

Kolokwium nr 3: czwartek 6.11.2025, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 0–245.

Zadania do omówienia¹ na ćwiczeniach
w czwartek 23.10.2025, piątek 24.10.2025, czwartek 30.10.2025 i piątek 31.10.2025.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Szacowanie liczb i wyrażeń.

Która z liczb jest większa ?

131. $123456 \cdot 123458$ czy 123457^2
132. $\left(\frac{2007}{666}\right)^{2007}$ czy $\left(\frac{2007}{666}\right)^{666}$
133. $\left(\sqrt[4]{83}-2\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{83}-2\right)^{666}$
134. $\left(\sqrt[4]{79}-2\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-2\right)^{666}$
135. $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{666}$
136. $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{667}$
137. 2^{1000} czy 3^{700}
138. 5^{444} czy 3^{700}
139. $\frac{17}{20}$ czy $\frac{16}{21}$
140. $\frac{100}{7}$ czy $\frac{150}{11}$
141. $\frac{8^{444}}{17^{17}}$ czy $\frac{16^{333}}{19^{17}}$
142. $\frac{17^{667}}{3333^4+6666^4}$ czy $\frac{17^{666}}{3333^4}$
143. $\left(\frac{2007}{666}\right)$ czy $\left(\frac{2007}{667}\right)$
144. $\left(\frac{2007}{666}\right)$ czy $\left(\frac{2008}{666}\right)$
145. $\left(\frac{2007}{1666}\right)$ czy $\left(\frac{2007}{1667}\right)$
146. $\left(\frac{2007}{1666}\right)$ czy $\left(\frac{2008}{1666}\right)$
147. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\sqrt{37}+6$
148. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy 12
149. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\frac{1}{\sqrt{97}-10}$
150. $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8}$ czy $\left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$
151. $\log_3 27$ czy $\log_4 8$
152. $\log_3 8$ czy $\log_2 5$
153. $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$
154. $(\log_2 3) \cdot \log_5 7$ czy $(\log_2 7) \cdot \log_5 3$
155. $(\log_2 3) \cdot \log_7 5$ czy $(\log_7 9) \cdot \log_{16} 25$
156. $\log_2 3$ czy $\log_3 5$
157. $\log_3 7$ czy $\log_5 19$
158. $\log_2 3$ czy $\log_5 13$
159. $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$

Wskazówka do niektórych pytań:

Wiadomo, że wartość ułamka nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę różną od zera.
Podobnie, wartość logarytmu nie zmieni się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną

160. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2015}$?
161. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2015}$?
162. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2015}$?
163. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2015}$?
164. Która liczba jest większa: $2^{2^{2^{11}}}$ czy $1000^{2^{2^{10}}}$?

¹Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

165. Która liczba jest większa: $a^{a^{a^{\dots}}}$ czy 10^{10} ?
Liczba $a = \sqrt[4]{2}$ występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

166. Która liczba jest większa: $\log_a b$ czy $\log_b a$?
Przyjmujemy $a = \log_2 3$ oraz $b = \log_3 2$.

167. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej.

$$A = 10^{10^{11}}, \quad B = 10^{10^{20}}, \quad C = 10^{10^{50}}, \quad D = 10^{10^{250}}, \quad E = (10!)^{10!}$$

$$F = (100!)^{10^{10}}, \quad G = 2^{100!}, \quad H = 2^{2^{100}}, \quad I = 10^{10^{10^3}}, \quad J = 2^{2^{2^{10}}}$$

168. Dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej n udowodnić nierówności

$$n^{2^{120}} < 2^n < n^{2^{122}}.$$

169. Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$n^{2^{2017}} < 2^n < n^{2^{2018}}.$$

170*. Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$4^n < n^{2^{2017}} < 8^n.$$

171. Udowodnić nierówność

$$n^{n^{2^{1000}}} < 2^{2^n}$$

dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n > 1$.

172. Niech $A_n = \sqrt{2^{\sqrt{2^{\sqrt{2^{\sqrt{2^{\sqrt{2^{\dots}}}}}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n < 2$.

173. Niech $A_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n < 3$.

174. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left| \sqrt{n^2+1} - n - \frac{C}{n} \right| < \frac{D}{n^3}.$$

175. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5} \leq D.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 6C$ (wersja łatwiejsza).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 4C$ (wersja trudniejsza).

176. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3} \leq D.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 8C$ (wersja najłatwiejsza).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 4C$ (wersja średnio trudna).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 2C$ (wersja najtrudniejsza).

177. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną k oraz liczby wymierne dodatnie C oraz D , a następnie udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$Cn^k \leq \sqrt{4n^2+1} + \sqrt{4n^2+2} + \sqrt{4n^2+3} + \sqrt{4n^2+4} + \dots + \sqrt{16n^2-1} + \sqrt{16n^2} \leq Dn^k.$$

Trudność zadania zależy od uzyskanego przez Ciebie ilorazu D/C :

- Przy $D/C \geq 2$ zadanie jest najłatwiejsze.
- Przy $D/C < 3/2$ zadanie jest najtrudniejsze.

178. Dobrać odpowiednie liczby całkowite dodatnie s i t oraz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}-n^5\right)^s}{\left(\sqrt{n^8+3n^7}-n^4\right)^t} \leq 18C.$$

Poniższe zadania omówić tylko wtedy, gdy zostanie czas.

W każdym z poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 5, 10, 100, 10^5 , 10^{10} , 10^{20} , 10^{50} , 10^{100} , 10^{200} , 10^{500} , 10^{1000} , 10^{2000} , 10^{5000} , 10^{10000} , 10^{20000} , 10^{50000} , 10^{100000} , 10^{200000} , 10^{500000} , $10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

179. $< 2^{500} <$
180. $< 3^{2000} <$
181. $< 2^{10000} <$
182. $< 30^{10000} <$
183. $< 2^{2^{10}} <$
184. $< 4444^{4444} <$
185. $< 7777^{7777} <$
186. $< 2011^{2011} <$
187. $< 222^{5555} <$
188. $< 5555^{222} <$
189. $< 333^{333} <$
190. $< 10000! <$
191. $< 666! <$
192. $< 5000! <$
193. $< 35000! <$
194. $< (10^5)! <$
195. $< (7 + 2\sqrt{2})^{500} <$
196. $< (6 + 3\sqrt{2})^{500} <$
197. $< (91 + \sqrt{91})^{100} <$
198. $< \binom{1000}{3} <$
199. $< \binom{1000}{4} <$
200. $< \binom{10000}{5} <$
201. $< \binom{10^5}{100} <$
202. $< \binom{10^{10}}{20} <$

203. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt{9n^2 + 40n} - \sqrt{9n^2 + 16n} \leqslant 2C \, .$$

204. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} - n \leqslant 7C \, .$$

205. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt[8]{n^8 + 255n^7} - n \leqslant 32C \, .$$

206. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{C}{n} \leqslant \sqrt[4]{n^4 + 15n^2} - n \leqslant \frac{4C}{n} \, .$$

207. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{25n^2 + 11} - 5n}{\sqrt[4]{n^4 + 80n^2} - n} \leqslant 11C \, .$$

208. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{25n^2 + 24} - 5n}{\sqrt{9n^2 + 40} - 3n} \leqslant 2C \, .$$

209. Na potrzeby tego zadania liczbę nazwiemy ładną, jeśli ma jednocyfrowy licznik i jednocyfrowy mianownik.

Dla odpowiednio dobranych **ładnych** liczb wymiernych dodatnich C i D spełniających nierówność $D < 3C$ udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt[3]{n^3 + 7} - n}{\sqrt{4n^4 + 5} - 2n^2} \leqslant D \, .$$

210. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{36n + 28} - \sqrt{36n + 13}}{\sqrt{25n + 75} - \sqrt{25n + 11}} \leqslant 2C \, .$$

211. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k \leqslant \frac{\sqrt{40n - 11} + 3}{\sqrt[3]{40n + 11} - 1} \leqslant 4C \cdot n^k \, .$$

Ciągi liczbowe, granica.

W pierwszej kolejności należy omówić zadania z wykrzyknikiem.

Dla podanego wyrażenia $W(n)$ dobierz odpowiednie stałe g oraz C i udowodnij, że nierówności $g - C/n < W(n) < g + C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n .

212. $\frac{n^5 + n^4 + 1}{2n^5 + n^3 + 5}$
213. $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$
- 214! $\frac{\sqrt{4n^4 + 1}}{n^2 + 1}$
215. $\sqrt{n^2 + 4n} - n$
- 216! $\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \frac{n}{n^2 + 3} + \dots + \frac{n}{n^2 + n}$

Dla podanego wyrażenia $W(n, k)$ dobierz odpowiednią wartość parametru k i odpowiednie stałe dodatnie g oraz C i udowodnij, że nierówności $g - C/n < W(n, k) < g + C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n .

- 217! $\frac{\sqrt{n^k + 1}}{n^6 + n^5}$
- 218! $\frac{\sqrt{n^6 + n^5}}{n^k + 1}$
- 219! $\sqrt{n^8 + n^k} - n^4$
- 220! $\sqrt{n^4 + n^3} - n^2 - kn$

221! Ciąg o wyrazach całkowitych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

222! Dla których liczb naturalnych $k \geq 2$ ze zbieżności ciągu (a_n^k) wynika zbieżność ciągu (a_n) ?

223! Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + n^5 + 1} - n^3}{\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2}.$$

224. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n^{16} + n^3} - n^8\right)^3}{\left(\sqrt{n^{16} + n^5} - n^8\right)^5}.$$

225. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{n^{18} + n^7} - n^6\right)^2}{\left(\sqrt{n^{18} + n^7} - n^9\right)^5}.$$

226. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{12} + n} - n^6}{\left(\sqrt{n^4 + n} - n^2\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k , aby granica ta była dodatnia i skończona.

227! Wskaż liczbę naturalną k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{14} + 9n^9 + 1} - n^7}{n^k}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

228. Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \left(\sqrt{n^{666} + 1} - n^{333} \right) \right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

229. Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \left(\sqrt[4]{n^{888} + 1} - n^{222} \right) \right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

230! Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^{666} + n^k} - n^{222} \right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

231! Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + 6n^3} - n^2 - 3n \right).$$

232! Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^{24} + n^{11}} - n^6}{\left(\sqrt{n^{24} + n^{11}} - n^{12} \right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k , aby granica ta była dodatnia i skończona.

233! Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k . Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{n}{3} \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{n+4}{n} \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n}{4} \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n+2}{5} \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n+2020}{6} \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{2}}{2} \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$
- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{2} \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$
- h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{2}}{3} \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$
- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{3} \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$
- j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{3}}{2} \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$
- k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{4} \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$
- l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{4}}{3} \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$

234! Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall_{n>1000} |a_n - 100| < 10.$$

Czy stąd wynika, że

- a) ciąg (a_n) jest zbieżny,
- b) ciąg (a_n) jest rozbieżny,
- c) każdy wyraz ciągu (a_n) jest dodatni,
- d) ciąg (a_n) ma co najmniej jeden wyraz dodatni,
- e) od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,
- f) $a_{666} < 77777777$,
- g) $a_{1111} > 88$,
- h) $\forall_{n>1729} |a_n - 100| < 1$,
- i) $\forall_{n>345} |a_n - 100| < 17$,
- j) $\forall_{n>5555} |a_n - 99| < 13$,
- k) ciąg (a_n) jest ograniczony,
- l) $\exists_{n>444} |a_n - 95| < 37$,
- m) $\exists_{n>4444} |a_n - 80| < 37$,
- n) $\exists_{n<444} |a_n - 95| < 37$,
- o) $\exists_{n<4444} |a_n - 80| < 37$,
- p) $\forall_m \exists_{n>m} a_n > 0$,
- q) $\forall_{n>1331} |a_n - 66| > 12$,
- r) $\forall_{m>1234} \forall_{n>5678} |a_n - a_m| < 7$,
- s) $\forall_{m>1234} \forall_{n>5678} |a_n - a_m| < 17$,
- t) $\forall_{m>123} \forall_{n>45678} |a_n - a_m| < 27$,
- u) $\forall_{m>1234} \forall_{n>5678} |a_n - a_m| < 37$,
- v) $\exists_{m<123} \exists_{n<456} |a_n - a_m| < 3$,
- w) $\forall_{m>12345} \forall_{n>67890} |a_n + a_m| < 210$,
- x) $\forall_{m>1296} \forall_{n>7776} |a_n + a_m| < 222$,
- y) $\forall_{m>1024} \forall_{n>8192} |a_n + a_m| > 128$,
- z) $\exists_n a_n < 92$,
- ż) $\exists_n a_n > 91$,
- ż) $\exists_m \exists_{n \neq m} |a_n - a_m| < 10^{-1000000}$.

235! Dany jest taki ciąg (a_n) , że

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \forall_{n \geq 5/\varepsilon} |a_n - 7| < \varepsilon.$$

Podaj granicę ciągu (a_n) .

- Wskaż taką liczbę M , że $\forall_n |a_n| < M$.
Wskaż taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} a_n > 6$.
Wskaż taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} a_n < 7,01$.
Wskaż taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} |a_n - 8| > 1/3$.

236! Dany jest taki ciąg (b_n) , że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq 10/\varepsilon} |b_n + 2| < \varepsilon .$$

- Podaj granicę ciągu (b_n) .
Wskaż taką liczbę M , że $\forall_n |b_n| < M$.
Wskaż taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} b_n < 0$.
Wskaż taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} b_n > -3$.
Wskaż taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} |b_n - 2| > 1/10$.

237! Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall_{\varepsilon \geq 1} \quad \exists_N \quad \forall_{n \geq N} |a_n - 1| \leq \varepsilon .$$

Czy stąd wynika, że

- 237.1** ciąg (a_n) jest zbieżny
- 237.2** ciąg (a_n) jest rozbieżny
- 237.3** ciąg (a_n) jest ograniczony
- 237.4** wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie
- 237.5** wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne
- 237.6** od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie
- 237.7** od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne
- 237.8** w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów dodatnich
- 237.9** w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów nieujemnych
- 237.10** w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz dodatni
- 237.11** w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz nieujemny
- 237.12** $\forall_n a_n > 0$
- 237.13** $\forall_n a_n \geq 0$
- 237.14** $\exists_N \forall_{n \geq N} a_n > 0$
- 237.15** $\exists_N \forall_{n \geq N} a_n \geq 0$
- 237.16** $\forall_N \exists_{n \geq N} a_n > 0$
- 237.17** $\forall_N \exists_{n \geq N} a_n \geq 0$
- 237.18** $\exists_n a_n > 0$
- 237.19** $\exists_n a_n \geq 0$

238. W każdym² z zadań **238.1–238.11** podaj granicę (lub granicę niewłaściwą) ciągu. Liczby wymierne podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

- 238.1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+4+8+\dots+2^k+\dots+64^n}{1+4+16+64+\dots+4^k+\dots+64^n} = \dots\dots\dots$
- 238.2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+4+16+64+\dots+4^k+\dots+64^n}{1+8+64+512+\dots+8^k+\dots+64^n} = \dots\dots\dots$
- 238.3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+4+8+\dots+2^k+\dots+64^n}{1+8+64+512+\dots+8^k+\dots+64^n} = \dots\dots\dots$
- 238.4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+8+64+512+\dots+8^k+\dots+64^n}{1+64+4096+\dots+64^k+\dots+64^n} = \dots\dots\dots$
- 238.5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+4+16+64+\dots+4^k+\dots+64^n}{1+64+4096+\dots+64^k+\dots+64^n} = \dots\dots\dots$
- 238.6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3+9+27+\dots+3^k+\dots+9^n}{1+9+81+729+\dots+9^k+\dots+9^n} = \dots\dots\dots$
- 238.7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+5+25+125+\dots+5^k+\dots+25^n}{1+25+625+\dots+25^k+\dots+25^n} = \dots\dots\dots$
- 238.8. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3+9+27+\dots+3^k+\dots+27^n}{1+27+729+\dots+27^k+\dots+27^n} = \dots\dots\dots$
- 238.9. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+5+25+125+\dots+5^k+\dots+125^n}{1+125+15625+\dots+125^k+\dots+125^n} = \dots\dots\dots$
- 238.10. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+4+8+\dots+2^k+\dots+16^n}{1+16+256+\dots+16^k+\dots+16^n} = \dots\dots\dots$
- 238.11. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3+9+27+\dots+3^k+\dots+81^n}{1+81+6561+\dots+81^k+\dots+81^n} = \dots\dots\dots$

PRAWDA CZY FAŁSZ?

- 239! Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.
- 240! Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.
- 241! Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.
- 242! Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, ciąg (b_n) rozbieżny, a ponadto obydwa ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.
- 243! Jeżeli (a_n) jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.
- 244! Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy dodanie jak i ujemne, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.
- 245! Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy mniejsze od 1 jak i większe od 3, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

²Nie ma sensu rozwiązywać wszystkich 11 zadań, jeśli w którymś momencie uznasz, że już umiesz rozwiązywać tego typu zadania.

Obliczanie granic ciągów – podstawowe fakty.

1. CIĄG ZBIEŻNY MA TYLKO JEDNĄ GRANICĘ.

2. GRANICA SUMY JEST SUMĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

3. GRANICA RÓŻNICY JEST RÓŻNICĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n - b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

4. GRANICA ILOCZYNU JEST ILOCZYNEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

5. GRANICA ILORAZU JEST ILORAZEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $b_n \neq 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, to ciąg $(\frac{a_n}{b_n})$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} .$$

6. ZBIEŻNOŚĆ I GRANICA NIE ZALEŻĄ OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZENIE WIELU POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU.

7. SŁABE NIERÓWNOŚCI ZACHOWUJĄ SIĘ PRZY PRZEJŚCIU DO GRANICY.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym dla każdego n zachodzi nierówność $a_n \leqslant b_n$ (odpowiednio $a_n \geqslant b_n$), to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leqslant \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (odpowiednio $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geqslant \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$).

8. KILKA PODSTAWOWYCH GRANIC.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a &= a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a^n &= 0 \text{ dla } |a| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1 \text{ dla } a > 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1 \end{aligned}$$

9. Z GRANICĄ MOŻNA WCHODZIĆ POD PIERWIASTEK.

Dokładniej, jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, przy czym $a_n \geqslant 0$, to dla $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} .$$

Dla nieparzystych k warunek $a_n \geqslant 0$ można pominąć.