

246. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^3} + \frac{n}{n^3+1} + \frac{n}{n^3+2} + \frac{n}{n^3+3} + \frac{n}{n^3+4} + \frac{n}{n^3+5} + \frac{n}{n^3+6} + \dots + \frac{n}{(n+1)^3} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n i zauważmy, że ma ona $3n^2+3n+2$ składników.

Zachodzą wówczas oszacowania od góry

$$b_n \leqslant (3n^2+3n+2) \cdot \frac{n}{n^3} = c_n$$

oraz od dołu

$$b_n \geqslant (3n^2+3n+2) \cdot \frac{n}{(n+1)^3} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+3n+2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right) = 3$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2+3n+2) \cdot n}{(n+1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} = 3,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3.$$

247. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^5+1}{\sqrt{18n^{18}+1}} + \frac{5n^5+2}{\sqrt{18n^{18}+2}} + \frac{5n^5+3}{\sqrt{18n^{18}+3}} + \frac{5n^5+4}{\sqrt{18n^{18}+4}} + \dots + \frac{5n^5+4n^4}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}} \right).$$

Rozwiązanie:

Dana pod znakiem granicy suma ma $4n^4$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n = \sum_{k=1}^{4n^4} \frac{5n^5+k}{\sqrt{18n^{18}+k}}.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{4n^4} \frac{5n^5+k}{\sqrt{18n^{18}+k}} \leqslant \sum_{k=1}^{4n^4} \frac{5n^5+4n^4}{\sqrt{18n^{18}+0}} = \frac{4n^4(5n^5+4n^4)}{3\sqrt{2} \cdot n^9} = c_n.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{4n^4} \frac{5n^5+k}{\sqrt{18n^{18}+k}} \geqslant \sum_{k=1}^{4n^4} \frac{5n^5+0}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}} = \frac{4n^4 \cdot 5n^5}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n^9}{\sqrt{18n^{18} + 4n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20}{\sqrt{18 + 4n^{-14}}} = \frac{20}{\sqrt{18}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 \cdot (5n^5 + 4n^4)}{3\sqrt{2} \cdot n^9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot (5 + 4n^{-1})}{3\sqrt{2}} = \frac{20}{3\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{3},$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica istnieje i jest równa $\frac{10\sqrt{2}}{3}$.

248! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7-1}} + \frac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{49n^7+1}} + \frac{\sqrt{n^3+3}}{\sqrt{49n^7-1}} + \dots + \frac{\sqrt{n^3+k}}{\sqrt{49n^7+(-1)^k}} + \dots + \frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}} \right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że ostatni składnik danej w zadaniu sumy można zapisać jako

$$\frac{\sqrt{n^3+3n^2+3n+1}}{\sqrt{49n^7-1}},$$

skąd wynika, że ma ona $3n^2+3n+1$ składników.

Oznaczmy sumę występującą w treści zadania przez b_n i oszacujemy ją od góry przez wspólne oszacowanie składników (liczniki od góry, mianowniki od dołu) przemnożone przez liczbę składników. Oznaczmy uzyskane oszacowanie przez c_n .

$$b_n \leq (3n^2+3n+1) \cdot \frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}} = c_n.$$

Postępując analogicznie oszacujemy daną sumę od dołu przez wspólne oszacowanie składników (liczniki od dołu, mianowniki od góry) przemnożone przez liczbę składników. Oznaczmy uzyskane oszacowanie przez a_n .

$$b_n \geq (3n^2+3n+1) \cdot \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7+1}} = a_n.$$

Obliczając granice ciągów (a_n) i (c_n) otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2+3n+1) \cdot \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (3+3n^{-1}+n^{-2}) \cdot \frac{\sqrt{1+n^{-3}}}{\sqrt{49+n^{-7}}} = \frac{3}{7}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2+3n+1) \cdot \frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (3+3n^{-1}+n^{-2}) \cdot \frac{\sqrt{(1+n^{-1})^3}}{\sqrt{49-n^{-7}}} = \frac{3}{7}.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{3}{7}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{7},$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{3}{7}.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa $\frac{3}{7}$.

249. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}} + \frac{n^2+1}{\sqrt{(n^2+1)^3+1}} + \frac{n^2+2}{\sqrt{(n^2+2)^3+1}} + \frac{n^2+3}{\sqrt{(n^2+3)^3+1}} + \frac{n^2+4}{\sqrt{(n^2+4)^3+1}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}} + \dots + \frac{(n+3)^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}} \right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $(n+3)^3 - n^2 + 1 = 6n + 10$ wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$(6n+10) \cdot \frac{n^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}} \leq \sum_{k=0}^{6n+9} \frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}} \leq (6n+10) \cdot \frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+1}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(6n+10) \cdot \frac{n^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}} = \left(6 + \frac{10}{n}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^6 + \frac{1}{n^6}}} \rightarrow 6$$

oraz

$$(6n+10) \cdot \frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+1}} = \left(6 + \frac{10}{n}\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^6}}} \rightarrow 6.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 6.

250. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}} + \frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2}} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{(n^2+n)^2+2n^2}} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{\sqrt{(n^2+n)^2+3n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}} + \dots + \frac{\sqrt{(n+4)^2-4}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-2n^2}} + \frac{\sqrt{(n+4)^2-2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-n^2}} + \frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}} \right).$$

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}} = \frac{\sqrt{n^2+8n+16}}{\sqrt{n^4+6n^3+9n^2}} = \frac{\sqrt{n^2+2\cdot(4n+8)}}{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+4n^3+8n^2}} = \frac{\sqrt{n^2+2\cdot(4n+8)}}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2\cdot(4n+8)}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{4n+8} \frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}}$$

i w konsekwencji ma $4n+9$ składników. Szacujemy ją obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n+9) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}} \leq \sum_{k=0}^{4n+8} \frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}} \leq (4n+9) \cdot \frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n+9) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}} = \frac{(4n+9) \cdot n}{n^2+3n} = \frac{4+\frac{9}{n}}{1+\frac{3}{n}} \rightarrow 4$$

oraz

$$(4n+9) \cdot \frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}} = \frac{(4n+9) \cdot (n+4)}{n^2+n} = \frac{\left(4+\frac{9}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{4}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}} \rightarrow 4.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

251! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+1-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+2-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+3-n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+k-n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-2-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-1-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-n^2}} \right).$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy wyrażenie pod znakiem granicy (uwzględniając, że jest to suma złożona z $n+1$ składników), a następnie przechodzimy z n do $+\infty$ w oszacowaniach dolnym i górnym:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+k-n^2}} = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{n^4+n^3+k+n^2}}{n^4+n^3+k-n^4} = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{n^4+n^3+k+n^2}}{n^3+k}, \\ \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{n^4+n^3+k+n^2}}{n^3+k} \geq (n+1) \cdot \frac{\sqrt{n^4+0+0+n^2}}{n^3+n} \rightarrow 2, \\ \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{n^4+n^3+k+n^2}}{n^3+k} \leq (n+1) \cdot \frac{\sqrt{n^4+n^3+n+n^2}}{n^3+0} \rightarrow 2.$$

Ponieważ oszacowania dolne i górne dążą do wspólnej granicy równej 2, na mocy twierdzenia o trzech ciągach dana w zadaniu granica istnieje i ma wartość 2.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 2.

252! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^2+4} + \sqrt[3]{n^2+8} + \sqrt[3]{n^2+12} + \sqrt[3]{n^2+16} + \sqrt[3]{n^2+20} + \dots + \sqrt[3]{(n+2)^2}}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^2+3} + \sqrt[3]{n^2+6} + \sqrt[3]{n^2+9} + \sqrt[3]{n^2+12} + \sqrt[3]{n^2+15} + \dots + \sqrt[3]{(n+3)^2}}.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez b_n wyrażenie znajdujące się pod znakiem granicy.

Suma w liczniku tego wyrażenia zapisuje się wzorem

$$\sum_{k=0}^{n+1} \sqrt[3]{n^2+4k},$$

ma więc $n+2$ składniki. Górny zakres sumowania ustaliliśmy z równości

$$n^2+4k=(n+2)^2=n^2+4n+4=n^2+4(n+1)$$

otrzymanej dla wyrażenia pod pierwiastkiem ostatniego składnika sumy.

Podobnie, suma w mianowniku wyrażenia b_n zapisuje się wzorem

$$\sum_{k=0}^{2n+3} \sqrt[3]{n^2+3k},$$

ma więc $2n+4$ składniki. Górny zakres sumowania ustaliliśmy z równości

$$n^2+3k=(n+3)^2=n^2+6n+9=n^2+3(2n+3)$$

otrzymanej dla wyrażenia pod pierwiastkiem ostatniego składnika sumy.

