

$$7 - \sqrt{17} > 7 - \sqrt{25} = 7 - 5 = 2 > 1.$$

$$0 = 7 - 7 = 7 - \sqrt{49} < \mathbf{7} - \sqrt{37} < 7 - \sqrt{36} = 7 - 6 = 1.$$

$$-1 = 7 - 8 = 7 - \sqrt{64} < \mathbf{7} - \sqrt{57} < 7 - \sqrt{49} = 7 - 7 = \mathbf{0}.$$

$$7 - \sqrt{77} < 7 - \sqrt{64} = 7 - 8 = -1.$$

Korzystając z własności potęgowania otrzymujemy

$$2^{2^{2^{11}}} = 2^{2^{2^{10}+2^{10}}} = 2^{2^{2^{10}} \cdot 2^{2^{10}}} = \left(2^{2^{2^{10}}}\right)^{2^{2^{10}}} > 1000^{2^{2^{10}}}.$$

$$2^{2^{2^{10}}} = 2^{2^{1024}} > 2^{2^{10}} = 2^{1024} > 2^{10} = 1024 > 1000.$$

Liczba $a = \sqrt[4]{2}$ występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

Rozwiązanie:

Z równości $a^{16} = 16$ wynika, że pierwsza liczba jest równa 16, jest więc mniejsza.

166. Która liczba jest większa: $\log_a b$ czy $\log_b a$?
Przyjmujemy $a = \log_2 3$ oraz $b = \log_3 2$.

Rozwiązanie:
Ponieważ $ab = 1$, mamy $\log_a b = \log_b a = -1$.

167. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej.
 $A = 10^{10^{11}}, \quad B = 10^{10^{20}}, \quad C = 10^{10^{50}}, \quad D = 10^{10^{250}}, \quad E = (10!)^{10!}$
 $F = (100!)^{10^{10}}, \quad G = 2^{100!}, \quad H = 2^{2^{100}}, \quad I = 10^{10^{10^3}}, \quad J = 2^{2^{2^{10}}}$

Rozwiązanie:
Poprawny porządek jest następujący

$$E < A < F < B < H < C < G < D < J < I$$

Szacowania dowodzące poprawności powyższego uporządkowania:

$$\begin{aligned} E &= (10!)^{10!} < (10^{10})^{10^{10}} = 10^{10^{11}} = A \\ A &= 10^{10^{11}} = (10^{10})^{10^{10}} < (10^{90})^{10^{10}} < (100!)^{10^{10}} = F \\ F &= (100!)^{10^{10}} < (10^{200})^{10^{10}} < (10^{1000})^{10^{10}} = 10^{10^{13}} < B \\ B &< 10^{10^{29}} < 16^{10^{30}/4} = 2^{10^{30}} = 2^{1000^{10}} < 2^{1024^{10}} = 2^{2^{100}} = H \\ H &= 2^{2^{100}} < 2^{2^{120}} = 2^{8^{40}} < 10^{10^{40}} < C \\ C &< 10^{10^{90}} < 16^{100!/4} = 2^{100!} = G \\ G &= 2^{100!} < 10^{10^{200}} < D \\ D &< 10^{10^{299}} < 16^{10^{300}/4} = 2^{10^{300}} = 2^{1000^{100}} < 2^{1024^{100}} < 2^{2^{1000}} < 2^{2^{2^{10}}} = J \\ J &= 2^{2^{2^{10}}} = 2^{2^{1024}} = 2^{4^{512}} < 10^{10^{512}} < 10^{10^{1000}} = I \end{aligned}$$

168. Dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej n udowodnić nierówności
$$n^{2^{120}} < 2^n < n^{2^{122}}.$$

Rozwiązanie:
Przyjęcie $n = 2^m$ pozwala na przepisanie podanej nierówności w postaci równoważnej:
$$2^{m \cdot 2^{120}} < 2^{2^m} < 2^{m \cdot 2^{122}},$$

czyli
$$m \cdot 2^{120} < 2^m < m \cdot 2^{122}.$$

Z kolei podstawienie $m = 2^k$ prowadzi do

$$2^{k+120} < 2^{2^k} < 2^{k+122},$$

czyli

$$k + 120 < 2^k < k + 122.$$

Zauważając, że powyższe nierówności są prawdziwe dla $k = 7$, otrzymujemy $m = 2^7 = 128$ i w konsekwencji $n = 2^{128}$.

169. Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$n^{2^{2017}} < 2^n < n^{2^{2018}}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Przyjmijmy $n = 2^k$. Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$2^{k \cdot 2^{2017}} < 2^{2^k} < 2^{k \cdot 2^{2018}},$$

czyli

$$k \cdot 2^{2017} < 2^k < k \cdot 2^{2018}.$$

Zauważmy, że powyższe nierówności są prawdziwe dla $k = 2028$, gdyż wtedy

$$k \cdot 2^{2017} = 2028 \cdot 2^{2017} < 2048 \cdot 2^{2017} = 2^{11} \cdot 2^{2017} = 2^{2028} = 2^k$$

oraz

$$2^k = 2^{2028} = 2^{10} \cdot 2^{2018} = 1024 \cdot 2^{2018} < 2028 \cdot 2^{2018} = k \cdot 2^{2018}.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n = 2^{2028}$.

Sposób II

Przyjmijmy $n = k \cdot 2^{2017}$. Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$(k \cdot 2^{2017})^{2^{2017}} < 2^{k \cdot 2^{2017}} < (k \cdot 2^{2017})^{2^{2018}},$$

czyli

$$(k \cdot 2^{2017})^{2^{2017}} < (2^k)^{2^{2017}} < (k^2 \cdot 2^{4034})^{2^{2017}},$$

co jest równoważne nierównościom

$$k \cdot 2^{2017} < 2^k < k^2 \cdot 2^{4034} \tag{\heartsuit}.$$

Zauważmy, że nierówności $(\heartsuit)$ są prawdziwe dla $k = 2028$, gdyż wówczas

$$k \cdot 2^{2017} = 2028 \cdot 2^{2017} < 2048 \cdot 2^{2017} = 2^{11} \cdot 2^{2017} = 2^{2028} = 2^k$$

oraz

$$2^k = 2^{2028} = 2^{20} \cdot 2^{2008} = 1024^2 \cdot 2^{2008} < 2028^2 \cdot 2^{2008} = k^2 \cdot 2^{2008} < k^2 \cdot 2^{4034}.$$

Ale nierówności $(\heartsuit)$ są też prawdziwe dla $k = 4056$, gdyż wówczas

$$k \cdot 2^{2017} = 4056 \cdot 2^{2017} < 4096 \cdot 2^{2017} = 2^{12} \cdot 2^{2017} = 2^{2029} < 2^{4056} = 2^k$$

oraz

$$2^k = 2^{4056} = 2^{22} \cdot 2^{4034} = 2048^2 \cdot 2^{4034} < 4056^2 \cdot 2^{4034} = k^2 \cdot 2^{4034}.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n = 2028 \cdot 2^{2017}$. A innym przykładem jest $n = 4056 \cdot 2^{2017}$.

