

78. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 4$ zachodzi równość

$$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \dots + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{5}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 4$ mamy

$$L = \binom{4}{4} = 1$$

oraz

$$P = \binom{5}{5} = 1.$$

Zatem dana w zadaniu równość przyjmuje postać $1 = 1$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz $n \geq 4$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \dots + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{5}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \dots + \binom{n}{4} + \binom{n+1}{4} = \binom{n+2}{5}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej równości i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L = \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \dots + \binom{n}{4} + \binom{n+1}{4} = \binom{n+1}{5} + \binom{n+1}{4} = \binom{n+2}{5} = P.$$

Powyżej wykorzystaliśmy wzór

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$$

dla $m = n + 1$ oraz $k = 4$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego $n \geq 4$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu równość została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 4$.

79. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} + \frac{4}{273} + \frac{5}{651} + \frac{6}{1333} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^4 + (n-1)^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 - n + 1)}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 2$ mamy

$$L = \frac{1}{3}$$

oraz

$$P = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Zatem dana w zadaniu równość przyjmuje postać $1/3 = 1/3$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz $n \geq 2$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} + \frac{4}{273} + \frac{5}{651} + \frac{6}{1333} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^4 + (n-1)^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 - n + 1)}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} + \frac{4}{273} + \frac{5}{651} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^4 + (n-1)^2 + 1} + \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 + n + 1)}, \quad (\clubsuit)$$

gdzie wykorzystaliśmy tożsamość $(n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1$.

Wychodząc od lewej strony równości $(\clubsuit)$ i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} + \frac{4}{273} + \frac{5}{651} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^4 + (n-1)^2 + 1} + \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 - n + 1)} + \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 - n + 1)} + \frac{n}{(n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n^2 + n + 1}{2 \cdot (n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)} + \frac{2n}{2 \cdot (n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n^2 - n + 1}{2 \cdot (n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 + n + 1)} = P. \end{aligned}$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego $n \geq 2$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu równość została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$.

80. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $k < n$ spełniających równanie

$$k \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na wartość współczynnika dwumianowego otrzymujemy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{oraz} \quad \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!},$$

co po wstawieniu do równania danego w zadaniu prowadzi do

$$k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!}.$$

To z kolei daje kolejno równoważne postaci tego równania:

$$\begin{aligned} \frac{k}{k! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)} &= \frac{1}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k-1)!}, \\ \frac{k}{(n-k)} &= \frac{1}{(k+1)}, \end{aligned}$$

$$k \cdot (k + 1) = n - k \, ,$$
$$k \cdot (k + 1) + k = n \, ,$$
$$k^2 + 2k = n \, . \tag{♠}$$

Zatem równanie dane w treści zadania jest równoważne równaniu (♠). Stąd wynika, że rozwiązaniem tego równania jest każda para (k, n) , gdzie k jest dowolną liczbą naturalną oraz $n = k^2 + 2k$.

81. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 < \frac{n^2 \cdot (n + 1)^2 \cdot (2n + 1)}{10} \, .$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ lewa strona dowodzonej nierówności ma wartość 1, a prawa $12/10 = 6/5$. Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $1 < 6/5$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 < \frac{n^2 \cdot (n + 1)^2 \cdot (2n + 1)}{10} \, .$$

Wykażemy, że wówczas

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 + (n + 1)^4 < \frac{(n + 1)^2 \cdot (n + 2)^2 \cdot (2n + 3)}{10} \, . \tag{♣}$$

Wychodząc od lewej strony nierówności (♣) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 + (n + 1)^4 < \frac{n^2 \cdot (n + 1)^2 \cdot (2n + 1)}{10} + (n + 1)^4 = \\ &= \frac{(n + 1)^2}{10} \cdot \left(n^2 \cdot (2n + 1) + 10 \cdot (n + 1)^2 \right) = \frac{(n + 1)^2}{10} \cdot \left(2n^3 + n^2 + 10n^2 + 20n + 10 \right) = \\ &= \frac{(n + 1)^2}{10} \cdot \left(2n^3 + 11n^2 + 20n + 10 \right) \, . \end{aligned}$$

Z kolei prawą stronę nierówności (♣) możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} P &= \frac{(n + 1)^2 \cdot (n + 2)^2 \cdot (2n + 3)}{10} = \frac{(n + 1)^2}{10} \cdot (n + 2)^2 \cdot (2n + 3) = \\ &= \frac{(n + 1)^2}{10} \cdot \left(n^2 + 4n + 4 \right) \cdot (2n + 3) = \frac{(n + 1)^2}{10} \cdot \left(2n^3 + 8n^2 + 8n + 3n^2 + 12n + 12 \right) = \\ &= \frac{(n + 1)^2}{10} \cdot \left(2n^3 + 11n^2 + 20n + 12 \right) \, . \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$L < \frac{(n + 1)^2}{10} \cdot \left(2n^3 + 11n^2 + 20n + 10 \right) < \frac{(n + 1)^2}{10} \cdot \left(2n^3 + 11n^2 + 20n + 12 \right) = P \, ,$$

co kończy dowód drugiego kroku indukcyjnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

82. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+1) \cdot \binom{2n}{n} \geq 4^n.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ mamy $(n+1) \cdot \binom{2n}{n} = 4$ oraz $4^n = 4$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 \geq 4$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+1) \cdot \binom{2n}{n} \geq 4^n.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+2) \cdot \binom{2n+2}{n+1} \geq 4^{n+1}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (n+2) \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(n+2)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(n+2)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= (n+1) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(n+2)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)^2} = (n+1) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \geq \\ &\geq 4^n \cdot \frac{2(n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \geq 4^n \cdot 4 = 4^{n+1}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \geq 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} 2(n+2)(2n+1) &\geq 4(n+1)(n+1), \\ (n+2)(2n+1) &\geq 2(n+1)(n+1), \\ 2n^2 + 5n + 2 &\geq 2n^2 + 4n + 2, \\ n &\geq 0, \end{aligned}$$

a to jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej n .

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

83. W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków $\geq$, $\leq$, a następnie dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+2) \cdot \binom{2n}{n} \dots\dots\dots 3 \cdot 2^{2n-1}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy $(n + 2) \cdot \binom{2n}{n} = 3 \cdot 2 = 6$ oraz $3 \cdot 2^{2n-1} = 3 \cdot 2 = 6$, a zatem obie strony nierówności mają tę samą wartość. Tak więc dana w zadaniu nierówność jest prawdziwa bez względu na wybór kierunku nierówności.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n + 2) \cdot \binom{2n}{n} \dots\dots\dots 3 \cdot 2^{2n-1} ,$$

gdzie w powyższej i wszystkich występujących dalej nierównościach w miejscu kropek należy konsekwentnie wstawić wybrany znak nierówności. Chcemy wykazać, że

$$(n + 3) \cdot \binom{2n + 2}{n + 1} \dots\dots\dots 3 \cdot 2^{2n+1} .$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (n + 3) \cdot \binom{2n + 2}{n + 1} &= \frac{(n + 3)(2n + 2)!}{(n + 1)!(n + 1)!} = \frac{(n + 3)(2n)!(2n + 1)(2n + 2)}{n!(n + 1)n!(n + 1)} = \\ &= (n + 2) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(n + 3)(2n + 1)(2n + 2)}{(n + 2)(n + 1)^2} = (n + 2) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(n + 3)(2n + 1)}{(n + 2)(n + 1)} \dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots 3 \cdot 2^{2n-1} \cdot \frac{2(n + 3)(2n + 1)}{(n + 2)(n + 1)} \dots\dots\dots 3 \cdot 2^{2n-1} \cdot 4 = 3 \cdot 2^{2n+1} , \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n + 3)(2n + 1)}{(n + 2)(n + 1)} \dots\dots\dots 4 .$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} 2(n + 3)(2n + 1) \dots\dots\dots 4(n + 2)(n + 1) , \\ (n + 3)(2n + 1) \dots\dots\dots 2(n + 2)(n + 1) , \\ 2n^2 + 7n + 3 \dots\dots\dots 2n^2 + 6n + 4 , \\ n \dots\dots\dots 1 . \end{aligned}$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla wszystkich $n \geq 1$, o ile w miejsce kropek wstawimy znak $\geq$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność dana w zadaniu, uzupełniona znakiem $\geq$, została udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n .

84. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n + 3) \cdot \binom{2n}{n} > 7 \cdot 4^{n-1} .$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n = 1$ mamy

$$(n + 3) \cdot \binom{2n}{n} = 4 \cdot 2 = 8$$

oraz

$$7 \cdot 4^{n-1} = 7 \cdot 4^0 = 7,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $8 > 7$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n + 3) \cdot \binom{2n}{n} > 7 \cdot 4^{n-1}.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n + 4) \cdot \binom{2n+2}{n+1} > 7 \cdot 4^n.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (n + 4) \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(n + 4)(2n + 2)!}{(n + 1)!(n + 1)!} = \frac{(n + 4)(2n)!(2n + 1)(2n + 2)}{n!(n + 1)n!(n + 1)} = \\ &= (n + 3) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(n + 4)(2n + 1)(2n + 2)}{(n + 3)(n + 1)^2} = (n + 3) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(n + 4)(2n + 1)}{(n + 3)(n + 1)} > \\ &> 7 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{2(n + 4)(2n + 1)}{(n + 3)(n + 1)} \geqslant 7 \cdot 4^{n-1} \cdot 4 = 7 \cdot 4^n, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n + 4)(2n + 1)}{(n + 3)(n + 1)} \geqslant 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} 2(n + 4)(2n + 1) &\geqslant 4(n + 3)(n + 1), \\ (n + 4)(2n + 1) &\geqslant 2(n + 3)(n + 1), \\ 2n^2 + n + 8n + 4 &\geqslant 2(n^2 + n + 3n + 3), \\ 2n^2 + 9n + 4 &\geqslant 2n^2 + 8n + 6, \\ n &\geqslant 2. \end{aligned}$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geqslant 2$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 2$. Sprawdzenie dla $n = 2$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$5 \cdot \binom{4}{2} = 5 \cdot 6 = 30 > 28 = 7 \cdot 4^1.$$

