025.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Indukcja matematyczna. Dwumian Newtona.

51. Wyznacz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których prawdziwa jest podana implikacja:

- a) $x > 0 \Rightarrow x + 1 > 2$
- b) $x < 1 \Rightarrow x^2 > 0$
- c) $x < 1 \Rightarrow x^2 < 0$
- d) $x^5 > 32 \Rightarrow x^6 > 64$
- e) $x^6 > 64 \Rightarrow x^7 > 128$
- f) $x^5 < 32 \Rightarrow x^6 < 64$
- g) $x^6 < 64 \Rightarrow x^7 < 128$

52. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 .$$

53. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} .$$

54. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n}{n} < 7^n .$$

OSZUSTWO

55. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n < 2^n + 110 .$$

(*)

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ sprawdzamy bezpośrednio $30 < 2 + 110 = 112$.

2° Załóżmy, że $30n < 2^n + 110$. Udowodnimy nierówność $30(n+1) < 2^{n+1} + 110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1) = 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 = 2^{n+1} + 110 + 30 - 2^n < 2^{n+1} + 110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n \geqslant 5$.

Zatem nierówność (*) została udowodniona dla $n \geqslant 5$.

Pozostaje sprawdzić, że

dla $n = 2$ mamy $60 < 4 + 110 = 114$,

dla $n = 3$ mamy $90 < 8 + 110 = 118$,

dla $n = 4$ mamy $120 < 16 + 110 = 126$.

Tym samym nierówność (*) jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n .

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n = 6$ zachodzi nierówność $180 < 174$.

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

56. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{n^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

57. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots = F_{n+1},$$

gdzie F_n oznacza n -ty wyraz ciągu Fibonacciego określonego wzorami $F_1 = F_2 = 1$ oraz $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Wyznacz liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających podane warunki.

W poniższych zadaniach przyjęto oznaczenie $\mathbb{N}_k = \{k, k + 1, k + 2, \dots\}$.

58. $99 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+1) \in A)$

59. $11 \notin A, \quad 99 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+1) \in A)$

60. $99 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_7} (n \in A \Rightarrow (n+1) \in A)$

61. $11 \notin A, \quad 99 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_7} (n \in A \Rightarrow (n+1) \in A)$

62. $11 \notin A, \quad 99 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_{77}} (n \in A \Rightarrow (n+1) \in A)$

63. $22 \in A, \quad 99 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+2) \in A)$

64. $1 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+2) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+3) \in A)$

65. $1 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+3) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+4) \in A)$

66. $1 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+4) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+5) \in A)$

67. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (2n) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_8} (n \in A \Rightarrow (n-7) \in A)$

68. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (3n) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_8} (n \in A \Rightarrow (n-7) \in A)$

69. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (3n) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_9} (n \in A \Rightarrow (n-8) \in A)$

70. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (3n) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_{14}} (n \in A \Rightarrow (n-13) \in A)$

71. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (2n) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_{32}} (n \in A \Rightarrow (n-31) \in A)$

72. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n^3) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_6} (n \in A \Rightarrow (n-5) \in A)$

73. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n^5) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_6} (n \in A \Rightarrow (n-5) \in A)$

74. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n^5) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_8} (n \in A \Rightarrow (n-7) \in A)$

75. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n^5 + 1) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_8} (n \in A \Rightarrow (n-7) \in A)$

76. $\forall_{n \in \mathbb{N}} \left(n \in A \Rightarrow \left(n^5 + 2 \right) \in A \right), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_8} \left(n \in A \Rightarrow (n - 7) \in A \right)$
77. $\forall_{n \in \mathbb{N}} \left(n \in A \Rightarrow \left(n^5 + 3 \right) \in A \right), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_8} \left(n \in A \Rightarrow (n - 7) \in A \right)$

Zadania do samodzielnego przeanalizowania. Mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko w miarę wolnego czasu – proszę umieć wskazać zadania, których rozwiązania chcecie Państwo zobaczyć.

78. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ zachodzi równość
$$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \dots + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{5}.$$
79. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} + \frac{4}{273} + \frac{5}{651} + \frac{6}{1333} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^4 + (n-1)^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 - n + 1)}.$$
80. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $k < n$ spełniających równanie
$$k \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}.$$
81. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 < \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n+1)}{10}.$$
82. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$(n+1) \cdot \binom{2n}{n} \geqslant 4^n.$$
83. W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków $\geqslant, \leqslant$, a następnie dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$(n+2) \cdot \binom{2n}{n} \dots\dots\dots 3 \cdot 2^{2n-1}.$$
84. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$(n+3) \cdot \binom{2n}{n} > 7 \cdot 4^{n-1}.$$
85. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$(n+4) \cdot \binom{2n}{n} > 2^{2n+1}.$$

86. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{2n}{n}^2 \geqslant 4^{2n-1}.$$

87. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n.$$

88. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n.$$

89. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{25} \cdot \binom{5n}{n} \cdot \binom{4n}{2n} < \sqrt[n]{27} \cdot \binom{5n}{2n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

90. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{65} \cdot n \leqslant 2^n + 2^{71}.$$

91. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{2n} \cdot \binom{2n}{n} > \binom{4n}{2n}.$$

92. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$3^{28} \cdot n \leqslant 3^n + 3^{31}.$$

93. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} < (n+1) \cdot \binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

94. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geqslant \frac{3^{n-1}}{2}.$$

Liczby wymierne i niewymierne.

95. Czy istnieją takie liczby naturalne $m, n > 1$, że $\log_m n = 13/7$?
96. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n , liczby całkowite oraz znaki $+, -, \cdot, :$ i $\sqrt{}$ zapisz liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.
- OSZUSTWO 97.
- ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.
- Rozwiązanie I:
- Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.
- Rozwiązanie II:
- Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wtedy
- $$w = \sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$
$$w + \sqrt{2} = \sqrt{3-\sqrt{8}}$$
$$w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$$
$$2\sqrt{2}(w+1) + (w-1)(w+1) = 0$$
- Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy
- $$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$
- co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.
- Czy powyższe rozwiązania są poprawne?
98. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?
99. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?
100. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?

20 przykładów.

Odpowiedzi, których poprawności nie da się uzasadnić elementarnie, nie mogą być uznane.

Podaj przykład takiej liczby rzeczywistej x , że

- 101.** $0 < x < 1$ oraz x jest niewymierna,
- 102.** $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$ oraz x jest wymierna,
- 103.** x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,
- 104.** x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,
- 105.** $(x+1)^2$ jest niewymierna,
- 106.** x jest niewymierna, ale $x + \frac{1}{x}$ jest wymierna,
- 107.** x jest niewymierna i 2^x jest niewymierna,
- 108.** $2^x + 3^x$ jest liczbą niewymierną,
- 109.** $2^x + 3^x$ jest liczbą wymierną,
- 110.** $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
- 111.** $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą wymierną,
- 112.** $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
- 113.** $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą wymierną,
- 114.** $2^x + \log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,
- 115.** $2^x + \log_2 x$ jest liczbą niewymierną,
- 116.** $x + \log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
- 117.** $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
- 118.** $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,
- 119.** $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,
- 120.** $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.

Zadania do samodzielnego przeanalizowania. Mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko w miarę wolnego czasu – proszę umieć wskazać zadania, których rozwiązania chcecie Państwo zobaczyć.

121. Dowieść, że liczba $\log_{45} 75$ jest niewymierna.

122. Niech

$$a = 2^{32} \cdot 3^{11} \cdot 6^{10} \qquad \text{oraz} \qquad b = 2^{34} \cdot 3^{12} \cdot 6^{10}.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_a b$ jest wymierna czy niewymierna.

123. Dowieść, że liczba $\log_{(3/2)} \left(\frac{9}{8}\right)$ jest niewymierna.

124. Dowieść, że liczba $\log_{(4/15)} \left(\frac{15}{8}\right)$ jest niewymierna.

125. Dowieść, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

126. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c , że liczby $a + b + c$ oraz $a^2 + b^2 + c^2$ są wymierne. Dowieść, że liczba $ab + bc + ca$ jest wymierna.

127. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej dodatniej $x \neq 1$, że liczba $\log_x(x + 10)$ jest wymierna.

Wskazówka: Załóż, że $\log_x(x + 10)$ jest równe tak dobranej konkretnej liczbie wymiernej, aby dało się wyliczyć x .

Uzasadnić poprawność podanego przykładu, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x + 10)$.

128. Podać 4 przykłady liczb rzeczywistych dodatnich $x \neq 1$, dla których liczba $\log_x(x + 120)$

jest wymierna.

Wsk.: Najpierw rozwiąż poprzednie zadanie lub zapoznaj się z jego rozwiązaniem.

Uzasadnić poprawność podanych przykładów, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x + 120)$.

129. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych $n \geqslant 2$, że liczba

$$\sum_{k=2}^n \log_2 \log_k(k + 1)$$

jest wymierna.

130. Dowieść, że liczba $\log_{60} 150$ jest niewymierna.