170*. Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$4^n < n^{2^{2017}} < 8^n.$$

Rozwiązanie:

Ślepa uliczka

Przyjmijmy $n = 2^k$. Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$4^{2^k} < 2^{k \cdot 2^{2017}} < 8^{2^k},$$

czyli kolejno

$$2 \cdot 2^k < k \cdot 2^{2017} < 3 \cdot 2^k,$$

$$2 \cdot 2^{k-2017} < k < 3 \cdot 2^{k-2017}. \tag{♡}$$

Jednak nie udaje się dobrać liczby naturalnej k , która spełniałaby nierówności (♡).

Rozwiązanie poprawne

Przyjmijmy $n = k \cdot 2^{2017}$. Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$4^{k \cdot 2^{2017}} < \left(k \cdot 2^{2017}\right)^{2^{2017}} < 8^{k \cdot 2^{2017}},$$

czyli

$$\left(4^k\right)^{2^{2017}} < \left(k \cdot 2^{2017}\right)^{2^{2017}} < \left(8^k\right)^{2^{2017}},$$

co jest równoważne kolejnym nierównościom

$$4^k < k \cdot 2^{2017} < 8^k,$$

$$2^{2k} < k \cdot 2^{2017} < 2^{3k}. \tag{♣}$$

Zauważmy, że nierówności (♣) są prawdziwe dla $k = 1000$, gdyż wówczas

$$2^{2k} = 2^{2000} < 1000 \cdot 2^{2017} < 2^{10} \cdot 2^{2017} = 2^{2027} < 2^{3000} = 2^{3k}.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n = 1000 \cdot 2^{2017}$.

Uwaga

Liczbę wymaganą w zadaniu otrzymamy także dla k spełniających nierówności

$$676 \leqslant k \leqslant 1013.$$

Zauważ, że wśród tych liczb nie ma potęgi dwójki!!!

$$n^{n^{2^{1000}}} < 2^{2^n}$$

Rozwiązanie:

$$\left(2^{2^k}\right)\left(2^{2^k}\right)^{2^{1000}} < 2^{2^{2^k}},$$
$$2^{2^k+2^{k+1000}} < 2^{2^{2^k}}. \quad (1)$$
$$k + 2^{k+1000} < 2^{2^k} . \quad (2)$$
$$L = 10 + 2^{1010} < 2^4 + 2^{1010} < 2^{1010} + 2^{1010} = 2^{1011} < 2^{1024} = P.$$

Odpowiedź:

$$\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}$$

Rozwiązanie:

$$A_n < 2.$$
$$\sqrt{2} < 2,$$

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$A_n < 2. \quad (\clubsuit)$$

$$A_{n+1} < 2. \quad (\diamond)$$
$$A_{n+1} = (\sqrt{2})^{A_n},$$

wobec czego po skorzystaniu z założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) oraz z nierówności $a^x < a^y$ dla $a > 1$ i $x < y$, otrzymujemy

$$A_{n+1} = (\sqrt{2})^{A_n} < (\sqrt{2})^2 = 2,$$

co kończy dowód nierówności ($\diamond$).

Na mocy zasady indukcji dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

173. Niech $A_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}}}}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n < 3$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy indukcyjny dowód nierówności

$$A_n < 3.$$

1° Dla $n = 1$ mamy $A_1 = \sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, dowodzona nierówność przybiera więc postać $\sqrt{8} < 3 = \sqrt{9}$,

jest zatem prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$A_n < 3. \quad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas

$$A_{n+1} < 3. \quad (\diamond)$$

Zauważmy, że

$$A_{n+1} = (\sqrt{2})^{A_n},$$

wobec czego po skorzystaniu z założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) oraz z nierówności $a^x < a^y$ dla $a > 1$ i $x < y$, otrzymujemy

$$A_{n+1} = (\sqrt{2})^{A_n} < (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3,$$

co kończy dowód nierówności ($\diamond$).

Na mocy zasady indukcji dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

174. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left| \sqrt{n^2 + 1} - n - \frac{C}{n} \right| < \frac{D}{n^3}.$$

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy lewą stronę nierówności w postaci nie-zawierającej różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości:

$$\left| \sqrt{n^2+1} - n - \frac{C}{n} \right| = \left| \sqrt{n^2+1} - \left(n + \frac{C}{n} \right) \right| = \left| \frac{n^2+1 - \left(n + \frac{C}{n} \right)^2}{\sqrt{n^2+1} + \left(n + \frac{C}{n} \right)} \right| = \left| \frac{1 - 2C - \frac{C^2}{n^2}}{\sqrt{n^2+1} + \left(n + \frac{C}{n} \right)} \right|.$$

W liczniku ostatniego wyrażenia dominującymi składnikami są 1 oraz $2C$. Aby wyrażenie to miało możliwie mały rząd wielkości, dobieramy C tak, aby te dwa składniki się uprościły, czyli $C = 1/2$. Przy tej wartości C wykonujemy szacowanie od góry:

$$\frac{\frac{1}{4n^2}}{\sqrt{n^2+1} + \left(n + \frac{1}{2n} \right)} = \frac{1}{4n^2 \left(\sqrt{n^2+1} + n + \frac{1}{2n} \right)} < \frac{1}{4n^2 \left(\sqrt{n^2+0} + n + 0 \right)} = \frac{1/8}{n^3},$$

co kończy rozwiązanie zadania z $D = 1/8$.

Uwagi:

Stała C jest wyznaczona jednoznacznie. Każde rozwiązanie z $C \neq 1/2$ jest błędne.

Stała $D = 1/8$ jest najmniejsza możliwa. Każde rozwiązanie z $D < 1/8$ jest błędne.

175. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5} \leq D.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 6C$ (wersja łatwiejsza).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 4C$ (wersja trudniejsza).

