

Kolokwium nr 4: czwartek 20.11.2025, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 0–359.

Zadania do omówienia¹ na ćwiczeniach
w czwartek 6.11.2025, piątek 7.11.2025 i czwartek 13.11.2025.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

W pierwszej kolejności należy omówić zadania z wykrzyknikiem.

Twierdzenie o trzech ciągach.

246. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^3} + \frac{n}{n^3+1} + \frac{n}{n^3+2} + \frac{n}{n^3+3} + \frac{n}{n^3+4} + \frac{n}{n^3+5} + \frac{n}{n^3+6} + \dots + \frac{n}{(n+1)^3} \right).$$

247. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^5+1}{\sqrt{18n^{18}+1}} + \frac{5n^5+2}{\sqrt{18n^{18}+2}} + \frac{5n^5+3}{\sqrt{18n^{18}+3}} + \frac{5n^5+4}{\sqrt{18n^{18}+4}} + \dots + \frac{5n^5+4n^4}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}} \right).$$

248! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7-1}} + \frac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{49n^7+1}} + \frac{\sqrt{n^3+3}}{\sqrt{49n^7-1}} + \dots + \frac{\sqrt{n^3+k}}{\sqrt{49n^7+(-1)^k}} + \dots + \frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}} \right).$$

249. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}} + \frac{n^2+1}{\sqrt{(n^2+1)^3+1}} + \frac{n^2+2}{\sqrt{(n^2+2)^3+1}} + \frac{n^2+3}{\sqrt{(n^2+3)^3+1}} + \frac{n^2+4}{\sqrt{(n^2+4)^3+1}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}} + \dots + \frac{(n+3)^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}} \right).$$

250. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}} + \frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2}} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{(n^2+n)^2+2n^2}} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{\sqrt{(n^2+n)^2+3n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}} + \dots + \frac{\sqrt{(n+4)^2-4}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-2n^2}} + \frac{\sqrt{(n+4)^2-2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-n^2}} + \frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}} \right).$$

251! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+1-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+2-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+3-n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+k-n^2}} + \dots \right)$$

¹Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

$$\dots + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + n - 2} - n^2} + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + n - 1} - n^2} + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + n} - n^2} \Bigg).$$

252! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^2 + 4} + \sqrt[3]{n^2 + 8} + \sqrt[3]{n^2 + 12} + \sqrt[3]{n^2 + 16} + \sqrt[3]{n^2 + 20} + \dots + \sqrt[3]{(n+2)^2}}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^2 + 3} + \sqrt[3]{n^2 + 6} + \sqrt[3]{n^2 + 9} + \sqrt[3]{n^2 + 12} + \sqrt[3]{n^2 + 15} + \dots + \sqrt[3]{(n+3)^2}}.$$

253! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^7 + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^7 + 4} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 3}}{n^7 + 9} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 4}}{n^7 + 16} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 5}}{n^7 + 25} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + n^6} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

254! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^p + 1}{\sqrt{900n^{900} + 1}} + \frac{n^p + 8}{\sqrt{900n^{900} + 32}} + \dots + \frac{n^p + k^3}{\sqrt{900n^{900} + k^5}} + \dots + \frac{n^p + 8n^{18}}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru p , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

255. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 1}}{n^{13} + 1} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 2}}{n^{13} + 4} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 3}}{n^{13} + 9} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 4}}{n^{13} + 16} + \dots + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + n^4}}{n^{13} + n^8} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

256. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^{13} + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^{13} + 2} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 3}}{n^{13} + 3} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 4}}{n^{13} + 4} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^5}}{n^{13} + n^5} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

257! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4}{n^k + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^k + n^4 + 1} + \frac{n^4 + 2}{n^k + n^4 + 2} + \frac{n^4 + 3}{n^k + n^4 + 3} + \frac{n^4 + 4}{n^k + n^4 + 4} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^k + (n+1)^4} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

258! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{\sqrt{n^p + k}}{n^7 + k^2}$$

dobierając tak wartość parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

259! a) Dobrać takie liczby całkowite $A > 0$ i $B > 1$, aby zadanie **b)** miało sens.

b) Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2} + \frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+1)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+4} + \frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+1)^2+6} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-4} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla A i B dobranych w zadaniu **a)**.

260. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+3)^2} + \frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+3)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+3)^2+4} + \frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+3)^2+6} + \frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+3)^2+8} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-6} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-4} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 3$, aby zadanie miało sens.

261! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+B)^2} + \frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+B)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+B)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+B)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+12}}{(n+B)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+B)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-9}}{(n+6)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+6)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+6)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+6)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B < 6$, aby zadanie miało sens.

262! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2}} + \frac{n^2+5}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+2}} + \frac{n^2+10}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+4}} + \frac{n^2+15}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+6}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{n^2+5k}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+2k}} + \dots + \frac{(n+10)^2-10}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2-4}} + \frac{(n+10)^2-5}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2-2}} + \frac{(n+10)^2}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2}} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych dodatnich $A < B$, aby zadanie miało sens.

263. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2} + \frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+1)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+1)^2+6} + \frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+1)^2+9} + \frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+1)^2+12} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-9} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-6} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 1$, aby zadanie miało sens.

264. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+2)^2} + \frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+2)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{(n+2)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+2)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+8}}{(n+2)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-4}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-2}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 2$, aby zadanie miało sens.

265. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+A)^2} + \frac{\sqrt{n^2+7}}{(n+A)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+14}}{(n+A)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+21}}{(n+A)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+28}}{(n+A)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+7)^2-21}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-14}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-7}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A < B$, aby zadanie miało sens.

266! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}} + \frac{n+2}{\sqrt{n^4+n+2}} + \frac{n+3}{\sqrt{n^4+n+3}} + \dots + \frac{9n}{\sqrt{n^4+9n}} \right).$$

267! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n}{\sqrt{4n^4+4n}} + \frac{4n+3}{\sqrt{4n^4+4n+3}} + \frac{4n+6}{\sqrt{4n^4+4n+6}} + \frac{4n+9}{\sqrt{4n^4+4n+9}} + \frac{4n+12}{\sqrt{4n^4+4n+12}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{13n-9}{\sqrt{4n^4+13n-9}} + \frac{13n-6}{\sqrt{4n^4+13n-6}} + \frac{13n-3}{\sqrt{4n^4+13n-3}} + \frac{13n}{\sqrt{4n^4+13n}} \right).$$

268! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n}{3^n+1} + \frac{3^{n-1} \cdot 2}{3^n+2} + \frac{3^{n-2} \cdot 4}{3^n+4} + \frac{3^{n-3} \cdot 8}{3^n+8} + \dots + \frac{9 \cdot 2^{n-2}}{3^n+2^{n-2}} + \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{3^n+2^{n-1}} + \frac{2^n}{3^n+2^n} \right).$$

269! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}} + \frac{2^{n-1} \cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1} \cdot 7}} + \frac{2^{n-2} \cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2} \cdot 7^2}} + \dots + \frac{2^{n-k} \cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k} \cdot 7^k}} + \dots + \frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}} \right).$$

270! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt{n^6+1}} + \frac{(n+2)^2}{\sqrt{n^6+2}} + \frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+3}} + \dots + \frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{\sqrt{n^6+n-1}} + \frac{(2n)^2}{\sqrt{n^6+n}} \right).$$

Wskazówka-przypomnienie: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

271! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n + 1}} + \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n + 3}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n + 9}} + \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n + 27}} + \dots + \frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n + 3^{n-1}}} + \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n + 3^n}} \right).$$

272! Obliczyć granicę ciągu zaczynającego się od wyrazu o indeksie 7:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k + 7}} + \frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k + 8}} + \frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k + 9}} + \frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k + 10}} + \dots + \frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k + n-1}} + \frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k + n}} \right)$$

dla tak dobranej wartości naturalnej parametru k , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Rozumienie i analizowanie wybranych napisów matematycznych.

Zapisz podany zbiór używając przedziałów, zbioru liczb wymiernych oraz działań na zbiorach. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ jest zbiorem liczb naturalnych.