Szacowanie od góry daje

$$b_n \leqslant \frac{(n+2) \cdot \sqrt[3]{(n+2)^2}}{(2n+4) \cdot \sqrt[3]{n^2}} = \frac{\sqrt[3]{(n+2)^2}}{2 \cdot \sqrt[3]{n^2}} = c_n.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$b_n \geqslant \frac{(n+2) \cdot \sqrt[3]{n^2}}{(2n+4) \cdot \sqrt[3]{(n+3)^2}} = \frac{\sqrt[3]{n^2}}{2 \cdot \sqrt[3]{(n+3)^2}} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{2 \cdot \sqrt[3]{(n+3)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}} = \frac{1}{2}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{(n+2)^2}}{2 \cdot \sqrt[3]{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}}{2} = \frac{1}{2},$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica istnieje i jest równa $1/2$.

253! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^7 + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^7 + 4} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 3}}{n^7 + 9} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 4}}{n^7 + 16} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 5}}{n^7 + 25} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + n^6} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^3 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 0}}{n^7 + n^6} \leq \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^7 + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^7 + 4} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + n^6} \leq n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + 0},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego.

$$n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 0}}{n^7 + n^6} = \frac{\sqrt{k \cdot n^k}}{n^4 + n^3} = \frac{\sqrt{k \cdot n^{k/2}}}{n^4 + n^3} = \frac{\sqrt{k \cdot n^{k/2-4}}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \sqrt{k},$$

o ile $k/2 - 4 = 0$, czyli $k = 8$.

$$n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7} = \sqrt{k \cdot n^{k/2-4} + \frac{1}{n^5}} \rightarrow \sqrt{k},$$

o ile $k/2 - 4 = 0$, czyli $k = 8$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k = 8$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

254! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^p + 1}{\sqrt{900n^{900} + 1}} + \frac{n^p + 8}{\sqrt{900n^{900} + 32}} + \dots + \frac{n^p + k^3}{\sqrt{900n^{900} + k^5}} + \dots + \frac{n^p + 8n^{18}}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru p , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $2n^6$ składników. Szacujemy ją obustronnie:

$$2n^6 \cdot \frac{n^p + 0}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} \leq \sum_{k=1}^{2n^6} \frac{n^p + k^3}{\sqrt{900n^{900} + k^5}} \leq 2n^6 \cdot \frac{n^p + 8n^{18}}{\sqrt{900n^{900} + 0}} = 2n^6 \cdot \frac{n^p + 8n^{18}}{30n^{450}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego.

$$2n^6 \cdot \frac{n^p + 0}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} = \frac{2n^{p+6}}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} = \frac{2n^{p-444}}{\sqrt{900 + 32n^{-870}}} \rightarrow \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{900 + 0}} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15},$$

o ile $p - 444 = 0$, czyli $p = 444$.

$$2n^6 \cdot \frac{n^p + 8n^{18}}{30n^{450}} = \frac{2n^{p+6} + 16n^{24}}{30n^{450}} = \frac{2n^{p-444} + 16n^{-426}}{30} \rightarrow \frac{2 \cdot 1 + 0}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15},$$

o ile $p - 444 = 0$, czyli $p = 444$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $p = 444$ dana w zadaniu granica jest równa $1/15$.

255. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 1}}{n^{13} + 1} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 2}}{n^{13} + 4} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 3}}{n^{13} + 9} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 4}}{n^{13} + 16} + \dots + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + n^4}}{n^{13} + n^8} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^4 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^4 \cdot \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 0}}{n^{13} + n^8} \leq \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 1}}{n^{13} + 1} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 2}}{n^{13} + 4} + \dots + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + n^4}}{n^{13} + n^8} \leq n^4 \cdot \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + n^4}}{n^{13} + 0},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

$$n^4 \cdot \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 0}}{n^{13} + n^8} = \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k}}{n^9 + n^4} = \frac{\sqrt[3]{k} \cdot n^{k/3}}{n^9 + n^4} = \frac{\sqrt[3]{k} \cdot n^{k/3-9}}{1 + \frac{1}{n^5}} \rightarrow \sqrt[3]{k},$$

o ile $k/3 - 9 = 0$, czyli $k = 27$.

$$n^4 \cdot \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + n^4}}{n^{13}} = \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + n^4}}{n^9} = \sqrt[3]{k \cdot n^{k-27} + \frac{1}{n^{23}}} \rightarrow \sqrt[3]{k},$$

o ile $k - 27 = 0$, czyli $k = 27$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k = 27$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 3.

256. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^{13} + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^{13} + 2} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 3}}{n^{13} + 3} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 4}}{n^{13} + 4} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^5}}{n^{13} + n^5} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^5 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^5 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 0}}{n^{13} + n^5} \leq \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^{13} + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^{13} + 2} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^5}}{n^{13} + n^5} \leq n^5 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^5}}{n^{13} + 0},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

$$n^5 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 0}}{n^{13} + n^5} = \frac{\sqrt{k \cdot n^k}}{n^8 + 1} = \frac{\sqrt{k} \cdot n^{k/2}}{n^8 + 1} = \frac{\sqrt{k} \cdot n^{k/2-8}}{1 + \frac{1}{n^8}} \rightarrow \sqrt{k},$$

o ile $k/2 - 8 = 0$, czyli $k = 16$.

$$n^5 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^5}}{n^{13} + 0} = \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^5}}{n^8} = \sqrt{k \cdot n^{k-16} + \frac{1}{n^{11}}} \rightarrow \sqrt{k},$$

o ile $k - 16 = 0$, czyli $k = 16$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k = 16$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

257! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4}{n^k + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^k + n^4 + 1} + \frac{n^4 + 2}{n^k + n^4 + 2} + \frac{n^4 + 3}{n^k + n^4 + 3} + \frac{n^4 + 4}{n^k + n^4 + 4} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^k + (n+1)^4} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $(n+1)^4 - n^4 + 1 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 2$ składników. Szacujemy ją od góry przez iloczyn liczby składników i wspólnego gornego oszacowania składników:

$$\frac{n^4}{n^k + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^k + n^4 + 1} + \frac{n^4 + 2}{n^k + n^4 + 2} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^k + (n+1)^4} \leq (4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot \frac{(n+1)^4}{n^k + 0}$$

i analogicznie od dołu:

$$\frac{n^4}{n^k + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^k + n^4 + 1} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^k + (n+1)^4} \geq (4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot \frac{n^4}{n^k + (n+1)^4}.$$

Następnie kolejno obliczamy granice przy $n \rightarrow \infty$ oszacowań górnego i dolnego.

$$\frac{(4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot (n+1)^4}{n^k} = \frac{(4 + 6n^{-1} + 4n^{-2} + 2n^{-3}) \cdot (1 + n^{-1})^4}{n^{k-7}} \rightarrow 4,$$

o ile $k = 7$.

$$(4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot \frac{n^4}{n^k + (n+1)^4} = \frac{4 + 6n^{-1} + 4n^{-2} + 2n^{-3}}{n^{k-7} + (1 + n^{-1})^4 \cdot n^{-3}} \rightarrow 4,$$

o ile $k = 7$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k = 7$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

258! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{\sqrt{n^p + k}}{n^7 + k^2}$$

dobierając tak wartość parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n i zauważmy, że ma ona $n^3 - n^2 + 1$ składników.

Zachodzą wówczas oszacowania od góry

$$b_n \leq (n^3 - n^2 + 1) \cdot \frac{\sqrt{n^p + n^3}}{n^7 + n^4} = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^{p-8} + \frac{1}{n^5}}}{1 + \frac{1}{n^3}} = c_n$$

oraz od dołu

$$b_n \geq (n^3 - n^2 + 1) \cdot \frac{\sqrt{n^p + n^2}}{n^7 + n^6} = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^{p-8} + \frac{1}{n^6}}}{1 + \frac{1}{n}} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto dla $p=8$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \, ,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \, .$$

Odpowiedź: Dla $p=8$ wartość granicy jest równa 1.

259! a) Dobrać takie liczby całkowite $A > 0$ i $B > 1$, aby zadanie **b)** miało sens.

b) Obliczyć granicę ciągu

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bigg(& \frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2} + \frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+1)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+4} + \frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+1)^2+6} + \dots \\ & \dots + \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-4} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \bigg) \end{aligned}$$

dla A i B dobranych w zadaniu **a)**.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} = \frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2} = \frac{\sqrt{n^2+3 \cdot \frac{2An+A^2}{3}}}{n^2+2n+1+2 \cdot \frac{2(B-1)n+B^2-1}{2}} \, ,$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k} \, , \tag{1}$$

gdzie

$$N(n) = \frac{2An+A^2}{3} = \frac{2(B-1)n+B^2-1}{2} \, , \tag{2}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (2) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B , aby prawe równanie (2) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (2An+A^2) &= 3 \cdot (2(B-1)n+B^2-1) \, , \\ 4An+2A^2 &= 6(B-1)n+3(B^2-1) \, . \end{aligned} \tag{3}$$

Aby równość (3) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4A &= 6(B-1) \\ 2A^2 &= 3(B^2-1) \end{cases} \\ \begin{cases} 2A &= 3(B-1) \\ 2A^2 &= 3(B-1)(B+1) \end{cases} \end{aligned}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy $A = B + 1$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$2B + 2 = 3B - 3,$$

skąd $B = 5$ i $A = 6$. Wstawiając te wartości do równości (2) otrzymujemy

$$N(n) = 4n + 12.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $4n + 13$ składników.