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy dane w zadaniu wyrażenie w postaci niezawierającej w liczniku różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5} &= \frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5} \cdot \frac{\sqrt{n^8+3n^6}+n^4}{\sqrt{n^8+3n^6}+n^4} = \frac{n^8+3n^6-n^8}{(7n^2-4n+5) \cdot (\sqrt{n^8+3n^6}+n^4)} = \\ &= \frac{3n^6}{(7n^2-4n+5) \cdot (\sqrt{n^8+3n^6}+n^4)} \end{aligned}$$

Przeprowadzamy szacowanie od góry:

$$\frac{3n^6}{(7n^2-4n+5) \cdot (\sqrt{n^8+3n^6}+n^4)} \leq \frac{3n^6}{(7n^2-4n^2+0) \cdot (\sqrt{n^8+0}+n^4)} = \frac{3}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2} = D.$$

Przeprowadzamy szacowanie od dołu:

$$\frac{3n^6}{(7n^2-4n+5) \cdot (\sqrt{n^8+3n^6}+n^4)} \geq \frac{3n^6}{(7n^2-0+5n^2) \cdot (\sqrt{n^8+3n^8}+n^4)} = \frac{3}{12 \cdot 3} = \frac{1}{12} = C,$$

co daje zależność $D = 6C$ wystarczającą do rozwiązania w wersji łatwiejszej.

Subtelniejsze szacowanie od dołu wykorzystuje nierówność $4(n-1) \geq 0$ zamiast $4n \geq 0$ i wygląda następująco:

$$\begin{aligned} \frac{3n^6}{(7n^2-4n+5) \cdot (\sqrt{n^8+3n^6+n^4})} &= \frac{3n^6}{(7n^2-4(n-1)+1) \cdot (\sqrt{n^8+3n^6+n^4})} \geq \\ &\geq \frac{3n^6}{(7n^2-0+n^2) \cdot (\sqrt{n^8+3n^8+n^4})} = \frac{3}{8 \cdot 3} = \frac{1}{8} = C, \end{aligned}$$

co daje zależność $D = 4C$ wystarczającą do rozwiązania w wersji trudniejszej.

176. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3} \leq D.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 8C$ (wersja najłatwiejsza).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 4C$ (wersja średnio trudna).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 2C$ (wersja najtrudniejsza).

Rozwiązanie:

Przeprowadzamy szacowanie od góry:

$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3} \leq \frac{6n^{11}-0+2n^{11}}{6n^{11}-3n^{11}+0} = \frac{8n^{11}}{3n^{11}} = \frac{8}{3} = D.$$

Przeprowadzamy szacowanie od dołu:

$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3} \geq \frac{6n^{11}-3n^{11}+0}{6n^{11}-0+3n^{11}} = \frac{3n^{11}}{9n^{11}} = \frac{1}{3} = C,$$

co daje zależność $D = 8C$ wystarczającą do rozwiązania wersji najłatwiejszej.

Subtelniejsze szacowania wykorzystują nierówności $-3n^6+2 \leq -3+2=-1<0$ oraz $-3n^5+3 \leq -3+3=0$ zamiast odpowiednio $-3n^6 \leq 0$ oraz $-3n^5 \leq 0$ i wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} \frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3} &= \frac{6n^{11}+(-3n^6+2)}{6n^{11}-3n^5+3} \leq \frac{6n^{11}-0}{6n^{11}-3n^{11}+0} = \frac{6n^{11}}{3n^{11}} = 2 = D, \\ \frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3} &= \frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}+(-3n^5+3)} \geq \frac{6n^{11}-3n^{11}+0}{6n^{11}-0} = \frac{3n^{11}}{6n^{11}} = \frac{1}{2} = C. \end{aligned}$$

To daje zależność $D = 4C$ wystarczającą do rozwiązania wersji średniej.

Można też zauważyć, że

$$6n^{11}-3n^6+2 \leq 6n^{11}-3n^5+2 < 6n^{11}-3n^5+3,$$

skąd

$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3} < 1 = D.$$

Zatem rozwiązanie wersji średniej można uzyskać także przy użyciu szacowań z $C = 1/3$ oraz $D = 1$.

Przedstawione wyżej szacowania z $C = 1/2$ oraz $D = 1$ składają się na rozwiązanie wersji najtrudniejszej.

177. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną k oraz liczby wymierne dodatnie C oraz D , a następnie udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$Cn^k \leq \sqrt{4n^2+1} + \sqrt{4n^2+2} + \sqrt{4n^2+3} + \sqrt{4n^2+4} + \dots + \sqrt{16n^2-1} + \sqrt{16n^2} \leq Dn^k.$$

Trudność zadania zależy od uzyskanego przez Ciebie ilorazu D/C :

- Przy $D/C \geq 2$ zadanie jest najłatwiejsze.
- Przy $D/C < 3/2$ zadanie jest najtrudniejsze.

Rozwiązanie:

Dana w zadaniu suma ma $12n^2$ składników. Możemy zatem wykonać szacowania

$$24n^3 = 12n^2 \cdot \sqrt{4n^2} \leq \sum_{i=4n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} \leq 12n^2 \cdot \sqrt{16n^2} = 48n^3,$$

co kończy rozwiązanie w wersji najłatwiejszej.

Uzyskaliśmy tu liczby $k = 3$, $C = 24$, $D = 48$ i iloraz $D/C = 2$.

Bardziej subtelne szacowanie wymaga rozbicia wyjściowej sumy na dwie sumy

$$\sum_{i=4n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} = \sum_{i=4n^2+1}^{9n^2} \sqrt{i} + \sum_{i=9n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i},$$

a następnie wykonania szacowania dla każdej z sum z osobna.

Otrzymujemy

$$10n^3 = 5n^2 \cdot \sqrt{4n^2} \leq \sum_{i=4n^2+1}^{9n^2} \sqrt{i} \leq 5n^2 \cdot \sqrt{9n^2} = 15n^3$$

oraz

$$21n^3 = 7n^2 \cdot \sqrt{9n^2} \leq \sum_{i=9n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} \leq 7n^2 \cdot \sqrt{16n^2} = 28n^3,$$

skąd po dodaniu

$$31n^3 \leq \sum_{i=4n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} \leq 43n^3.$$

To kończy rozwiązanie wersji najtrudniejszej.

Uzyskane liczby to $k = 3$, $C = 31$, $D = 43$, a zatem $D/C = 43/31 < 45/30 = 3/2$.