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$, a ponadto na początku rozwiązania wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n = 1$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n = 2$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} \geq 4$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} > 4, \tag*{(\spadesuit)}$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 2$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n = 3$.

85. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+4) \cdot \binom{2n}{n} > 2^{2n+1}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ mamy $(n+4) \cdot \binom{2n}{n} = 10$ oraz $2^{2n+1} = 8$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $10 > 8$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+4) \cdot \binom{2n}{n} > 2^{2n+1}.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+5) \cdot \binom{2n+2}{n+1} > 2^{2n+3}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (n+5) \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(n+5)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(n+5)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= (n+4) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(n+5)(2n+1)(2n+2)}{(n+4)(n+1)^2} = (n+4) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} > \\ &> 2^{2n+1} \cdot \frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} \geq 2^{2n+1} \cdot 4 = 2^{2n+3}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} \geq 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$2(n+5)(2n+1) \geq 4(n+4)(n+1),$$

co kolejno przekształca się do

$$\begin{aligned}(n+5)(2n+1) &\geqslant 2(n+4)(n+1), \\ 2n^2+11n+5 &\geqslant 2n^2+10n+8,\end{aligned}$$

czyli $n \geqslant 3$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geqslant 3$.
Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 2$ oraz $n = 3$. Sprawdzenie dla $n = 3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n = 2$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadku, który dotąd nie został sprawdzony, ani też nie wynika z dowodu indukcyjnego.

Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$6 \cdot \binom{4}{2} = 36 > 32 = 2^5.$$

Dla $n = 3$ otrzymujemy

$$7 \cdot \binom{6}{3} = 7 \cdot 20 = 140 > 128 = 2^7.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n = 1$ oraz dla $n = 2$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n = 3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} \geqslant 4$$

pojawi się nierówność

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} > 4, \quad \spadesuit$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 3$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n = 4$.

86. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{2n}{n}^2 \geqslant 4^{2n-1}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy

$$L = 1 \cdot \binom{2}{1}^2 = 1 \cdot 2^2 = 4$$

oraz

$$P = 4^{2 \cdot 1 - 1} = 4^1 = 4.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 \geq 4$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$n \cdot \binom{2n}{n}^2 \geq 4^{2n-1}.$$

♣

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$(n+1) \cdot \binom{2n+2}{n+1}^2 \geq 4^{2n+1}.$$

◇

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności (♣) można zapisać jako

$$n \cdot \binom{2n}{n}^2 = n \cdot \left(\frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \right)^2 = n \cdot \frac{((2n)!)^2}{(n!)^4} = \frac{((2n)!)^2}{(n-1)! \cdot (n!)^3}.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności (◇) i korzystając z założenia indukcyjnego (♣) otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= (n+1) \cdot \binom{2n+2}{n+1}^2 = (n+1) \cdot \frac{((2n+2)!)^2}{((n+1)!)^4} = (n+1) \cdot \frac{((2n)!)^2 \cdot (2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2}{(n-1)! \cdot n \cdot (n!)^3 \cdot (n+1)^4} = \\ &= \frac{((2n)!)^2}{(n-1)! \cdot (n!)^3} \cdot (n+1) \cdot \frac{(2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2}{n \cdot (n+1)^4} = \frac{((2n)!)^2}{(n-1)! \cdot (n!)^3} \cdot \frac{(2n+1)^2 \cdot 2^2}{n \cdot (n+1)} \geq \\ &\geq 4^{2n-1} \cdot \frac{4 \cdot (2n+1)^2}{n \cdot (n+1)} \geq 4^{2n-1} \cdot 4^2 = 4^{2n+1} = P, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{4 \cdot (2n+1)^2}{n \cdot (n+1)} \geq 4^2.$$

♡

Nierówność (♡) jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} 4 \cdot (2n+1)^2 &\geq 4^2 \cdot n \cdot (n+1), \\ (2n+1)^2 &\geq 4 \cdot n \cdot (n+1), \\ 4n^2 + 4n + 1 &\geq 4n^2 + 4n, \\ 1 &\geq 0, \end{aligned}$$

a zatem nierówność (♡) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności (♣) wynika nierówność (◇).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

87. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} \leq 4^n.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy

$$L = \binom{4}{1} = 4$$

oraz

$$P = 4^1 = 4.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 \leqslant 4$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n. \tag{♣}$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n+1} \leqslant 4^{n+1}. \tag{◇}$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności (♣) można zapisać jako

$$\binom{2n+2}{n} = \frac{(2n+2)!}{n! \cdot (n+2)!}.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności (◇) i korzystając z założenia indukcyjnego (♣) otrzymujemy

$$\begin{aligned} L = \binom{2n+4}{n+1} &= \frac{(2n+4)!}{(n+1)! \cdot (n+3)!} = \frac{(2n+2)!}{n! \cdot (n+2)!} \cdot \frac{(2n+3) \cdot (2n+4)}{(n+1) \cdot (n+3)} \leqslant \\ &\leqslant 4^n \cdot \frac{(2n+3) \cdot (2n+4)}{(n+1) \cdot (n+3)} \leqslant 4^n \cdot 4 = 4^{n+1} = P, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(2n+3) \cdot (2n+4)}{(n+1) \cdot (n+3)} \leqslant 4. \tag{♡}$$

Nierówność (♡) jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} (2n+3) \cdot (2n+4) &\leqslant 4 \cdot (n+1) \cdot (n+3), \\ (2n+3) \cdot (n+2) &\leqslant 2 \cdot (n+1) \cdot (n+3), \\ 2n^2 + 7n + 6 &\leqslant 2n^2 + 8n + 6, \\ 0 &\leqslant n, \end{aligned}$$

a zatem nierówność (♡) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności (♣) wynika nierówność (◇).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

Sposób II:

Idea rozwiązania:

Wykażemy, że lewa strona dowodzonej nierówności, czyli liczba $\binom{2n+2}{n}$, jest sumą **czterech** liczb występujących w $2n$ -tym wierszu trójkąta Pascala (rozszerzonego do dolnej półpłaszczyzny umownymi zerami). Z kolei prawa strona dowodzonej nierówności jest sumą **wszystkich** wyrazów tego wiersza. Ponieważ wyrazy trójkąta Pascala są nieujemne, suma kilku wyrazów jednego wiersza nie przekracza sumy wszystkich wyrazów tego wiersza.

Rozwiązanie właściwe:

Korzystając ze wzorów

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k} \quad \text{oraz} \quad \binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \binom{2n+2}{n} &= \binom{2n+1}{n-1} + \binom{2n+1}{n} = \binom{2n}{n-2} + \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n} = \\ &= \binom{2n}{n-2} + \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n-2} + \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} = \\ &= \sum_{k=n-2}^{n+1} \binom{2n}{k} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} = 4^n, \end{aligned}$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

Uwagi:

Dla $n = 1$ składnik $\binom{2n}{n-2} = \binom{2}{-1}$ jest legalny i ma wartość 0.

Podobnie, poprawnym, choć może nieco dziwnym sposobem zapisania sumy $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$ jest

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \binom{2n}{k}.$$

Jeśli ktoś się brzydzi rozszerzaniem trójkąta Pascala przez wypełnienie dolnej półpłaszczyzny zerami, może po prostu sprawdzić prawdziwość dowodzonej nierówności dla $n = 1$, a dalszą część rozumowania przeprowadzić dla $n \geq 2$ jak wyżej, bez konieczności odwoływania się do wyrazów rozszerzonego trójkąta Pascala równych 0.

88. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n = 1$ mamy

$$\binom{2n+2}{n} = \binom{4}{1} = 4$$

oraz

$$\left(\frac{15}{4}\right)^n = \left(\frac{15}{4}\right)^1 = \frac{15}{4},$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 > 15/4$, jest więc prawdziwa, gdyż $4 = 16/4$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n.$$

Chcemy wykazać, że

$$\binom{2n+4}{n+1} > \left(\frac{15}{4}\right)^{n+1}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} \binom{2n+4}{n+1} &= \frac{(2n+4)!}{(n+1)!(n+3)!} = \frac{(2n+2)!(2n+3)(2n+4)}{n!(n+1)(n+2)!(n+3)} = \binom{2n+2}{n} \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} > \\ &> \left(\frac{15}{4}\right)^n \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \geq \left(\frac{15}{4}\right)^n \cdot \frac{15}{4} = \left(\frac{15}{4}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \geq \frac{15}{4}.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$4(2n+3)(2n+4) \geq 15(n+1)(n+3),$$