Przystępując do rozwiązywania właściwej części zadania szacujemy sumę (1) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n + 13) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n + 5)^2} \leq \sum_{k=0}^{4n+12} \frac{\sqrt{n^2 + 3k}}{(n + 1)^2 + 2k} \leq (4n + 13) \cdot \frac{\sqrt{(n + 6)^2}}{(n + 1)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n + 13) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n + 5)^2} = \frac{(4n + 13) \cdot n}{(n + 5)^2} = \frac{4 + \frac{13}{n}}{\left(1 + \frac{5}{n}\right)^2} \rightarrow 4$$

oraz

$$(4n + 13) \cdot \frac{\sqrt{(n + 6)^2}}{(n + 1)^2} = \frac{(4n + 13) \cdot (n + 6)}{(n + 1)^2} = \frac{\left(4 + \frac{13}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{6}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \rightarrow 4.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A = 6$, $B = 5$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 4.

260. Obliczyć granicę

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} & \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n + 3)^2} + \frac{\sqrt{n^2 + 5}}{(n + 3)^2 + 2} + \frac{\sqrt{n^2 + 10}}{(n + 3)^2 + 4} + \frac{\sqrt{n^2 + 15}}{(n + 3)^2 + 6} + \frac{\sqrt{n^2 + 20}}{(n + 3)^2 + 8} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2 + 5k}}{(n + 3)^2 + 2k} + \dots + \frac{\sqrt{(n + A)^2 - 15}}{(n + B)^2 - 6} + \frac{\sqrt{(n + A)^2 - 10}}{(n + B)^2 - 4} + \frac{\sqrt{(n + A)^2 - 5}}{(n + B)^2 - 2} + \frac{\sqrt{(n + A)^2}}{(n + B)^2} \right) \end{aligned}$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 3$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(n + A)^2}}{(n + B)^2} &= \frac{\sqrt{n^2 + 2An + A^2}}{n^2 + 2Bn + B^2} = \frac{\sqrt{n^2 + 5 \cdot \frac{2An + A^2}{5}}}{n^2 + 6n + 9 + 2(B - 3)n + B^2 - 9} = \\ &= \frac{\sqrt{n^2 + 5 \cdot \frac{2An + A^2}{5}}}{(n + 3)^2 + 2 \cdot \left((B - 3)n + \frac{B^2 - 9}{2}\right)}, \end{aligned}$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k}, \tag{4}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{2An+A^2}{5}=(B-3)n+\frac{B^2-9}{2}, \tag{5}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (5) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B , aby prawe równanie (5) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$\begin{aligned} 2\cdot(2An+A^2)&=5\cdot(2(B-3)n+B^2-9), \\ 4An+2A^2&=10(B-3)n+5(B^2-9). \end{aligned} \tag{6}$$

Aby równość (6) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4A &= 10(B-3) \\ 2A^2 &= 5(B^2-9) \end{cases} \\ \begin{cases} 2A &= 5(B-3) \\ 2A^2 &= 5(B-3)(B+3) \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

Dzieląc drugie równanie układu (7) przez pierwsze (w którym zgodnie z założonymi nierównościami $A > 0$ i $B > 3$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy $A = B + 3$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$2B+6=5B-15,$$

skąd $B = 7$ i $A = 10$. Wstawiając te wartości do równości (5) otrzymujemy

$$N(n)=4n+20.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $4n+21$ składników.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (4) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n+21)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+7)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{4n+21} \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k} \leqslant (4n+21)\cdot\frac{\sqrt{(n+10)^2}}{(n+3)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n+21)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+7)^2}=\frac{(4n+21)\cdot n}{(n+7)^2}=\frac{4+\frac{21}{n}}{\left(1+\frac{7}{n}\right)^2}\rightarrow 4$$

oraz

$$(4n+21)\cdot\frac{\sqrt{(n+10)^2}}{(n+3)^2}=\frac{(4n+21)\cdot(n+10)}{(n+3)^2}=\frac{\left(4+\frac{21}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{10}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}\rightarrow 4.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A = 10$, $B = 7$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 4.

261! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+B)^2} + \frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+B)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+B)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+B)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+12}}{(n+B)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+B)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-9}}{(n+6)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+6)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+6)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+6)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B < 6$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+6)^2} = \frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+12n+36} = \frac{\sqrt{n^2+3 \cdot \frac{2An+A^2}{3}}}{n^2+2Bn+B^2+(2(6-B)n+36-B^2)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+B)^2+k}, \tag{8}$$

gdzie

$$N(n) = \frac{2An+A^2}{3} = 2(6-B)n+36-B^2, \tag{9}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (9) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B , aby prawe równanie (9) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$\begin{aligned} 2An+A^2 &= 3 \cdot (2(6-B)n+36-B^2), \\ 2An+A^2 &= 6(6-B)n+3(36-B^2). \end{aligned} \tag{10}$$

Aby równość (10) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2A &= 6(6-B) \\ A^2 &= 3(36-B^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} A &= 3(6-B) \\ A^2 &= 3(6-B)(6+B) \end{cases}$$

Dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze¹ otrzymujemy $A = 6 + B$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$6+B=18-3B,$$

¹Z warunków podanych w treści zadania $A > 0$ i $B < 6$, skąd wynika, że obie strony pierwszego równania są dodatnie, a więc niezerowe.

skąd $B = 3$ i $A = 9$. Wstawiając te wartości do równości (9) otrzymujemy

$$N(n) = 6n + 27.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $6n + 28$ składników.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (8) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(6n + 28) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n + 6)^2} \leq \sum_{k=0}^{6n+27} \frac{\sqrt{n^2 + 3k}}{(n + 3)^2 + k} \leq (6n + 28) \cdot \frac{\sqrt{(n + 9)^2}}{(n + 3)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(6n + 28) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n + 6)^2} = \frac{(6n + 28) \cdot n}{(n + 6)^2} = \frac{6 + \frac{28}{n}}{\left(1 + \frac{6}{n}\right)^2} \rightarrow 6$$

oraz

$$(6n + 28) \cdot \frac{\sqrt{(n + 9)^2}}{(n + 3)^2} = \frac{(6n + 28) \cdot (n + 9)}{(n + 3)^2} = \frac{\left(6 + \frac{28}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{9}{n}\right)}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2} \rightarrow 6.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 6.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A = 9$, $B = 3$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 6.

262! Obliczyć granicę

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} & \left(\frac{n^2}{n^2 \cdot \sqrt{(n + A)^2}} + \frac{n^2 + 5}{n^2 \cdot \sqrt{(n + A)^2 + 2}} + \frac{n^2 + 10}{n^2 \cdot \sqrt{(n + A)^2 + 4}} + \frac{n^2 + 15}{n^2 \cdot \sqrt{(n + A)^2 + 6}} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \frac{n^2 + 5k}{n^2 \cdot \sqrt{(n + A)^2 + 2k}} + \dots + \frac{(n + 10)^2 - 10}{n^2 \cdot \sqrt{(n + B)^2 - 4}} + \frac{(n + 10)^2 - 5}{n^2 \cdot \sqrt{(n + B)^2 - 2}} + \frac{(n + 10)^2}{n^2 \cdot \sqrt{(n + B)^2}} \right) \end{aligned}$$

dla tak dobranych liczb całkowitych dodatnich $A < B$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\begin{aligned} \frac{(n + 10)^2}{n^2 \cdot \sqrt{(n + B)^2}} &= \frac{n^2 + 20n + 100}{n^2 \cdot \sqrt{n^2 + 2Bn + B^2}} = \frac{n^2 + 5 \cdot (4n + 20)}{n^2 \cdot \sqrt{n^2 + 2An + A^2 + 2(B - A)n + B^2 - A^2}} = \\ &= \frac{n^2 + 5 \cdot (4n + 20)}{n^2 \cdot \sqrt{(n + A)^2 + 2 \cdot \left((B - A)n + \frac{B^2 - A^2}{2}\right)}}, \end{aligned}$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{n^2 + 5k}{n^2 \cdot \sqrt{(n + A)^2 + 2k}}, \tag{11}$$

gdzie

$$N(n) = 4n + 20 = (B - A)n + \frac{B^2 - A^2}{2}, \tag{12}$$

i w konsekwencji ma $N(n) + 1 = 4n + 21$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (12) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B , aby prawe równanie (12) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$\begin{aligned} 4n + 20 &= (B - A)n + \frac{B^2 - A^2}{2}, \\ 8n + 40 &= 2(B - A)n + B^2 - A^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Aby równość (13) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 8 &= 2(B - A) \\ 40 &= B^2 - A^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 4 &= B - A \\ 40 &= (B - A)(B + A) \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