178. Dobrać odpowiednie liczby całkowite dodatnie s i t oraz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}-n^5\right)^s}{\left(\sqrt{n^8+3n^7}-n^4\right)^t} \leq 18C.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}.$$

Otrzymujemy

$$\frac{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}-n^5\right)^s}{\left(\sqrt{n^8+3n^7}-n^4\right)^t}=\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t\cdot\left(8n^7\right)^s}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s\cdot\left(3n^7\right)^t}=\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t\cdot2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s\cdot3^t\cdot n^{7t}}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t\cdot2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s\cdot3^t\cdot n^{7t}}\leqslant\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^8}+n^4\right)^t\cdot2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+0}+n^5\right)^s\cdot3^t\cdot n^{7t}}=\frac{\left(3n^4\right)^t\cdot2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(2n^5\right)^s\cdot3^t\cdot n^{7t}}=2^{2s}\cdot n^{2s-3t}$$

i od dołu

$$\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t\cdot2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s\cdot3^t\cdot n^{7t}}\geqslant\frac{\left(\sqrt{n^8+0}+n^4\right)^t\cdot2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^{10}}+n^5\right)^s\cdot3^t\cdot n^{7t}}=\frac{\left(2n^4\right)^t\cdot2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(4n^5\right)^s\cdot3^t\cdot n^{7t}}=\frac{2^{s+t}\cdot n^{2s-3t}}{3^t}.$$

Ponieważ oszacowania mają być niezależne od n , musi być $2s-3t=0$, wobec czego przyjmujemy $s=3$ i $t=2$. Wówczas dolne oszacowanie przybiera wartość $C=32/9$, a górne $64=18C$.

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi $s=3$, $t=2$ oraz $C=32/9$.

W każdym z poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu $0, 1, 2, 5, 10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, 10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

179.

$10^{100} < 2^{500} < 10^{200}$
180.

$10^{500} < 3^{2000} < 10^{1000}$
181.

$10^{2000} < 2^{10000} < 10^{5000}$
182.

$10^{10000} < 30^{10000} < 10^{20000}$
183.

$10^{200} < 2^{2^{10}} < 10^{500}$
184.

$10^{10000} < 4444^{4444} < 10^{20000}$
185.

$10^{20000} < 7777^{7777} < 10^{50000}$
186.

$10^{5000} < 2011^{2011} < 10^{10000}$
187.

$10^{10000} < 222^{5555} < 10^{20000}$
188.

$10^{500} < 5555^{222} < 10^{1000}$
189.

$10^{500} < 333^{333} < 10^{1000}$

190.

$10^{20000} < 10000! < 10^{50000}$

191.

$10^{1000} < 666! < 10^{2000}$

192.

$10^{10000} < 5000! < 10^{20000}$

193.

$10^{100000} < 35000! < 10^{200000}$

194.

$10^{200000} < (10^5)! < 10^{500000}$

195.

$10^{200} < (7+2\sqrt{2})^{500} < 10^{500}$

196.

$10^{500} < (6+3\sqrt{2})^{500} < 10^{1000}$

197.

$10^{200} < (91+\sqrt{91})^{100} < 10^{500}$

198.

$10^5 < \binom{1000}{3} < 10^{10}$

199.

$10^{10} < \binom{1000}{4} < 10^{20}$

200.

$10^{10} < \binom{10000}{5} < 10^{20}$

201.

$10^{200} < \binom{10^5}{100} < 10^{500}$

202.

$10^{100} < \binom{10^{10}}{20} < 10^{200}$

203. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt{9n^2 + 40n} - \sqrt{9n^2 + 16n} \leq 2C.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b},$$

prawdziwy w przypadku $a + b \neq 0$, otrzymujemy

$$\sqrt{9n^2 + 40n} - \sqrt{9n^2 + 16n} = \frac{24n}{\sqrt{9n^2 + 40n} + \sqrt{9n^2 + 16n}} = \frac{24}{\sqrt{9 + \frac{40}{n}} + \sqrt{9 + \frac{16}{n}}}.$$

Szacowanie od dołu (mianownika od góry, czyli n od dołu przez 1) prowadzi do:

$$\frac{24}{\sqrt{9 + \frac{40}{n}} + \sqrt{9 + \frac{16}{n}}} \geq \frac{24}{\sqrt{9 + 40} + \sqrt{9 + 16}} = \frac{24}{7 + 5} = 2 = C.$$

Szacowanie od góry (mianownika od dołu, czyli $1/n$ przez 0) prowadzi do:

$$\frac{24}{\sqrt{9 + \frac{40}{n}} + \sqrt{9 + \frac{16}{n}}} \leq \frac{24}{\sqrt{9 + 0} + \sqrt{9 + 0}} = \frac{24}{3 + 3} = 4 = 2C.$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C = 2$.

Uwaga:

Nietrudno zauważyć, że ciąg $\left(\frac{24}{\sqrt{9 + \frac{40}{n}} + \sqrt{9 + \frac{16}{n}}}\right)_{n=1}^\infty$ jest rosnący, jego pierwszy wyraz jest równy 2, a granica¹ 4. Wynika stąd, że uzyskane przez nas oszacowania są optymalne, w związku z czym w każdym poprawnym rozwiązaniu musi być $C = 2$.

204. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} - n \leq 7C.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}.$$

Otrzymujemy

$$\sqrt[3]{n^3 + 63n^2} - n = \frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3 + 63n^2}\right)^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} + n^2}.$$

¹Tu i wszędzie dalej, gdzie pojawia się granica ciągu: Jeśli nie wiesz, co to jest, odłóż czytanie tych fragmentów na później.

Dalszą część rozwiązania można przeprowadzić dwoma sposobami.

Sposób I

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\begin{aligned} \frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2} &\geq \frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^3}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^3}+n^2} = \\ &= \frac{63n^2}{16n^2+4n^2+n^2} = \frac{63n^2}{21n^2} = 3 \end{aligned}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2} \leq \frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+0}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+0}+n^2} = \frac{63n^2}{3n^2} = 21 = 7 \cdot 3.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C = 3$.

Sposób II

Oznaczamy uzyskane wyrażenie przez a_n i przepisujemy je w postaci

$$a_n = \frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2} = \frac{63}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{63}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{63}{n}}+1}.$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem n , ciąg (a_n) jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_1 \leq a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Ponieważ $a_1 = 3$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 21$, otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C = 3$.

205. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[8]{n^8+255n^7}-n \leq 32C.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, powinniśmy przez wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia doprowadzić je do postaci, w której można będzie wykonać odejmowanie.