$$4(4n^2 + 14n + 12) \geq 15(n^2 + 4n + 3),$$

$$16n^2 + 56n + 48 \geq 15n^2 + 60n + 45,$$

$$n^2 - 4n + 3 \geq 0,$$

$$(n-1)(n-3) \geq 0,$$

co jest prawdą dla wszystkich liczb całkowitych $n \neq 2$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n = 1$ oraz $n \geq 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 3$. Sprawdzenie dla $n = 3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego. Sprawdzenie dla $n = 2$ nie jest konieczne, gdyż drugi krok indukcyjny został przeprowadzony także dla $n = 1$, dowodząc tym samym implikacji $T(1) \Rightarrow T(2)$, gdzie $T(n)$ jest dowodzoną nierównością. Jednak bezpośrednio sprawdzenie danej w treści zadania nierówności dla $n = 2$ może być uznane za prostsze, niż powoływanie się na mini-dowód indukcyjny działający dla $n \leq 2$.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym w dowodzie dla $n \geq 3$) Dla $n = 3$ dana w treści zadania nierówność przyjmuje postać:

$$\binom{8}{3} > \left(\frac{15}{4}\right)^3,$$

co jest kolejno równoważne nierównościom:

$$\begin{aligned} 56 &> \frac{15^3}{4^3}, \\ 56 \cdot 64 &> 15^3, \\ 28 \cdot 128 &> 3^3 \cdot 5^3, \\ 28 \cdot 128 &> 27 \cdot 125, \end{aligned}$$

a ta nierówność jest prawdziwa, gdyż czynniki w iloczynie po jej lewej stronie są większe od odpowiednich czynników po stronie prawej.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona w jednym dowodzie indukcyjnym dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$, a w drugim dowodzie indukcyjnym dla $n \leq 2$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n = 3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \geq \frac{15}{4}$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} > \frac{15}{4}, \quad \spadesuit$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 3$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n = 4$.

89. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{25} \cdot \binom{5n}{n} \cdot \binom{4n}{2n} < \sqrt[n]{27} \cdot \binom{5n}{2n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\binom{5n}{n} \cdot \binom{4n}{2n} = \frac{(5n)!}{n! \cdot (4n)!} \cdot \frac{(4n)!}{(2n)! \cdot (2n)!} = \frac{(5n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (2n)!}$$

oraz

$$\binom{5n}{2n} \cdot \binom{3n}{n} = \frac{(5n)!}{(2n)! \cdot (3n)!} \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!} = \frac{(5n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (2n)!},$$

skąd

$$\binom{5n}{n} \cdot \binom{4n}{2n} = \binom{5n}{2n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

Wobec tego dana w treści zadania nierówność upraszcza się do nierówności

$$\sqrt[n]{25} < \sqrt[n]{27},$$

jest więc prawdziwa jako nierówność $25 < 27$ podniesiona obustronnie do dodatniej potęgi $1/n$.

Uwagi

Ponieważ obie strony dowodzonej nierówności mają postać iloczynową, a iloraz większej do mniejszej maleje wraz z n , nie wydaje się możliwe udowodnienie implikacji $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, gdzie $T(n)$ jest nierównością z treści zadania, w inny sposób niż poprzez bezpośrednie udowodnienie następnika bez odwoływania się do założenia o prawdziwości poprzednika. Tym samym każde zastosowanie indukcji jest albo błędne (dowód *udał się* dzięki błędom rachunkowym), albo lipne (mimo ubrania dowodu w szatę indukcji, i tak dana nierówność jest dowodzona bezpośrednio).

90. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{65} \cdot n \leqslant 2^n + 2^{71}.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leqslant 64$.

Dla $n \leqslant 64$ zachodzą nierówności

$$2^{65} \cdot n \leqslant 2^{65} \cdot 64 = 2^{65} \cdot 2^6 = 2^{71} < 2^n + 2^{71},$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geqslant 65$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 65$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$\begin{aligned} L &= 2^{65} \cdot 65, \\ P &= 2^{65} + 2^{71} = 2^{65} + 2^6 \cdot 2^{65} = 2^{65} + 64 \cdot 2^{65} = 65 \cdot 2^{65}, \end{aligned}$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geqslant 65$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{65} \cdot n \leqslant 2^n + 2^{71}.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{65} \cdot (n+1) \leqslant 2^{n+1} + 2^{71}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geqslant 65$ otrzymujemy

$$L = 2^{65} \cdot (n+1) = 2^{65} \cdot n + 2^{65} \leqslant 2^n + 2^{71} + 2^{65} \leqslant 2^n + 2^{71} + 2^n = 2^{n+1} + 2^{71} = P,$$

co kończy dowód indukcyjny.

91. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{2n} \cdot \binom{2n}{n} > \binom{4n}{2n}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy $L = 8$ oraz $P = 6$, skąd $L > P$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{2n} \cdot \binom{2n}{n} > \binom{4n}{2n}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$2^{2n+2} \cdot \binom{2n+2}{n+1} > \binom{4n+4}{2n+2}. \tag{♣}$$

Wychodząc od lewej strony równości (♣) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= 2^{2n+2} \cdot \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = 4 \cdot 2^{2n} \cdot \frac{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{(n!)^2 \cdot (n+1)^2} = 2^{2n} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{8 \cdot (2n+1)}{n+1} > \\ &> \binom{4n}{2n} \cdot \frac{8 \cdot (2n+1)}{n+1} = \frac{(4n)!}{((2n)!)^2} \cdot \frac{8 \cdot (2n+1)}{n+1} \geqslant \\ &\geqslant \frac{(4n)! \cdot (4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4)}{((2n)!)^2 \cdot (2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2} = \frac{(4n+4)!}{((2n+2)!)^2} = \binom{4n+4}{2n+2} = P, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{8 \cdot (2n+1)}{n+1} \geqslant \frac{(4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4)}{(2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2}. \tag{♡}$$

Przekształcanie nierówności (♡) prowadzi do kolejnych nierówności równoważnych:

$$\begin{aligned} \frac{8 \cdot (2n+1)}{n+1} &\geqslant \frac{2 \cdot (4n+1) \cdot (4n+3)}{(2n+1) \cdot (n+1)}, \\ 4 \cdot (2n+1) &\geqslant \frac{(4n+1) \cdot (4n+3)}{2n+1}, \\ 4 \cdot (2n+1)^2 &\geqslant (4n+1) \cdot (4n+3), \\ 16n^2 + 16n + 4 &\geqslant 16n^2 + 16n + 3, \\ 1 &\geqslant 0, \end{aligned}$$

a zatem nierówność (♡) jest prawdziwa dla każdej liczby n .

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego n naturalnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

92. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$3^{28} \cdot n \leqslant 3^n + 3^{31}.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leqslant 27$.

Dla $n \leqslant 27$ zachodzą nierówności

$$3^{28} \cdot n \leqslant 3^{28} \cdot 27 = 3^{28} \cdot 3^3 = 3^{31} < 3^n + 3^{31},$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geq 28$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 28$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$\begin{aligned} L &= 3^{28} \cdot 28, \\ P &= 3^{28} + 3^{31} = 3^{28} + 27 \cdot 3^{28} = 28 \cdot 3^{28}, \end{aligned}$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geq 28$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$3^{28} \cdot n \leq 3^n + 3^{31}.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$3^{28} \cdot (n + 1) \leq 3^{n+1} + 3^{31}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geq 28$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= 3^{28} \cdot (n + 1) = 3^{28} \cdot n + 3^{28} \leq 3^n + 3^{31} + 3^{28} \leq 3^n + 3^{31} + 3^n = 2 \cdot 3^n + 3^{31} < \\ &< 3 \cdot 3^n + 3^{31} = 3^{n+1} + 3^{31} = P, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

93. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} < (n + 1) \cdot \binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} = \frac{(6n)!}{(2n)! \cdot (4n)!} \cdot \frac{(4n)!}{n! \cdot (3n)!} = \frac{(6n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (3n)!}$$

oraz

$$\binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n} = \frac{(6n)!}{(3n)! \cdot (3n)!} \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!} = \frac{(6n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (3n)!},$$

skąd

$$\binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} = \binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

Wobec tego dana w treści zadania nierówność upraszcza się do nierówności

$$n < n + 1,$$

jest więc prawdziwa.

Uwagi

Ponieważ obie strony dowodzonej nierówności mają postać iloczynową, a iloraz większej do mniejszej maleje wraz z n , nie wydaje się możliwe udowodnienie implikacji $T(n) \Rightarrow T(n + 1)$, gdzie $T(n)$ jest nierównością z treści zadania, w inny sposób niż poprzez bezpośrednie udowodnienie

następnika bez odwoływania się do założenia o prawdziwości poprzednika. Tym samym każde zastosowanie indukcji jest albo błędne (dowód *udał się* dzięki błędom rachunkowym), albo lipne (mimo ubrania dowodu w szatę indukcji, i tak dana nierówność jest dowodzona bezpośrednio).

94. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geq \frac{3^{n-1}}{2}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ mamy

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{2}{2} = 1$$

oraz

$$\frac{3^{n-1}}{2} = \frac{1}{2},$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać

$$1 > \frac{1}{2},$$

jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geq \frac{3^{n-1}}{2}.$$

Chcemy wykazać, że

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{n+2} \geq \frac{3^n}{2}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{n+2} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!(n+2)} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)} \cdot \frac{2(2n+1)}{(n+2)} > \\ &> \frac{3^{n-1}}{2} \cdot \frac{2(2n+1)}{(n+2)} \geq \frac{3^{n-1}}{2} \cdot 3 = \frac{3^n}{2}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(2n+1)}{(n+2)} \geq 3.$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$2(2n+1) \geq 3(n+2),$$

co kolejno przekształca się do

$$4n+2 \geq 3n+6,$$

czyli $n \geq 4$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geq 4$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 2$, $n = 3$ oraz $n = 4$. Sprawdzenie dla $n = 4$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n = 2$ oraz $n = 3$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadkach, które dotąd nie zostały sprawdzone, ani też nie wynikają z dowodu indukcyjnego.

Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$\frac{\binom{4}{2}}{3} = \frac{6}{3} = 2 > \frac{3}{2} = \frac{3^1}{2}.$$

Dla $n = 3$ otrzymujemy

$$\frac{\binom{6}{3}}{4} = \frac{20}{4} = 5 > \frac{9}{2} = \frac{3^2}{2}.$$

Dla $n = 4$ otrzymujemy

$$\frac{\binom{8}{4}}{5} = \frac{70}{5} = 14 > \frac{27}{2} = \frac{3^3}{2}.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 4$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n = 1$, $n = 2$ oraz dla $n = 3$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n = 4$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(2n+1)}{(n+2)} \geq 3$$

pojawi się nierówność

$$\frac{2(2n+1)}{(n+2)} > 3,$$



to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 4$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n = 5$.

Chociaż nie jest to od razu widoczne, ani też nie jest istotne dla tego zadania, liczby $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ są całkowite. Chcesz wiedzieć więcej? Poszukaj hasła **Liczby Catalana**.

121. Dowieść, że liczba $\log_{45} 75$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{45} 75$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{45} 75 = \frac{m}{n},$$

$$45^{m/n} = 75,$$

$$45^m = 75^n \, .$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$3^{2m} \cdot 5^m = 3^n \cdot 5^{2n} \, .$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m &= & n \\ m &= & 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$n = 2m > m = 2n > n \, ,$$

czyli $n > n$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{45} 75$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{45} 75$ jest niewymierna.

122. Niech

$$a = 2^{32} \cdot 3^{11} \cdot 6^{10} \qquad \text{oraz} \qquad b = 2^{34} \cdot 3^{12} \cdot 6^{10} \, .$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_a b$ jest wymierna czy niewymierna.

Rozwiązanie:

Ponieważ $a = 2^{42} \cdot 3^{21} = 12^{21}$ oraz $b = 2^{44} \cdot 3^{22} = 12^{22}$, otrzymujemy

$$\log_a b = \frac{22}{21} \, ,$$

co jest liczbą wymierną.

123. Dowieść, że liczba $\log_{(3/2)} \left(\frac{9}{8}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(3/2)} \left(\frac{9}{8}\right)$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \log_{(3/2)} \left(\frac{9}{8}\right) &= \frac{m}{n} \, , \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{m/n} &= \frac{9}{8} \, , \\ \left(\frac{3}{2}\right)^m &= \left(\frac{9}{8}\right)^n \, , \\ 8^n \cdot 3^m &= 2^m \cdot 9^n \, . \end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{3n} \cdot 3^m = 2^m \cdot 3^{2n}.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 3n = m \\ m = 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$m = 3n > 2n = m,$$

czyli $m > m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest niewymierna.

124. Dowieść, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest wymierna i niech będzie ona równa $-m/n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi (**zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, a liczba logarytmowana jest większa od 1**). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right) &= -\frac{m}{n}, \\ \left(\frac{4}{15}\right)^{-m/n} &= \frac{15}{8}, \\ \left(\frac{4}{15}\right)^{-m} &= \left(\frac{15}{8}\right)^n, \\ \left(\frac{15}{4}\right)^m &= \left(\frac{15}{8}\right)^n, \\ 15^m \cdot 8^n &= 15^n \cdot 4^m. \end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{3n} \cdot 3^m \cdot 5^m = 2^{2m} \cdot 3^n \cdot 5^n.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 3n &= 2m \\ m &= n \\ m &= n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m = 3n > 2n = 2m,$$

czyli $2m > 2m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:

- zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami piętnastki, lub
- występują wykładniki, o których nie wiadomo, czy są nieujemne.

125. Dowieść, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że dana w zadaniu liczba jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wówczas otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}, \\ w - \sqrt{2} &= \sqrt[3]{3}, \\ (w - \sqrt{2})^3 &= 3, \\ w^3 - 3w^2 \cdot \sqrt{2} + 6w - 2\sqrt{2} &= 3, \\ w^3 + 6w - 3 &= (3w^2 + 2) \cdot \sqrt{2}, \\ \frac{w^3 + 6w - 3}{3w^2 + 2} &= \sqrt{2}, \end{aligned}$$

co nie jest możliwe, gdyż po lewej stronie równości występuje liczba wymierna (zauważmy, że mianownik $3w^2 + 2$ jest różny od zera jako liczba dodatnia), a po prawej niewymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że błędne było założenie, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ jest wymierna. Zatem liczba ta jest niewymierna.

126. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c , że liczby $a + b + c$ oraz $a^2 + b^2 + c^2$ są wymierne. Dowieść, że liczba $ab + bc + ca$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Teza zadania wynika ze wzoru

$$ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}.$$

127. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej dodatniej $x \neq 1$, że liczba $\log_x(x+10)$ jest wymierna.

Wskazówka: Załóż, że $\log_x(x+10)$ jest równe tak dobranej konkretnej liczbie wymiernej, aby dało się wyliczyć x .

Uzasadnić poprawność podanego przykładu, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+10)$.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Zakładając, że

$$\log_x(x+10)=w,$$

otrzymujemy równanie

$$x^w=x+10. \tag{#}$$

Wybieramy taką wartość wymierną w , abyśmy umieli rozwiązać równanie (#) i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla $w=2$ równanie (#) przybiera postać

$$x^2=x+10.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe¹ otrzymując

$$x=\frac{1\pm\sqrt{41}}{2},$$

a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy

$$x=\frac{1+\sqrt{41}}{2}$$

i wówczas

$$\log_x(x+10)=\log_xx^2=2$$

jest liczbą wymierną.

Sposób II:

Postępujemy jak w sposobie I przyjmując $w=-1$, co prowadzi nas do równania

$$x^{-1}=x+10$$

mającego rozwiązanie dodatnie

$$x=\sqrt{26}-5.$$

Wówczas

$$\log_x(x+10)=\log_xx^{-1}=-1$$

jest liczbą wymierną.

128. Podać 4 przykłady liczb rzeczywistych dodatnich $x \neq 1$, dla których liczba

$$\log_x(x+120)$$

¹Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.

jest wymierna.

Wsk.: Najpierw rozwiąż poprzednie zadanie lub zapoznaj się z jego rozwiązaniem.

Uzasadnić poprawność podanych przykładów, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+120)$.

Rozwiązanie:

Przykład I:

Dla $x = 5$ liczba $\log_x(x+120) = \log_5 125 = 3$ jest liczbą wymierną.

Przykład II:

Dla $x = 8$ liczba $\log_x(x+120) = \log_8 128 = \frac{7}{3}$ jest liczbą wymierną.

Przykład III:

Zakładając, że

$$\log_x(x+120) = w,$$

otrzymujemy równanie

$$x^w = x + 120. \tag{\#}$$

Wybieramy taką wartość wymierną w , abyśmy umieli rozwiązać równanie $(\#)$ i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla $w = 2$ równanie $(\#)$ przybiera postać

$$x^2 = x + 120.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe² otrzymując

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{481}}{2},$$

a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy

$$x = \frac{1 + \sqrt{481}}{2}$$

i wówczas

$$\log_x(x+120) = \log_x x^2 = 2$$

jest liczbą wymierną.

Przykład IV:

Postępujemy jak w przykładzie III przyjmując $w = -1$, co prowadzi nas do równania

$$x^{-1} = x + 120$$

mającego rozwiązanie dodatnie

$$x = \sqrt{3601} - 60.$$

Wówczas

$$\log_x(x+120) = \log_x x^{-1} = -1$$

jest liczbą wymierną.

Inny sposób uzyskania tego przykładu: W równości

$$\log_{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = -1.$$

podstawiamy $n = 3600$, skąd otrzymujemy $x = \sqrt{3601} - 60$.

²Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.

129. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych $n \geqslant 2$, że liczba
$$\sum_{k=2}^n \log_2 \log_k (k+1)$$
 jest wymierna.

Rozwiązanie:
Przyjmijmy $n = 2^{2^m} - 1$, gdzie m jest liczbą naturalną. Wówczas korzystając z równości $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ otrzymujemy
$$\sum_{k=2}^n \log_2 \log_k (k+1) = \log_2 \prod_{k=2}^n \log_k (k+1) = \log_2 \log_2 (n+1) = \log_2 \log_2 2^{2^m} = m.$$

130. Dowieść, że liczba $\log_{60} 150$ jest niewymierna.
Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{60} 150$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \log_{60} 150 &= \frac{m}{n}, \\ 60^{m/n} &= 150, \\ 60^m &= 150^n. \end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .
Sposób I
Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy
$$2^{2m} \cdot 3^m \cdot 5^m = 2^n \cdot 3^n \cdot 5^{2n}.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m &= & n \\ m &= & n \\ m &= & 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy
$$n = 2m > m = n,$$

czyli $n > n$, co nie może być prawdą.
Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Sposób II
Ostatnią niezerową cyfrą liczby 60^m jest 6, a ostatnią niezerową cyfrą liczby 150^n jest 5, zatem liczby te nie mogą być równe.

W obu sposobach doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{60} 150$ jest wymierna. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{60} 150$ jest niewymierna.