Dzieląc drugie równanie układu (14) przez pierwsze (w którym zgodnie z założoną nierównością $A < B$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy

$$10 = B + A,$$

skąd $A = 3$ i $B = 7$.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (11) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n + 21) \cdot \frac{n^2}{n^2 \cdot (n + 7)} \leq \sum_{k=0}^{4n+20} \frac{n^2 + 5k}{n^2 \cdot \sqrt{(n + 3)^2 + 2k}} \leq (4n + 21) \cdot \frac{(n + 10)^2}{n^2 \cdot (n + 3)},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n + 21) \cdot \frac{n^2}{n^2 \cdot (n + 7)} = \frac{4 + \frac{21}{n}}{1 + \frac{7}{n}} \rightarrow 4$$

oraz

$$(4n + 21) \cdot \frac{(n + 10)^2}{n^2 \cdot (n + 3)} = \frac{\left(4 + \frac{21}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{10}{n}\right)^2}{1 + \frac{3}{n}} \rightarrow 4.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A = 3$, $B = 7$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 4.

263. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2} + \frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+1)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+1)^2+6} + \frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+1)^2+9} + \frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+1)^2+12} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-9} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-6} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 1$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} = \frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2} = \frac{\sqrt{n^2+5 \cdot \frac{2An+A^2}{5}}}{n^2+2n+1+2(B-1)n+B^2-1} = \\ = \frac{\sqrt{n^2+5 \cdot \frac{2An+A^2}{5}}}{(n+1)^2+3 \cdot \frac{2(B-1)n+B^2-1}{3}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k}, \tag{15}$$

gdzie

$$N(n) = \frac{2An+A^2}{5} = \frac{2(B-1)n+B^2-1}{3}, \tag{16}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (16) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B , aby prawe równanie (16) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$3 \cdot (2An+A^2) = 5 \cdot (2(B-1)n+B^2-1), \\ 6An+3A^2 = 10(B-1)n+5(B^2-1). \tag{17}$$

Aby równość (17) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 6A &= 10(B-1) \\ 3A^2 &= 5(B^2-1) \end{cases} \\ \begin{cases} 3A &= 5(B-1) \\ 3A^2 &= 5(B-1)(B+1) \end{cases} \tag{18}$$

Dzieląc drugie równanie układu (18) przez pierwsze (w którym zgodnie z założonymi nierównościami $A > 0$ i $B > 1$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy $A = B + 1$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$3B+3=5B-5,$$

skąd $B = 4$ i $A = 5$. Wstawiając te wartości do równości (16) otrzymujemy

$$N(n) = 2n + 5.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $2n+6$ składników.

Przystępując do rozwiązywania głównej części zadania szacujemy sumę (15) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(2n+6) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2} \leq \sum_{k=0}^{2n+5} \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k} \leq (2n+6) \cdot \frac{\sqrt{(n+5)^2}}{(n+1)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(2n+6) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2} = \frac{(2n+6) \cdot n}{(n+4)^2} = \frac{2+\frac{6}{n}}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^2} \rightarrow 2$$

oraz

$$(2n+6) \cdot \frac{\sqrt{(n+5)^2}}{(n+1)^2} = \frac{(2n+6) \cdot (n+5)}{(n+1)^2} = \frac{\left(2+\frac{6}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{5}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \rightarrow 2.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 2.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=5$, $B=4$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 2.

264. Obliczyć granicę

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} & \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+2)^2} + \frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+2)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{(n+2)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+2)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+8}}{(n+2)^2+4} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-4}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-2}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right) \end{aligned}$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 2$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} &= \frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2} = \frac{\sqrt{n^2+2 \cdot \frac{2An+A^2}{2}}}{n^2+4n+4+2(B-2)n+B^2-4} = \\ &= \frac{\sqrt{n^2+2 \cdot \frac{2An+A^2}{2}}}{(n+2)^2+2(B-2)n+B^2-4}, \end{aligned}$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k}, \tag{19}$$

gdzie

$$N(n) = \frac{2An+A^2}{2} = 2(B-2)n+B^2-4, \tag{20}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (20) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B , aby prawe równanie (20) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$\begin{aligned} 2An + A^2 &= 2 \cdot (2(B - 2)n + B^2 - 4) \, , \\ 2An + A^2 &= 4(B - 2)n + 2B^2 - 8 \, . \end{aligned} \tag{21}$$

Aby równość (21) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2A &= 4(B - 2) \\ A^2 &= 2B^2 - 8 \end{cases} \\ \begin{cases} A &= 2(B - 2) \\ A^2 &= 2(B - 2)(B + 2) \end{cases} \end{aligned} \tag{22}$$

Dzieląc drugie równanie układu (22) przez pierwsze (w którym zgodnie z założonymi nierównościami $A > 0$ i $B > 2$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy $A = B + 2$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$B + 2 = 2B - 4 \, ,$$

skąd $B = 6$ i $A = 8$. Wstawiając te wartości do równości (20) otrzymujemy

$$N(n) = 8n + 32 \, .$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $8n + 33$ składniki.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (19) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(8n + 33) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n + 6)^2} \leq \sum_{k=0}^{8n+32} \frac{\sqrt{n^2 + 2k}}{(n + 2)^2 + k} \leq (8n + 33) \cdot \frac{\sqrt{(n + 8)^2}}{(n + 2)^2} \, ,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(8n + 33) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n + 6)^2} = \frac{(8n + 33) \cdot n}{(n + 6)^2} = \frac{8 + \frac{33}{n}}{\left(1 + \frac{6}{n}\right)^2} \rightarrow 8$$

oraz

$$(8n + 33) \cdot \frac{\sqrt{(n + 8)^2}}{(n + 2)^2} = \frac{(8n + 33) \cdot (n + 8)}{(n + 2)^2} = \frac{\left(8 + \frac{33}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{8}{n}\right)}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2} \rightarrow 8 \, .$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 8.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A = 8$, $B = 6$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 8.

265. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n + A)^2} + \frac{\sqrt{n^2 + 7}}{(n + A)^2 + 1} + \frac{\sqrt{n^2 + 14}}{(n + A)^2 + 2} + \frac{\sqrt{n^2 + 21}}{(n + A)^2 + 3} + \frac{\sqrt{n^2 + 28}}{(n + A)^2 + 4} + \dots \right)$$

$$\dots + \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+7)^2-21}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-14}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-7}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2} \Big)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A < B$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2} = \frac{\sqrt{n^2+14n+49}}{n^2+2Bn+B^2} = \frac{\sqrt{n^2+7\cdot(2n+7)}}{n^2+2An+A^2+(2(B-A)n+B^2-A^2)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k}, \tag{23}$$

gdzie

$$N(n) = 2n+7 = 2(B-A)n+B^2-A^2, \tag{24}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1=2n+8$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (24) muszą być równe.

Aby prawa równość (24) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2 = 2\cdot(B-A) \\ 7 = B^2-A^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = B-A \\ 7 = (B-A)\cdot(B+A) \end{cases}$$

Dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy $7=A+B$, co prowadzi do $A=3$ i $B=4$.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (23) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(2n+8)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2} \leq \sum_{k=0}^{2n+7} \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+3)^2+k} \leq (2n+8)\cdot\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+3)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(2n+8)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2} = \frac{(2n+8)\cdot n}{(n+4)^2} = \frac{2+\frac{8}{n}}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^2} \rightarrow 2$$

oraz

$$(2n+8)\cdot\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+3)^2} = \frac{(2n+8)\cdot(n+7)}{(n+3)^2} = \frac{\left(2+\frac{8}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{7}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2} \rightarrow 2.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 2.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=3$, $B=4$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 2.

266! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}} + \frac{n+2}{\sqrt{n^4+n+2}} + \frac{n+3}{\sqrt{n^4+n+3}} + \dots + \frac{9n}{\sqrt{n^4+9n}} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do 9 przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\leq \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{n+2}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{n+3}{\sqrt{n^4+n}} + \dots + \frac{9n}{\sqrt{n^4+n}} = \\ &= \frac{n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\dots+9n}{\sqrt{n^4+n}} = c_n \end{aligned}$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\geq \frac{n}{\sqrt{n^4+9n}} + \frac{n+1}{\sqrt{n^4+9n}} + \frac{n+2}{\sqrt{n^4+9n}} + \frac{n+3}{\sqrt{n^4+9n}} + \dots + \frac{9n}{\sqrt{n^4+9n}} = \\ &= \frac{n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\dots+9n}{\sqrt{n^4+9n}} = a_n. \end{aligned}$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\dots+9n=(8n+1)\cdot\frac{n+9n}{2}=5n\cdot(8n+1),$$

gdzie $8n+1$ jest liczbą wyrazów powyższego postępu.