W tym celu trzykrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b},$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera.

Możemy też od razu zastosować wzór na różnicę ósmych potęg w postaci

$$a-b = \frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)},$$

który powstaje właśnie przez trzykrotne skorzystanie ze wzoru na różnicę kwadratów.

Otrzymujemy

$$\sqrt[8]{n^8+255n^7}-n=\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}.$$

(\diamond)

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\begin{aligned} &\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}\geqslant \\ &\geqslant \frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^8}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^8}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^8}+n^4\right)}= \\ &= \frac{255n^7}{17n\cdot 5n^2\cdot 3n^4}=\frac{255n^7}{255n^7}=1 \end{aligned}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\begin{aligned} &\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}\leqslant \\ &\leqslant \frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+0}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+0}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+0}+n^4\right)}= \\ &= \frac{255n^7}{2n\cdot 2n^2\cdot 2n^4}=\frac{255n^7}{8n^7}=\frac{255}{8}<\frac{256}{8}=32. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=1$.

Sposób II:

Zaczynamy jak w sposobie I. Otrzymawszy wyrażenie $(\diamond)$ przekształcamy je dalej i oznaczamy przez a_n :

$$\begin{aligned} &\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}= \\ &= \frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+255n^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+255n^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+255n^{-1}}+1\right)}=a_n. \end{aligned}$$

Ponieważ w powyższym wyrażeniu wraz ze wzrostem n maleje mianownik, a przy tym wszystkie składowe tego wyrażenia są dodatnie, ciąg (a_n) jest rosnący. Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą więc nierówności

$$a_1\leqslant a_n<\lim_{k\rightarrow\infty}a_k.$$

(\clubsuit)

Ponieważ

$$a_1=\sqrt[8]{1+255}-1=2-1=1$$

oraz

$$\begin{aligned} \lim_{k\rightarrow\infty}a_k&=\lim_{k\rightarrow\infty}\frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+255k^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+255k^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+255k^{-1}}+1\right)}= \\ &= \frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+0}+1\right)}=\frac{255}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{255}{8}<\frac{256}{8}=32, \end{aligned}$$

otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C=1$.

Uwaga:
Formalnie poprawna, ale dydaktycznie bardzo niezręczna wersja nierówności ($\clubsuit$), to

$$a_1 \leqslant a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \, .$$

W powyższym wzorze zmienna n występuje w dwóch zupełnie różnych rolach. Przemianowanie jednego z jej bytów na k pozwala uniknąć nieporozumień.

206. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{C}{n} \leqslant \sqrt[4]{n^4 + 15n^2} - n \leqslant \frac{4C}{n} \, .$$

Rozwiązanie:
Stosując wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{(a^2 + b^2) \cdot (a + b)}$$

otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^4 + 15n^2} - n = \frac{15n^2}{(\sqrt{n^4 + 15n^2} + n) \cdot (\sqrt[4]{n^4 + 15n^2} + n)} = \frac{15}{n \cdot (\sqrt{1 + \frac{15}{n^2}} + 1) \cdot (\sqrt[4]{1 + \frac{15}{n^2}} + 1)}$$

Szacowanie od dołu (mianownika od góry) prowadzi do:

$$\frac{15}{n \cdot (\sqrt{1 + \frac{15}{n^2}} + 1) \cdot (\sqrt[4]{1 + \frac{15}{n^2}} + 1)} \geqslant \frac{15}{n \cdot (\sqrt{1 + 15} + 1) \cdot (\sqrt[4]{1 + 15} + 1)} = \frac{1}{n} \, .$$

Szacowanie od góry (mianownika od dołu) prowadzi do:

$$\frac{15}{n \cdot (\sqrt{1 + \frac{15}{n^2}} + 1) \cdot (\sqrt[4]{1 + \frac{15}{n^2}} + 1)} \leqslant \frac{15}{n \cdot (\sqrt{1 + 0} + 1) \cdot (\sqrt[4]{1 + 0} + 1)} = \frac{15}{4n} < \frac{16}{4n} = \frac{4}{n} \, .$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C = 1$.

207. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{25n^2 + 11} - 5n}{\sqrt[4]{n^4 + 80n^2} - n} \leqslant 11C \, .$$

Rozwiązanie:
Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy w liczniku wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b} \, ,$$

a w mianowniku następujący wzór na różnicę czwartych potęg:

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)} \, .$$

Otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{25n^2+11}-5n}{\sqrt[4]{n^4+80n^2}-n}=\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^2}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11}+5n\right)\cdot80n^2}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\begin{aligned}\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^2}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11}+5n\right)\cdot80n^2}&\leqslant\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^4}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^4}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+0}+5n\right)\cdot80n^2}=\\&=\frac{11\cdot4n\cdot10n^2}{10n\cdot80n^2}=\frac{11}{20}\end{aligned}$$

i od dołu

$$\begin{aligned}\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^2}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11}+5n\right)\cdot80n^2}&\geqslant\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+0}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+0}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11n^2}+5n\right)\cdot80n^2}=\\&=\frac{11\cdot2n\cdot2n^2}{11n\cdot80n^2}=\frac{1}{20}.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=1/20$.

208. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\sqrt{25n^2+24}-5n}{\sqrt{9n^2+40}-3n}\leqslant2C.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}.$$

Otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{25n^2+24}-5n}{\sqrt{9n^2+40}-3n}=\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24}+5n\right)}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24}+5n\right)}\leqslant\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40n^2}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+0}+5n\right)}=\frac{24\cdot(7n+3n)}{40\cdot(5n+5n)}=\frac{24\cdot10n}{40\cdot10n}=\frac{3}{5}$$

i od dołu

$$\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24}+5n\right)}\geqslant\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+0}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24n^2}+5n\right)}=\frac{24\cdot(3n+3n)}{40\cdot(7n+5n)}=\frac{24\cdot6n}{40\cdot12n}=\frac{3}{10}.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=3/10$.