273. $\{x^2 : x \in (-2, 1]\}$

275. $\{x^2 + y^3 : x, y \in (-2, 1]\}$

277. $\{xy : x, y \in (-2, 1]\}$

279. $\{\sqrt{(x-5)^2} : x \in (2, 7]\}$

281. $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 \geq 2n^2\}$

283. $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^3 \leq 5n^3\}$

285. $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8n^2 \leq m^2 \leq 9n^2\}$

287. $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^n \leq 2^m \leq 4^n\}$
274. $\{x^3 : x \in (-2, 1]\}$

276. $\{x^3 + y^4 : x, y \in (-2, 1]\}$

278. $\{xy^2 : x, y \in (-2, 1]\}$

280. $\{\sqrt[3]{(x-5)^3} : x \in (2, 7]\}$

282. $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 \geq 4n^2\}$

284. $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^3 \leq 8n^3\}$

286. $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8n^3 \leq m^3 \leq 9n^3\}$

288. $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^n \leq 4^m \leq 9^n\}$

Kresy zbiorów.

W każdym z poniższych zadań podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być podane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

289. $Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 60} : n \in \mathbb{N} \right\}$
290. $Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 70} : n \in \mathbb{N} \right\}$
291. $Z = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\}$

²Nie ma sensu rozwiązywać wszystkich zadań, możesz pominąć zadania podobne do wcześniejszych.

$$292. Z = \left\{ \sqrt{25n^2 - 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$293. Z = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} + \sqrt{25n^2 - 24n} - 10n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$294. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16n^2 \leq 9m^2 \leq 25n^2 \right\}$$

$$295. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16n^2 \leq 2m^2 \leq 32n^2 \right\}$$

$$296. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3n^2 \leq m^2 \leq 4n^2 \right\}$$

$$297. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4m^2 \leq n^2 \leq 5m^2 \right\}$$

$$298. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^n \leq 2^m \leq 4^n \right\}$$

$$299. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^m \leq 2^n \leq 5^m \right\}$$

$$300. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 27^{n^2} \right\}$$

$$301. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 32^{n^2} \right\}$$

$$302. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 9^{m^2} \leq 25^{n^2} \right\}$$

$$303. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^n \cdot n^m \leq m^m \leq 27^n \cdot n^m \right\}$$

$$304. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{24n} \cdot n^m \leq m^m \leq 3^{18n} \cdot n^m \right\}$$

$$305. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{8n} \cdot n^m \leq m^m \leq 2^{160n} \cdot n^m \right\}$$

$$306. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{64n} \cdot n^m \leq m^m \leq 3^{81n} \cdot n^m \right\}$$

$$307. Z = \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{5} \right)^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$308. Z = \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{5} \right)^3 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$309. Z = \left\{ \left(-\frac{1}{n} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$310. Z = \left\{ \left(-\frac{1}{n} \right)^{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbf{311.} \quad Z = \left\{ \left(-\frac{1}{n} \right)^{n^2+n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbf{312.} \quad Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 370} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbf{313.} \quad Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 390} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbf{314.} \quad Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 410} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbf{315.} \quad Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 430} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbf{316.} \quad Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^2 \leq m^2 \leq 27n^2 \right\}$$

$$\mathbf{317.} \quad Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$$

$$\mathbf{318.} \quad Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^n \leq 8^m \leq 27^n \right\}$$

$$\mathbf{319.} \quad Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^n \leq 9^m \leq 27^n \right\}$$

$$\mathbf{320.} \quad Z = \left\{ (2 - \sqrt{3})^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbf{321.} \quad Z = \left\{ (2 - \sqrt{5})^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbf{322.} \quad Z = \left\{ \binom{50}{n} : n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 49, 50\} \right\}$$

$$\mathbf{323.} \quad Z = \left\{ \binom{50}{n} \cdot (-1)^n : n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 49, 50\} \right\}$$

$$\mathbf{324.} \quad Z = \left\{ \sqrt{x^2 + 2x + 1} : x \in (-5, 2) \right\}$$

$$\mathbf{325.} \quad Z = \left\{ \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} : x \in (-5, 2) \right\}$$

$$\mathbf{326.} \quad Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^3 \cdot n^{15} \leq m^{15} \leq 3^5 \cdot n^{15} \right\}$$

$$\mathbf{327.} \quad Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^2 \cdot n^{10} \leq m^{10} \leq 2^5 \cdot n^{10} \right\}$$