Wobec tego

$$c_n=\frac{5n\cdot(8n+1)}{\sqrt{n^4+n}}=\frac{5\cdot\left(8+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}\rightarrow 40$$

przy $n\rightarrow\infty$ i podobnie

$$a_n=\frac{5n\cdot(8n+1)}{\sqrt{n^4+9n}}=\frac{5\cdot\left(8+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{9}{n^3}}}\rightarrow 40.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n\leq b_n\leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n\rightarrow\infty}c_n=40$$

oraz

$$\lim_{n\rightarrow\infty}a_n=40,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 40.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 40.

267! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \frac{4n + 3}{\sqrt{4n^4 + 4n + 3}} + \frac{4n + 6}{\sqrt{4n^4 + 4n + 6}} + \frac{4n + 9}{\sqrt{4n^4 + 4n + 9}} + \frac{4n + 12}{\sqrt{4n^4 + 4n + 12}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{13n - 9}{\sqrt{4n^4 + 13n - 9}} + \frac{13n - 6}{\sqrt{4n^4 + 13n - 6}} + \frac{13n - 3}{\sqrt{4n^4 + 13n - 3}} + \frac{13n}{\sqrt{4n^4 + 13n}} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do $13/4$ przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n \leq \frac{4n}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \frac{4n + 3}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \frac{4n + 6}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \frac{4n + 9}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \dots + \frac{13n}{\sqrt{4n^4 + 4n}} = \\ = \frac{4n + (4n + 3) + (4n + 6) + (4n + 9) + \dots + 13n}{\sqrt{4n^4 + 4n}} = c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n \geq \frac{4n}{\sqrt{4n^4 + 13n}} + \frac{4n + 3}{\sqrt{4n^4 + 13n}} + \frac{4n + 6}{\sqrt{4n^4 + 13n}} + \frac{4n + 9}{\sqrt{4n^4 + 13n}} + \dots + \frac{13n}{\sqrt{4n^4 + 13n}} = \\ = \frac{4n + (4n + 3) + (4n + 6) + (4n + 9) + \dots + 13n}{\sqrt{4n^4 + 13n}} = a_n.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$4n + (4n + 3) + (4n + 6) + (4n + 9) + \dots + 13n = (3n + 1) \cdot \frac{4n + 13n}{2} = \frac{17n \cdot (3n + 1)}{2},$$

gdzie

$$3n + 1 = \frac{13n - 4n}{3} + 1$$

jest liczbą wyrazów powyższego postępu (o różnicy 3).

Wobec tego

$$c_n = \frac{17n \cdot (3n + 1)}{2 \cdot \sqrt{4n^4 + 4n}} = \frac{17 \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right)}{2 \cdot \sqrt{4 + \frac{4}{n^3}}} \rightarrow \frac{51}{4}$$

przy $n \rightarrow \infty$ i podobnie

$$a_n = \frac{17n \cdot (3n + 1)}{2 \cdot \sqrt{4n^4 + 13n}} = \frac{17 \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right)}{2 \cdot \sqrt{4 + \frac{13}{n^3}}} \rightarrow \frac{51}{4}.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{51}{4}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{51}{4},$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{51}{4}.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa $51/4$.

268! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n}{3^n + 1} + \frac{3^{n-1} \cdot 2}{3^n + 2} + \frac{3^{n-2} \cdot 4}{3^n + 4} + \frac{3^{n-3} \cdot 8}{3^n + 8} + \dots + \frac{9 \cdot 2^{n-2}}{3^n + 2^{n-2}} + \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{3^n + 2^{n-1}} + \frac{2^n}{3^n + 2^n} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do 0 przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp geometryczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\leq \frac{3^n}{3^n} + \frac{3^{n-1} \cdot 2}{3^n} + \frac{3^{n-2} \cdot 4}{3^n} + \frac{3^{n-3} \cdot 8}{3^n} + \dots + \frac{9 \cdot 2^{n-2}}{3^n} + \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{3^n} + \frac{2^n}{3^n} = \\ &= \frac{3^n + 3^{n-1} \cdot 2 + 3^{n-2} \cdot 4 + 3^{n-3} \cdot 8 + \dots + 9 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-1} + 2^n}{3^n} = c_n \end{aligned}$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\geq \frac{3^n}{3^n+2^n} + \frac{3^{n-1} \cdot 2}{3^n+2^n} + \frac{3^{n-2} \cdot 4}{3^n+2^n} + \frac{3^{n-3} \cdot 8}{3^n+2^n} + \dots + \frac{9 \cdot 2^{n-2}}{3^n+2^n} + \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{3^n+2^n} + \frac{2^n}{3^n+2^n} = \\ &= \frac{3^n + 3^{n-1} \cdot 2 + 3^{n-2} \cdot 4 + 3^{n-3} \cdot 8 + \dots + 9 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-1} + 2^n}{3^n + 2^n} = a_n. \end{aligned}$$

Ze wzoru na sumę postępu geometrycznego otrzymujemy

$$\begin{aligned} &3^n + 3^{n-1} \cdot 2 + 3^{n-2} \cdot 4 + 3^{n-3} \cdot 8 + \dots + 9 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-1} + 2^n = \\ &= 3^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} = 3^{n+1} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 3^{n+1} - 2^{n+1}, \end{aligned}$$

gdyż iloraz powyższego postępu jest równy $2/3$, a $n+1$ jest liczbą wyrazów postępu.

Wobec tego

$$c_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n} = 3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 3 - 2 \cdot 0 = 3$$

przy $n \rightarrow \infty$ i podobnie

$$a_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n + 2^n} = \frac{3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \rightarrow \frac{3 - 2 \cdot 0}{1 + 0} = 3.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 3$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 3.

269! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{\sqrt{9^n + 5^n}} + \frac{2^{n-1} \cdot 3}{\sqrt{9^n + 5^{n-1} \cdot 7}} + \frac{2^{n-2} \cdot 3^2}{\sqrt{9^n + 5^{n-2} \cdot 7^2}} + \dots + \frac{2^{n-k} \cdot 3^k}{\sqrt{9^n + 5^{n-k} \cdot 7^k}} + \dots + \frac{3^n}{\sqrt{9^n + 7^n}} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do nieskończoności przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez

liczbę składników) będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna: mianowniki oszacujemy przez wspólną wielkość, a liczniki, które tworzą postęp geometryczny, pozostawimy bez zmian.

Szacowanie od dołu (mianowniki od góry) prowadzi do:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}} + \frac{2^{n-1} \cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1} \cdot 7}} + \frac{2^{n-2} \cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2} \cdot 7^2}} + \dots + \frac{2^{n-k} \cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k} \cdot 7^k}} + \dots + \frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}} \geqslant \\ &\geqslant \frac{2^n}{\sqrt{9^n+7^n}} + \frac{2^{n-1} \cdot 3}{\sqrt{9^n+7^n}} + \frac{2^{n-2} \cdot 3^2}{\sqrt{9^n+7^n}} + \dots + \frac{2^{n-k} \cdot 3^k}{\sqrt{9^n+7^n}} + \dots + \frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}} = \\ &= \frac{2^n + 2^{n-1} \cdot 3 + 2^{n-2} \cdot 3^2 + \dots + 2^{n-k} \cdot 3^k + \dots + 3^n}{\sqrt{9^n+7^n}} = a_n. \end{aligned}$$

Z kolei szacując od góry (mianowniki od dołu) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}} + \frac{2^{n-1} \cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1} \cdot 7}} + \frac{2^{n-2} \cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2} \cdot 7^2}} + \dots + \frac{2^{n-k} \cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k} \cdot 7^k}} + \dots + \frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}} \leqslant \\ &\leqslant \frac{2^n}{\sqrt{9^n+0}} + \frac{2^{n-1} \cdot 3}{\sqrt{9^n+0}} + \frac{2^{n-2} \cdot 3^2}{\sqrt{9^n+0}} + \dots + \frac{2^{n-k} \cdot 3^k}{\sqrt{9^n+0}} + \dots + \frac{3^n}{\sqrt{9^n+0}} = \\ &= \frac{2^n + 2^{n-1} \cdot 3 + 2^{n-2} \cdot 3^2 + \dots + 2^{n-k} \cdot 3^k + \dots + 3^n}{3^n} = c_n. \end{aligned}$$

W licznikach uzyskanych oszacowań występuje suma tego samego postępu geometrycznego $n+1$ -wyrazowego o pierwszym wyrazie 2^n i ilorazie $3/2$. Mamy więc

$$2^n + 2^{n-1} \cdot 3 + 2^{n-2} \cdot 3^2 + \dots + 2^{n-k} \cdot 3^k + \dots + 3^n = 2^n \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, a ponadto przy $n \rightarrow \infty$ mamy

$$a_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{\sqrt{9^n + 7^n}} = \frac{3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{7}{9}\right)^n}} \rightarrow 3$$

oraz

$$c_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n} = 3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 3,$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa 3.

270! Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt{n^6+1}} + \frac{(n+2)^2}{\sqrt{n^6+2}} + \frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+3}} + \dots + \frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{\sqrt{n^6+n-1}} + \frac{(2n)^2}{\sqrt{n^6+n}} \right).$$

Wskazówka-przypomnienie: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do czterech przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna szacując mianowniki przez wspólną wielkość.

Szacowanie od dołu prowadzi do:

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+n}} = \frac{1}{\sqrt{n^6+n}} \cdot \sum_{k=1}^n (n+k)^2 = a_n.$$

Z kolei szacując od góry otrzymujemy:

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+0}} = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^n (n+k)^2 = c_n.$$

Obliczamy sumę występującą we wzorach na a_n i c_n :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (n+k)^2 &= \sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n \cdot (2n+1) \cdot (4n+1)}{6} - \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \\ &= \frac{n \cdot (2n+1) \cdot (7n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $a_n \leq b_n \leq c_n$, a ponadto przy $n \rightarrow \infty$ mamy

$$a_n = \frac{n \cdot (2n+1) \cdot (7n+1)}{6 \cdot \sqrt{n^6+n}} \rightarrow \frac{7}{3}$$

oraz

$$c_n = \frac{n \cdot (2n+1) \cdot (7n+1)}{6 \cdot n^3} \rightarrow \frac{7}{3},$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa **7/3**.

271! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+1}} + \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+9}} + \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+27}} + \dots + \frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^{n-1}}} + \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – ilorazy środkowych składników do skrajnych dążą do nieskończoności przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania

przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak n -ty wiersz trójkąta Pascala, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\leq \frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+0}} + \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+0}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+0}} + \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+0}} + \dots + \frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+0}} + \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+0}} = \\ &= \frac{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}}{2^n} = c_n \end{aligned}$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\geq \frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+3^n}} + \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3^n}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+3^n}} + \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+3^n}} + \dots + \frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^n}} + \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}} = \\ &= \frac{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}} = a_n . \end{aligned}$$

Ze wzoru na sumę wyrazów n -tego wiersza trójkąta Pascala otrzymujemy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n .$$

Wobec tego

$$c_n = \frac{2^n}{2^n} = 1 \rightarrow 1$$

przy $n \rightarrow \infty$ i podobnie

$$a_n = \frac{2^n}{\sqrt{4^n+3^n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}} \rightarrow 1 .$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n ,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 ,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 .$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 1.

272! Obliczyć granicę ciągu zaczynającego się od wyrazu o indeksie 7:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k+7}} + \frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k+8}} + \frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k+9}} + \frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k+10}} + \dots + \frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k+n-1}} + \frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}} \right)$$

dla tak dobranej wartości naturalnej parametru k , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy przy $k \geq 2$ mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak początek siódmej kolumny trójkąta Pascala, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k+7}} + \frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k+8}} + \frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k+9}} + \frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k+10}} + \dots + \frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k+n-1}} + \frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\binom{7}{7} + \binom{8}{7} + \binom{9}{7} + \binom{10}{7} + \dots + \binom{n-1}{7} + \binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+0}} = \\ &= \frac{\binom{7}{7} + \binom{8}{7} + \binom{9}{7} + \binom{10}{7} + \dots + \binom{n-1}{7} + \binom{n}{7}}{n^{k/2}} = c_n \end{aligned}$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k+7}} + \frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k+8}} + \frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k+9}} + \frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k+10}} + \dots + \frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k+n-1}} + \frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}} \geqslant \\ &\geqslant \frac{\binom{7}{7} + \binom{8}{7} + \binom{9}{7} + \binom{10}{7} + \dots + \binom{n-1}{7} + \binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}} = a_n. \end{aligned}$$

Ze wzoru na sumę początkowych wyrazów kolumny trójkąta Pascala² otrzymujemy

$$\binom{7}{7} + \binom{8}{7} + \binom{9}{7} + \binom{10}{7} + \dots + \binom{n-1}{7} + \binom{n}{7} = \binom{n+1}{8}.$$

Wobec tego

$$c_n = \frac{\binom{n+1}{8}}{n^{k/2}} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot (n-6)/8!}{n^{k/2}} \rightarrow \frac{1}{8!}$$

przy $n \rightarrow \infty$, o ile $k = 16$. Podobnie

$$a_n = \frac{\binom{n+1}{8}}{\sqrt{n^k + n}} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot (n-6)/8!}{n^{k/2} \cdot \sqrt{1 + n^{1-k}}} \rightarrow \frac{1}{8!}$$

przy $n \rightarrow \infty$, o ile $k = 16$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1/8!$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/8!,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1/8!.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma dla $k = 16$ wartość $1/8! = 1/40320$.

²Wzór ten mówi, że

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

i może być udowodniony indukcyjnie ze względu na n . Można też zapisać

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{k+1}{k+1} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k}$$

i wielokrotnie zastosować do początkowych składników wzór $\binom{a}{b} + \binom{a}{b+1} = \binom{a+1}{b+1}$.

W każdym³ z poniższych zadań podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być podane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

289.

$Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 60} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf Z = -1/11$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 1/4$ Czy $\in Z$? **TAK**
290.

$Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 70} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf Z = -1/6$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 1/11$ Czy $\in Z$? **TAK**
291.

$Z = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf Z = 2$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 12/5$ Czy $\in Z$? **NIE**
292.

$Z = \left\{ \sqrt{25n^2 - 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf Z = -4$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = -12/5$ Czy $\in Z$? **NIE**
293.

$Z = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} + \sqrt{25n^2 - 24n} - 10n : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf Z = -2$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 0$ Czy $\in Z$? **NIE**
294.

$Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16n^2 \leq 9m^2 \leq 25n^2 \right\}$

$\inf Z = 4/3$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 5/3$ Czy $\in Z$? **TAK**
295.

$Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16n^2 \leq 2m^2 \leq 32n^2 \right\}$

$\inf Z = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = 4$ Czy $\in Z$? **TAK**
296.

$Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3n^2 \leq m^2 \leq 4n^2 \right\}$

$\inf Z = \sqrt{3}$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = 2$ Czy $\in Z$? **TAK**
297.

$Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4m^2 \leq n^2 \leq 5m^2 \right\}$

$\inf Z = 1/\sqrt{5}$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = 1/2$ Czy $\in Z$? **TAK**
298.

$Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^n \leq 2^m \leq 4^n \right\}$

$\inf Z = \log_2 3$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = 2$ Czy $\in Z$? **TAK**
299.

$Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^m \leq 2^n \leq 5^m \right\}$

$\inf Z = \log_5 2$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = 1/2$ Czy $\in Z$? **TAK**
300.

$Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 27^{n^2} \right\}$

$\inf Z = \sqrt{2}$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = \sqrt{3}$ Czy $\in Z$? **NIE**

³Nie ma sensu rozwiązywać wszystkich zadań, możesz pominąć zadania podobne do wcześniejszych.

301. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 32^{n^2} \right\}$ $\inf Z = 2$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = \sqrt{5}$ Czy $\in Z$? NIE
302. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 9^{m^2} \leq 25^{n^2} \right\}$ $\inf Z = \sqrt{\log_9 16} = \sqrt{\log_3 4}$ Czy $\in Z$? NIE $\sup Z = \sqrt{\log_9 25} = \sqrt{\log_3 5}$ Czy $\in Z$? NIE	
303. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^n \cdot n^m \leq m^m \leq 27^n \cdot n^m \right\}$ $\inf Z = 2$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = 3$ Czy $\in Z$? TAK
304. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{24n} \cdot n^m \leq m^m \leq 3^{18n} \cdot n^m \right\}$ $\inf Z = 8$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = 9$ Czy $\in Z$? TAK
305. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{8n} \cdot n^m \leq m^m \leq 2^{160n} \cdot n^m \right\}$ $\inf Z = 4$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = 32$ Czy $\in Z$? TAK
306. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{64n} \cdot n^m \leq m^m \leq 3^{81n} \cdot n^m \right\}$ $\inf Z = 16$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = 27$ Czy $\in Z$? TAK
307. $Z = \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{5} \right)^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = 1/100$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = 9/25$ Czy $\in Z$? NIE
308. $Z = \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{5} \right)^3 : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = -27/125$ Czy $\in Z$? NIE	$\sup Z = 8/125$ Czy $\in Z$? TAK
309. $Z = \left\{ \left(-\frac{1}{n} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = -1$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = 1/4$ Czy $\in Z$? TAK
310. $Z = \left\{ \left(-\frac{1}{n} \right)^{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = -1$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = 1/16$ Czy $\in Z$? TAK
311. $Z = \left\{ \left(-\frac{1}{n} \right)^{n^2+n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = 0$ Czy $\in Z$? NIE	$\sup Z = 1$ Czy $\in Z$? TAK
312. $Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 370} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = -1/5$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = 1/6$ Czy $\in Z$? TAK
313. $Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 390} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = -1$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = 1/6$ Czy $\in Z$? TAK

314.

$Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 410} : n \in \mathbb{N} \right\}$

inf $Z = 0$

Czy $\in Z$?

NIE

315.

$Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 430} : n \in \mathbb{N} \right\}$

inf $Z = 0$

Czy $\in Z$?

NIE

316.

$Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^2 \leq m^2 \leq 27n^2 \right\}$

inf $Z = 5$

Czy $\in Z$?

TAK

317.

$Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$

inf $Z = \sqrt[3]{25}$

Czy $\in Z$?

NIE

318.

$Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^n \leq 8^m \leq 27^n \right\}$

inf $Z = 4/3$

Czy $\in Z$?

TAK

319.

$Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^n \leq 9^m \leq 27^n \right\}$

inf $Z = \log_9 16 = \boxed{\log_3 4 = 2 \cdot \log_3 2}$

Czy $\in Z$?

NIE

320.

$Z = \left\{ (2 - \sqrt{3})^n : n \in \mathbb{N} \right\}$

inf $Z = 0$

Czy $\in Z$?

NIE

321.

$Z = \left\{ (2 - \sqrt{5})^n : n \in \mathbb{N} \right\}$

inf $Z = 2 - \sqrt{5}$

Czy $\in Z$?

TAK

322.

$Z = \left\{ \binom{50}{n} : n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 49, 50\} \right\}$

inf $Z = 1$

Czy $\in Z$?

TAK

323.

$Z = \left\{ \binom{50}{n} \cdot (-1)^n : n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 49, 50\} \right\}$

inf $Z = -\binom{50}{25}$

Czy $\in Z$?

TAK

sup $Z = 1/10$

Czy $\in Z$?

TAK

sup $Z = 1/30$

Czy $\in Z$?

TAK

sup $Z = \sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{3}$

Czy $\in Z$?

NIE

sup $Z = 3$

Czy $\in Z$?

TAK

sup $Z = \log_8 27 = \boxed{\log_2 3}$

Czy $\in Z$?

NIE

sup $Z = 3/2$

Czy $\in Z$?

TAK

sup $Z = 2 - \sqrt{3}$

Czy $\in Z$?

TAK

sup $Z = (2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$

Czy $\in Z$?

TAK

sup $Z = \binom{50}{25}$

Czy $\in Z$?

TAK

sup $Z = \binom{50}{24} = \binom{50}{26}$

Czy $\in Z$?

TAK

324. $Z = \left\{ \sqrt{x^2 + 2x + 1} : x \in (-5, 2) \right\}$ $\inf Z = 0$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = 4$ Czy $\in Z$? NIE
325. $Z = \left\{ \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} : x \in (-5, 2) \right\}$ $\inf Z = 0$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = 2$ Czy $\in Z$? NIE
326. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^3 \cdot n^{15} \leq m^{15} \leq 3^5 \cdot n^{15} \right\}$ $\inf Z = \sqrt[5]{5}$ Czy $\in Z$? NIE	$\sup Z = \sqrt[3]{3}$ Czy $\in Z$? NIE
327. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^2 \cdot n^{10} \leq m^{10} \leq 2^5 \cdot n^{10} \right\}$ $\inf Z = \sqrt[5]{5}$ Czy $\in Z$? NIE	$\sup Z = \sqrt{2}$ Czy $\in Z$? NIE
328. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^2 \cdot n^6 \leq m^6 \leq 2^3 \cdot n^6 \right\}$ $\inf Z = +\infty$ Czy $\in Z$? NIE	$\sup Z = -\infty$ Czy $\in Z$? NIE
329. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 8^{mn} \right\}$ $\inf Z = \sqrt{2}$ Czy $\in Z$? NIE	$\sup Z = 3$ Czy $\in Z$? TAK
330. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 4^{mn} \right\}$ $\inf Z = 2$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = 2$ Czy $\in Z$? TAK
331. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 81^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 11^{mn} \right\}$ $\inf Z = 2$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = \log_3 11$ Czy $\in Z$? NIE
332. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 5^{mn} \right\}$ $\inf Z = \sqrt{3}$ Czy $\in Z$? NIE	$\sup Z = \log_2 5$ Czy $\in Z$? NIE
333. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 32^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 3^{mn} \right\}$ $\inf Z = +\infty$ Czy $\in Z$? NIE	$\sup Z = -\infty$ Czy $\in Z$? NIE
334. $Z = \left\{ \frac{m^2}{n^2} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$ $\inf Z = 4$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = 9$ Czy $\in Z$? TAK
335. $Z = \left\{ \frac{m^2}{n^2} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^4 \leq m^4 \leq 49n^4 \right\}$ $\inf Z = 5$ Czy $\in Z$? NIE	$\sup Z = 7$ Czy $\in Z$? NIE
336. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{18^2 \cdot n} \cdot n^m \leq m^m \leq 2^{2^{11} \cdot n} \cdot n^m \right\}$ $\inf Z = 81$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = 256$ Czy $\in Z$? TAK

337. $Z = \{\log_x 8 : x \in [2, +\infty)\}$ $\inf Z = \mathbf{0}$ Czy $\in Z$? NIE	$\sup Z = \mathbf{3}$ Czy $\in Z$? TAK
338. $Z = \{\log_x 32 : x \in (0, 1/2]\}$ $\inf Z = -\mathbf{5}$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = \mathbf{0}$ Czy $\in Z$? NIE
339. $Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = -\mathbf{1/8}$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = \mathbf{1/5}$ Czy $\in Z$? TAK
340. $Z = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 + 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = -\mathbf{1/45}$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = \mathbf{1/48}$ Czy $\in Z$? TAK
341. $Z = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 - 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = -\mathbf{1/5}$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = \mathbf{1/19}$ Czy $\in Z$? TAK
342. $Z = \left\{ \left(\frac{-1}{3} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = -\mathbf{1/3}$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = \mathbf{1/9}$ Czy $\in Z$? TAK
343. $Z = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{3^i} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = \mathbf{1/3}$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = \mathbf{1/2}$ Czy $\in Z$? NIE
344. $Z = \left\{ x^n : x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right) \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = -\mathbf{1/2}$ Czy $\in Z$? NIE	$\sup Z = \mathbf{1/4}$ Czy $\in Z$? NIE
345. $Z = \{\log_2(2n - 1) - \log_2 n : n \in \mathbb{N}\}$ $\inf Z = \mathbf{0}$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = \mathbf{1}$ Czy $\in Z$? NIE
346. $Z = \left\{ \frac{(\log_2(n^2 + 1)) \cdot \log_3(n^2 + 4)}{(\log_8(n^2 + 4)) \cdot \log_9(n^2 + 1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = \mathbf{6}$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = \mathbf{6}$ Czy $\in Z$? TAK
347. $Z = \left\{ \frac{1}{5^m - 11^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = -\mathbf{1/6}$ Czy $\in Z$? TAK	$\sup Z = \mathbf{1/4}$ Czy $\in Z$? TAK
348. $Z = \left\{ \frac{mn}{m^2 + 4n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf Z = \mathbf{0}$ Czy $\in Z$? NIE	$\sup Z = \mathbf{1/4}$ Czy $\in Z$? TAK

349. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n - 1| < \frac{1}{n}.$$

W każdym z zadań **349.1-349.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

- 349.1.** $\sup\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 2$
- 349.2.** $\inf\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 0$
- 349.3.** $\sup\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 3/2$
- 349.4.** $\inf\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 1/2$
- 349.5.** $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 5/6$
- 349.6.** $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = -5/6$
- 349.7.** $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 1/2$
- 349.8.** $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = -1/2$
- 349.9.** $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 4$
- 349.10.** $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 2$

350. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \left| a_n - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

W każdym z zadań **350.1-350.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

- 350.1.** $\sup\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 2$
- 350.2.** $\inf\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 0$
- 350.3.** $\sup\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 1$
- 350.4.** $\inf\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 0$
- 350.5.** $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 1$
- 350.6.** $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = -2/3$
- 350.7.** $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 2/3$
- 350.8.** $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = -1/3$
- 350.9.** $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 2$
- 350.10.** $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 0$

351. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów **zbieżnych** (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad |a_n - 6| < \frac{n+1}{n}.$$

W każdym z zadań **351.1-351.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

351.1. $\sup \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 8$

351.2. $\inf \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 4$

351.3. $\sup \{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 7,5 = 15/2 = 7\frac{1}{2}$