209. Na potrzeby tego zadania liczbę nazwiemy ładną, jeśli ma jednocyfrowy licznik i jednocyfrowy mianownik.

Dla odpowiednio dobranych **ładnych** liczb wymiernych dodatnich C i D spełniających nierówność $D < 3C$ udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt[3]{n^3+7}-n}{\sqrt{4n^4+5}-2n^2} \leq D.$$

Rozwiązanie:
Stosując do licznika wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2},$$

a do mianownika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b},$$

otrzymujemy

$$\frac{\sqrt[3]{n^3+7}-n}{\sqrt{4n^4+5}-2n^2}=\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(n^3+7\right)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7}+n^2\right)\cdot5}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując licznik od dołu i mianownik od góry:

$$\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(n^3+7\right)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7}+n^2\right)\cdot5}\geq\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+0}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(n^3+7n^3\right)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7n^3}+n^2\right)\cdot5}=\frac{4}{5}.$$

Następnie szacujemy od góry, szacując licznik od góry i mianownik od dołu:

$$\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(n^3+7\right)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7}+n^2\right)\cdot5}\leq\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5n^4}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(n^3+0\right)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+0}+n^2\right)\cdot5}=\frac{7}{3}.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi

$$C=\frac{4}{5}\qquad\text{ i }\qquad D=\frac{7}{3}=\frac{35}{15}<\frac{36}{15}=\frac{12}{5}=3C.$$

210. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{36n+28}-\sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75}-\sqrt{25n+11}} \leq 2C.$$

Rozwiązanie:
Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b},$$

prawdziwy w przypadku $a+b\neq0$, otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{36n+28}-\sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75}-\sqrt{25n+11}}=\frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+75}+\sqrt{25n+11}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+28}+\sqrt{36n+13}\right)}.\tag{3}$$

Szacowanie od dołu (licznika od dołu i mianownika od góry) prowadzi do:

$$\begin{aligned} \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+75} + \sqrt{25n+11})}{64 \cdot (\sqrt{36n+28} + \sqrt{36n+13})} &\geq \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+0} + \sqrt{25n+0})}{64 \cdot (\sqrt{36n+28n} + \sqrt{36n+13n})} = \\ &= \frac{15 \cdot 10 \cdot \sqrt{n}}{64 \cdot (\sqrt{64n} + \sqrt{49n})} = \frac{150 \cdot \sqrt{n}}{64 \cdot 15 \cdot \sqrt{n}} = \frac{5}{32} = C. \end{aligned} \tag{4}$$

Szacowanie od góry (licznika od góry i mianownika od dołu) prowadzi do:

$$\begin{aligned} \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+75} + \sqrt{25n+11})}{64 \cdot (\sqrt{36n+28} + \sqrt{36n+13})} &\leq \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+75n} + \sqrt{25n+11n})}{64 \cdot (\sqrt{36n+0} + \sqrt{36n+0})} = \\ &= \frac{15 \cdot (\sqrt{100n} + \sqrt{36n})}{64 \cdot 12 \cdot \sqrt{n}} = \frac{15 \cdot 16 \cdot \sqrt{n}}{64 \cdot 12 \cdot \sqrt{n}} = \frac{5}{16} = 2C. \end{aligned} \tag{5}$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C = 5/32$.

211. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k \leq \frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1} \leq 4C \cdot n^k.$$

Rozwiązanie:

Szacujemy dane w treści zadania wyrażenie od góry (szacujemy licznik od góry, a mianownik od dołu, upodabniając wszystkie składniki do składnika dominującego; następnie szacujemy współczynniki pod pierwiastkami tak, aby przy pierwiastkowaniu uzyskać liczby całkowite):

$$\frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1} < \frac{\sqrt{40n-0}+3n^{1/2}}{\sqrt[3]{40n+0}-n^{1/3}} < \frac{\sqrt{49n}+3n^{1/2}}{\sqrt[3]{27n}-n^{1/3}} = \frac{10n^{1/2}}{2n^{1/3}} = 5n^{1/6}.$$

Analogiczne szacowanie od dołu (licznik od dołu, mianownik od góry) prowadzi do:

$$\frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1} > \frac{\sqrt{40n-11n}+0}{\sqrt[3]{40n+11n}-0} = \frac{\sqrt{29n}}{\sqrt[3]{51n}} > \frac{\sqrt{25n}}{\sqrt[3]{64n}} = \frac{5n^{1/2}}{4n^{1/3}} = \frac{5n^{1/6}}{4}.$$

Udowodniliśmy więc żądane nierówności ze stałymi $C = 5/4$ i $k = 1/6$.

Uwagi:

Liczba $k = 1/6$ jest wyznaczona jednoznacznie. Każde rozwiązanie, w którym występuje inna wartość k , jest błędne.

Stała C wynika po części z natury szacowanego wyrażenia, a po części z przyjętej przez nas metody szacowania. Przy innej strategii szacowania można sobie wyobrazić poprawne rozwiązanie z inną stałą C .

W powyższym rozwiązaniu występują ostre nierówności, podczas gdy w treści zadania nierówności są słabe. To dlatego, że celem zadania jest uzyskanie zasadniczego oszacowania, a nie śledzenie, które nierówności są słabe, a które ostre – stąd słabe nierówności w tezie zadania, pomimo że łatwo można uzyskać ostre. Przy tak sformułowanej treści zadania, w przedstawionym wyżej rozwiązaniu można więc zamienić nierówności ostre na słabe (wszystkie lub niektóre z nich).

223! Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + n^5 + 1} - n^3}{\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ w liczniku ułamka pod znakiem granicy występuje różnica wyrażeń podobnej wielkości ($\approx n^3$), stosujemy na poziomie licznika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}.$$

Ponieważ w mianowniku tegoż ułamka występuje różnica wyrażeń **różnego rzędu wielkości** ($\approx n^{3/2}$ oraz $\approx n^2$), stosowanie jakiegokolwiek wzoru skróconego mnożenia jest zbytęczne, a nawet szkodliwe, bo prowadzi do skomplikowania rachunków.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + n^5 + 1} - n^3}{\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + n^5 + 1 - n^6}{\left(\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2\right) \cdot \left(\sqrt{n^6 + n^5 + 1} + n^3\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 1}{\left(\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2\right) \cdot \left(\sqrt{n^6 + n^5 + 1} + n^3\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n^{-5}}{\left(\sqrt[4]{n^{-2} + n^{-3} + n^{-8}} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1 + n^{-1} + n^{-6}} + 1\right)} = \\ &= \frac{1 + 0}{\left(\sqrt[4]{0 + 0 + 0} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1 + 0 + 0} + 1\right)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość $-1/2$.

224. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n^{16} + n^3} - n^8\right)^3}{\left(\sqrt{n^{16} + n^5} - n^8\right)^5}.$$

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n^{16} + n^3} - n^8\right)^3}{\left(\sqrt{n^{16} + n^5} - n^8\right)^5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{\sqrt{n^{16} + n^3} + n^8}\right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{n^{16} + n^5} + n^8}{n^5}\right)^5 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{-5}}{\sqrt{1 + n^{-13}} + 1}\right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + n^{-11}} + 1}{n^{-3}}\right)^5 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1 + n^{-11}} + 1\right)^5}{\left(\sqrt{1 + n^{-13}} + 1\right)^3} \cdot \frac{n^{-15}}{n^{-15}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+n^{-11}}+1)^5}{(\sqrt{1+n^{-13}}+1)^3} = \frac{(\sqrt{1+0}+1)^5}{(\sqrt{1+0}+1)^3} = \frac{2^5}{2^3} = 4.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 4.

225. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{n^{18}+n^7}-n^6\right)^2}{\left(\sqrt{n^{18}+n^7}-n^9\right)^5}.$$

Rozwiązanie:

Stosując w mianowniku wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b},$$

a w liczniku wzór na różnicę sześciątów w postaci

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{n^{18}+n^7}-n^6\right)^2}{\left(\sqrt{n^{18}+n^7}-n^9\right)^5} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^7}{(n^{18}+n^7)^{2/3}+n^6 \cdot (n^{18}+n^7)^{1/3}+n^{12}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{n^{18}+n^7}+n^9}{n^7}\right)^5 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{-5}}{(1+n^{-11})^{2/3}+(1+n^{-11})^{1/3}+1}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{1+n^{-11}}+1}{n^{-2}}\right)^5 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1+n^{-11}}+1\right)^5}{\left((1+n^{-11})^{2/3}+(1+n^{-11})^{1/3}+1\right)^2} \cdot \frac{n^{-10}}{n^{-10}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1+n^{-11}}+1\right)^5}{\left((1+n^{-11})^{2/3}+(1+n^{-11})^{1/3}+1\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{1+0}+1\right)^5}{\left((1+0)^{2/3}+(1+0)^{1/3}+1\right)^2} = \frac{2^5}{3^2} = \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 32/9.

226. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{12}+n}-n^6}{\left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\sqrt{n^{12}+n}-n^6}{\left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)^k}&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n}{\sqrt{n^{12}+n}+n^6}\cdot\left(\frac{\sqrt{n^4+n}+n^2}{n}\right)^k=\\ &=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n^{-5}}{\sqrt{1+n^{-11}}+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+n^{-3}}+1}{n^{-1}}\right)^k=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-3}}+1\right)^k}{\sqrt{1+n^{-11}}+1}\cdot\frac{n^{-5}}{n^{-k}}=\\ &=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-3}}+1\right)^k}{\sqrt{1+n^{-11}}+1}\cdot n^{k-5}=\frac{2^k}{2}=2^{k-1}, \end{aligned}$$

o ile $k-5=0$, czyli $k=5$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 16 dla $k=5$.

227! Wskaż liczbę naturalną k , dla której granica

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\sqrt{n^{14}+9n^9+1}-n^7}{n^k}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy występujące pod znakiem granicy wyrażenie w postaci niezawierającej w liczniku różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości, a następnie dzielimy licznik i mianownik przez n^9 :

$$\begin{aligned} \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\sqrt{n^{14}+9n^9+1}-n^7}{n^k}&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{9n^9+1}{n^k\cdot\left(\sqrt{n^{14}+9n^9+1}+n^7\right)}=\\ &=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{9+n^{-9}}{n^{k-2}\cdot\left(\sqrt{1+9n^{-5}+n^{-14}}+1\right)}. \end{aligned}$$

Dla $k=2$ otrzymujemy

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{9+n^{-9}}{\sqrt{1+9n^{-5}+n^{-14}}+1}=\frac{9+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{9}{2}.$$

Odpowiedź: Przy $k=2$ granica jest równa $9/2$.

Uwaga: Liczba $k=2$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania. Jednak zgodnie z poleceniem wystarczyło wskazać k , bez konieczności uzasadnienia, że takie k jest tylko jedno.

228. Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt{n^{666}+1}-n^{333}\right)\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów w postaci $a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$ przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt{n^{666}+1}-n^{333}\right)\right)&=\lim_{n\rightarrow\infty}\left(n^k\cdot\frac{1}{\sqrt{n^{666}+1}+n^{333}}\right)=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n^k}{\sqrt{n^{666}+1}+n^{333}}=\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n^k}{n^{333}\cdot\left(\sqrt{1+n^{-666}}+1\right)}=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n^{k-333}}{\sqrt{1+n^{-666}}+1}.\end{aligned}$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 2 przy n dążącym do nieskończoności, natomiast licznik jest równy 1, gdy $k=333$. Dla $k=333$ mamy więc

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n^{k-333}}{\sqrt{1+n^{-666}}+1}=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^{-666}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Dla $k=333$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/2$.

229. Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}-n^{222}\right)\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}$$

przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}-n^{222}\right)\right)&=\lim_{n\rightarrow\infty}\left(n^k\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}+n^{222}\right)\cdot\left(\sqrt{n^{888}+1}+n^{444}\right)}\right)=\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n^k}{\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}+n^{222}\right)\cdot\left(\sqrt{n^{888}+1}+n^{444}\right)}=\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n^k}{n^{666}\cdot\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}=\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n^{k-666}}{\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}.\end{aligned}$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 4 przy n dążącym do nieskończoności, natomiast licznik jest równy 1, gdy $k=666$. Dla $k=666$ mamy więc

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n^{k-666}}{\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}=\frac{1}{4}.$$

Odpowiedź: Dla $k=666$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/4$.

230! Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której granica
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^{666} + n^k} - n^{222} \right)$$
 istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów w postaci
$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$
 przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^{666} + n^k} - n^{222} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(n^{666} + n^k)^{2/3} + n^{222} \cdot (n^{666} + n^k)^{1/3} + n^{444}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-444}}{(1 + n^{k-666})^{2/3} + (1 + n^{k-666})^{1/3} + 1} . \end{aligned}$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 3 przy n dążącym do nieskończoności (o ile $k < 666$), natomiast licznik jest równy 1, gdy $k = 444$. Dla $k = 444$ mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-444}}{(1 + n^{k-666})^{2/3} + (1 + n^{k-666})^{1/3} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + n^{-222})^{2/3} + (1 + n^{-222})^{1/3} + 1} = \frac{1}{3} .$$

Odpowiedź: Dla $k = 444$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/3$.