$$\mathbf{328.} \quad Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^2 \cdot n^6 \leq m^6 \leq 2^3 \cdot n^6 \right\}$$

$$\mathbf{329.} \quad Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 8^{mn} \right\}$$

$$\mathbf{330.} \quad Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 4^{mn} \right\}$$

$$331. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 81^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 11^{mn} \right\}$$

$$332. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 5^{mn} \right\}$$

$$333. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 32^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 3^{mn} \right\}$$

$$334. Z = \left\{ \frac{m^2}{n^2} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$$

$$335. Z = \left\{ \frac{m^2}{n^2} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^4 \leq m^4 \leq 49n^4 \right\}$$

$$336. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{18^2 \cdot n} \cdot n^m \leq m^m \leq 2^{2^{11} \cdot n} \cdot n^m \right\}$$

$$337. Z = \{\log_x 8 : x \in [2, +\infty)\}$$

$$338. Z = \{\log_x 32 : x \in (0, 1/2]\}$$

$$339. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$340. Z = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 + 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$341. Z = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 - 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$342. Z = \left\{ \left(\frac{-1}{3} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$343. Z = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{3^i} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$344. Z = \left\{ x^n : x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right) \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$345. Z = \{\log_2(2n-1) - \log_2 n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$346. Z = \left\{ \frac{(\log_2(n^2+1)) \cdot \log_3(n^2+4)}{(\log_8(n^2+4)) \cdot \log_9(n^2+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$347. Z = \left\{ \frac{1}{5^m - 11^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$348. Z = \left\{ \frac{mn}{m^2 + 4n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

349. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n - 1| < \frac{1}{n}.$$

W każdym z zadań **349.1-349.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

349.1. $\sup\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

349.2. $\inf\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

349.3. $\sup\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

349.4. $\inf\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

349.5. $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

349.6. $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

349.7. $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

349.8. $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

349.9. $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

349.10. $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

350. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \left| a_n - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

W każdym z zadań **350.1-350.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

350.1. $\sup\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

350.2. $\inf\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

350.3. $\sup\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

350.4. $\inf\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

350.5. $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

350.6. $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

350.7. $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

350.8. $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

350.9. $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

350.10. $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

351. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów **zbieżnych** (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n - 6| < \frac{n+1}{n}.$$

W każdym z zadań **351.1-351.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

- 351.1.** $\sup \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$
- 351.2.** $\inf \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$
- 351.3.** $\sup \{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$
- 351.4.** $\inf \{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$
- 351.5.** $\sup \{a_1 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$
- 351.6.** $\inf \{a_1 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$
- 351.7.** $\sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \dots\dots\dots$
- 351.8.** $\inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \dots\dots\dots$
- 351.9.** $\sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_1) : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \dots\dots\dots$
- 351.10.** $\inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_1) : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \dots\dots\dots$

352. W każdym z zadań **352.1-352.6** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru.
Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n - a_{n+1}| < \frac{1}{n}.$$

- 352.1.** $A = \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$
 $\inf A = \dots\dots\dots \sup A = \dots\dots\dots$
- 352.2.** $B = \{a_3 - a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$
 $\inf B = \dots\dots\dots \sup B = \dots\dots\dots$
- 352.3.** $C = \{a_4 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$
 $\inf C = \dots\dots\dots \sup C = \dots\dots\dots$
- 352.4.** $D = \{a_4 - a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$
 $\inf D = \dots\dots\dots \sup D = \dots\dots\dots$
- 352.5.** $E = \{(a_3 - a_1)^2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$
 $\inf E = \dots\dots\dots \sup E = \dots\dots\dots$
- 352.6.** $F = \{a_3^2 - a_1^2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$
 $\inf F = \dots\dots\dots \sup F = \dots\dots\dots$

353. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z = \left\{ \frac{mn}{4m^2 + 9n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

354. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$Z = \left\{ \frac{kmn}{8k^3 + 27m^3 + 125n^3} : k, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

355. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 5n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

356. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 5n + 10} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

357. Wyznaczyć (wraz z uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{5^m - 3^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

358. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{m^2 - 3n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

359. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{m^2 - 7n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$