351.4. $\inf \{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 4,5 = 9/2 = 4\frac{1}{2}$

351.5. $\sup \{a_1 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 3,5 = 7/2 = 3\frac{1}{2}$

351.6. $\inf \{a_1 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = -3,5 = -7/2 = -3\frac{1}{2}$

351.7. $\sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = 7$

351.8. $\inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = 5$

351.9. $\sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_1) : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = 3$

351.10. $\inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_1) : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = -3$

352. W każdym z zadań **352.1-352.6** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad |a_n - a_{n+1}| < \frac{1}{n}.$$

352.1. $A = \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf A = -\infty$	$\sup A = +\infty$
--------------------	--------------------

352.2. $B = \{a_3 - a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf B = -3/2$	$\sup B = 3/2$
-----------------	----------------

352.3. $C = \{a_4 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf C = -5/6$	$\sup C = 5/6$
-----------------	----------------

352.4. $D = \{a_4 - a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf D = -11/6$	$\sup D = 11/6$
------------------	-----------------

352.5. $E = \{(a_3 - a_1)^2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf E = 0$	$\sup E = 9/4$
--------------	----------------

352.6. $F = \{a_3^2 - a_1^2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf F = -\infty$	$\sup F = +\infty$
--------------------	--------------------

353. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z = \left\{ \frac{mn}{4m^2 + 9n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Rozwiązanie zadania oprzemy na następujących spostrzeżeniach:

1° Wszystkie elementy zbioru Z są dodatnie.

2° Istnieje ciąg o wyrazach ze zbioru Z zbieżny do zera.

Dla dowodu tego spostrzeżenia wystarczy przyjąć $m = 1$ w wyrażeniu

$$\frac{mn}{4m^2 + 9n^2}.$$

(♡)

Otrzymamy wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4 + 9n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4 \cdot n^{-1} + 9n} = 0.$$

3° Liczba $1/12$ jest elementem zbioru Z .

Aby to zobaczyć, wystarczy podstawić $m = 3$ i $n = 2$ w (♡).

4° Każdy element zbioru Z jest nie większy od $1/12$.

Istotnie, z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb $4m^2$ i $9n^2$ otrzymujemy

$$\sqrt{4m^2 \cdot 9n^2} \leq \frac{4m^2 + 9n^2}{2},$$

co łatwo przekształcamy do postaci

$$\frac{mn}{4m^2 + 9n^2} \leq \frac{1}{12}.$$

Na podstawie spostrzeżeń **1°** i **2°** stwierdzamy, że $\inf Z = 0$, a ze spostrzeżeń **3°** i **4°** wynika $\sup Z = 1/12$.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 0, a kres górny $1/12$.

354. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$Z = \left\{ \frac{kmn}{8k^3 + 27m^3 + 125n^3} : k, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowanej do liczb $8k^3$, $27m^3$, $125n^3$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{8k^3 \cdot 27m^3 \cdot 125n^3} \leq \frac{8k^3 + 27m^3 + 125n^3}{3},$$

czyli

$$\frac{kmn}{8k^3 + 27m^3 + 125n^3} \leq \frac{1}{90}.$$

Zatem liczba $1/90$ jest ograniczeniem górnym zbioru Z . Wykażemy, że jest to ograniczenie najmniejsze. W tym celu przyjmijmy $k = 15$, $m = 10$ oraz $n = 6$. Wówczas

$$\frac{kmn}{8k^3 + 27m^3 + 125n^3} = \frac{900}{27000 + 27000 + 27000} = \frac{1}{90}$$

jest elementem zbioru Z .

Odpowiedź: Kres górny zbioru Z jest równy $1/90$.

355. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 5n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 5n + 3} - n &= \sqrt{n^2 + 5n + 3} - \left(n + \frac{5}{2} \right) + \frac{5}{2} = \frac{n^2 + 5n + 3 - \left(n + \frac{5}{2} \right)^2}{\sqrt{n^2 + 5n + 3} + \left(n + \frac{5}{2} \right)} + \frac{5}{2} = \\ &= \frac{n^2 + 5n + 3 - n^2 - 5n - \frac{25}{4}}{\sqrt{n^2 + 5n + 3} + \left(n + \frac{5}{2} \right)} + \frac{5}{2} = -\frac{13/4}{\sqrt{n^2 + 5n + 3} + \left(n + \frac{5}{2} \right)} + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie rośnie wraz z n , a przy $n \rightarrow \infty$ dąży do $5/2$. Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu rosnącym pierwszy wyraz (tu równy 2) jest najmniejszy, a kresem górnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 2, a kres górny $5/2$.

356. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 5n + 10} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 5n + 10} - n &= \sqrt{n^2 + 5n + 10} - \left(n + \frac{5}{2} \right) + \frac{5}{2} = \frac{n^2 + 5n + 10 - \left(n + \frac{5}{2} \right)^2}{\sqrt{n^2 + 5n + 10} + \left(n + \frac{5}{2} \right)} + \frac{5}{2} = \\ &= \frac{n^2 + 5n + 10 - n^2 - 5n - \frac{25}{4}}{\sqrt{n^2 + 5n + 10} + \left(n + \frac{5}{2} \right)} + \frac{5}{2} = \frac{15/4}{\sqrt{n^2 + 5n + 10} + \left(n + \frac{5}{2} \right)} + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie maleje wraz z n , a przy $n \rightarrow \infty$ dąży do $5/2$. Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu malejącym pierwszy wyraz (tu równy 3) jest największy, a kresem dolnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $5/2$, a kres górny 3.

357. Wyznaczyć (wraz z uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{5^m - 3^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = 5^m - 3^n > 0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k . Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia i parzysta, musi zachodzić $k \geq 2$. Zauważmy przy tym, że dla $m = n = 1$ w istocie $k = 2$. Zatem liczba $1/2$ jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = 5^m - 3^n < 0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k . Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna i parzysta, musi zachodzić $k \leq -2$. Zauważmy przy tym, że dla $m = 2$, $n = 3$ w istocie $k = 25 - 27 = -2$. Zatem liczba $-1/2$ jest najmniejszym elementem zbioru.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $-1/2$, a kres górny $1/2$.

358. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{m^2 - 3n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = m^2 - 3n^2 > 0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k . Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia, musi zachodzić $k \geq 1$. Zauważmy przy tym, że dla $m = 2$ i $n = 1$ w istocie $k = 1$. Zatem liczba 1 jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = m^2 - 3n^2 < 0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k , czyli dla ujemnej liczby k o najmniejszym module. Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna, a przy tym $k \not\equiv 2 \pmod{3}$, musi zachodzić $k \neq -1$. W konsekwencji $k \leq -2$. Zauważmy ponadto, że dla $m = n = 1$ otrzymujemy $k = -2$. Zatem liczba $-1/2$ jest najmniejszym elementem zbioru.

W rozwiązaniu korzystamy z następującego faktu: *Kwadrat liczby całkowitej nigdy nie daje przy dzieleniu przez 3 reszty 2*. Na tej właśnie podstawie wnioskujemy, że

$$k = m^2 - 3n^2 \equiv m^2 \not\equiv 2 \pmod{3}.$$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $-1/2$, a kres górny 1 .

359. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{m^2 - 7n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = m^2 - 7n^2 > 0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k . Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia, musi zachodzić $k \geq 1$. Zauważmy przy tym, że dla $m = 8$ i $n = 3$ w istocie $k = 1$. Zatem liczba 1 jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = m^2 - 7n^2 < 0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k , czyli dla ujemnej liczby k o najmniejszym module. Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna, a przy tym $k \not\equiv 6 \pmod{7}$ oraz $k \not\equiv 5 \pmod{7}$, musi zachodzić $k \neq -1$ oraz $k \neq -2$. W konsekwencji $k \leq -3$. Zauważmy ponadto, że dla $m = 2$ i $n = 1$ otrzymujemy $k = -3$. Zatem liczba $-1/3$ jest najmniejszym elementem zbioru.

W rozwiązaniu korzystamy z następującego faktu: Kwadrat liczby całkowitej nigdy nie daje przy dzieleniu przez 7 reszty 3, 5 ani 6. Na tej właśnie podstawie wnioskujemy, że

$$k = m^2 - 7n^2 \equiv m^2 \not\equiv 5 \pmod{7}$$

oraz

$$k = m^2 - 7n^2 \equiv m^2 \not\equiv 6 \pmod{7}.$$

Dowód powyższego faktu sprowadza się do następujących tożsamości:

$$\begin{aligned} (7t)^2 &= 7 \cdot (7t^2) + 0, \\ (7t \pm 1)^2 &= 7 \cdot (7t^2 \pm 2t) + 1, \\ (7t \pm 2)^2 &= 7 \cdot (7t^2 \pm 4t) + 4, \\ (7t \pm 3)^2 &= 7 \cdot (7t^2 \pm 6t + 1) + 2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $-1/3$, a kres górny 1.