231! Oblicz granicę
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + 6n^3} - n^2 - 3n \right) .$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów w postaci
$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$
 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + 6n^3} - n^2 - 3n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + 6n^3} - (n^2 + 3n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 6n^3 - (n^2 + 3n)^2}{\sqrt{n^4 + 6n^3} + n^2 + 3n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 6n^3 - n^4 - 6n^3 - 9n^2}{\sqrt{n^4 + 6n^3} + n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9n^2}{\sqrt{n^4 + 6n^3} + n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9}{\sqrt{1 + \frac{6}{n}} + 1 + \frac{3}{n}} = -\frac{9}{2} . \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość $-9/2$.

232! Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^{24} + n^{11}} - n^6}{\left(\sqrt{n^{24} + n^{11}} - n^{12}\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Stosując na poziomie mianownika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\; ,$$

a na poziomie licznika wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)\cdot (a+b)}\; ,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^{24} + n^{11}} - n^6}{\left(\sqrt{n^{24} + n^{11}} - n^{12}\right)^k} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{11}}{\left(\sqrt{n^{24} + n^{11}} + n^{12}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{n^{24} + n^{11}} + n^6\right)} \cdot \left(\frac{\sqrt{n^{24} + n^{11}} + n^{12}}{n^{11}}\right)^k = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-7}}{\left(\sqrt{1 + n^{-13}} + 1\right) \cdot \left(\sqrt[4]{1 + n^{-13}} + 1\right)} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + n^{-13}} + 1}{n^{-1}}\right)^k = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1 + n^{-13}} + 1\right)^k}{\left(\sqrt{1 + n^{-13}} + 1\right) \cdot \left(\sqrt[4]{1 + n^{-13}} + 1\right)} \cdot \frac{n^{-7}}{n^{-k}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1 + n^{-13}} + 1\right)^k}{\left(\sqrt{1 + n^{-13}} + 1\right) \cdot \left(\sqrt[4]{1 + n^{-13}} + 1\right)} \cdot n^{k-7} = \frac{2^k}{2 \cdot 2} = 2^{k-2}\; , \end{aligned}$$

o ile $k-7=0$, czyli $k=7$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 32 dla $k=7$.

233! Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k . Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{n}{3} \right) = 1/6 \quad \text{dla} \quad k = -3$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{n+4}{n} \right) = 1/24 \quad \text{dla} \quad k = -4$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n}{4} \right) = 2/3 \quad \text{dla} \quad k = -4$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n+2}{5} \right) = 4/15 \quad \text{dla} \quad k = -5$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n+2020}{6} \right) = 4/45 \quad \text{dla} \quad k = -6$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{2}}{2} \right) = 1/8 \quad \text{dla} \quad k = -4$
- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{2} \right) = 2 \quad \text{dla} \quad k = -4$
- h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{2}}{3} \right) = 1/48 \quad \text{dla} \quad k = -6$
- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{3} \right) = 4/3 \quad \text{dla} \quad k = -6$
- j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{3}}{2} \right) = 1/72 \quad \text{dla} \quad k = -6$
- k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{4} \right) = 2/3 \quad \text{dla} \quad k = -8$
- l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{4}}{3} \right) = 4/81 \quad \text{dla} \quad k = -12$

237! Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall_{\varepsilon \geq 1} \exists_N \forall_{n \geq N} |a_n - 1| \leq \varepsilon .$$

Czy stąd wynika, że

- 237.1** ciąg (a_n) jest zbieżny **NIE**
- 237.2** ciąg (a_n) jest rozbieżny **NIE**
- 237.3** ciąg (a_n) jest ograniczony **TAK**
- 237.4** wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie **NIE**
- 237.5** wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne **NIE**
- 237.6** od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie **NIE**
- 237.7** od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne **TAK**
- 237.8** w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów dodatnich **NIE**
- 237.9** w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów nieujemnych **TAK**
- 237.10** w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz dodatni **NIE**
- 237.11** w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz nieujemny **TAK**
- 237.12** $\forall_n a_n > 0$ **NIE**
- 237.13** $\forall_n a_n \geq 0$ **NIE**
- 237.14** $\exists_N \forall_{n \geq N} a_n > 0$ **NIE**
- 237.15** $\exists_N \forall_{n \geq N} a_n \geq 0$ **TAK**
- 237.16** $\forall_N \exists_{n \geq N} a_n > 0$ **NIE**
- 237.17** $\forall_N \exists_{n \geq N} a_n \geq 0$ **TAK**
- 237.18** $\exists_n a_n > 0$ **NIE**
- 237.19** $\exists_n a_n \geq 0$ **TAK**

238. W każdym² z zadań **238.1–238.11** podaj granicę (lub granicę niewłaściwą) ciągu. Liczby wymierne podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

238.1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+4+8+\dots+2^k+\dots+64^n}{1+4+16+64+\dots+4^k+\dots+64^n} = 3/2$

238.2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+4+16+64+\dots+4^k+\dots+64^n}{1+8+64+512+\dots+8^k+\dots+64^n} = 7/6$

238.3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+4+8+\dots+2^k+\dots+64^n}{1+8+64+512+\dots+8^k+\dots+64^n} = 7/4$

238.4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+8+64+512+\dots+8^k+\dots+64^n}{1+64+4096+\dots+64^k+\dots+64^n} = 9/8$

238.5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+4+16+64+\dots+4^k+\dots+64^n}{1+64+4096+\dots+64^k+\dots+64^n} = 21/16$

238.6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3+9+27+\dots+3^k+\dots+9^n}{1+9+81+729+\dots+9^k+\dots+9^n} = 4/3$

238.7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+5+25+125+\dots+5^k+\dots+25^n}{1+25+625+\dots+25^k+\dots+25^n} = 6/5$

238.8. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3+9+27+\dots+3^k+\dots+27^n}{1+27+729+\dots+27^k+\dots+27^n} = 13/9$

238.9. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+5+25+125+\dots+5^k+\dots+125^n}{1+125+15625+\dots+125^k+\dots+125^n} = 31/25$

238.10. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+4+8+\dots+2^k+\dots+16^n}{1+16+256+\dots+16^k+\dots+16^n} = 15/8$

238.11. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3+9+27+\dots+3^k+\dots+81^n}{1+81+6561+\dots+81^k+\dots+81^n} = 40/27$

²Nie ma sensu rozwiązywać wszystkich 11 zadań, jeśli w którymś momencie uznasz, że już umiesz rozwiązywać tego typu zadania.