

Funkcje.

Zadania komputerowe do samodzielnego rozwiązania
z wykorzystaniem rysunków w Desmosie¹.

360. Przeanalizuj rysunki 1–4. Pobaw się suwakami, aby zmieniać parametry. W rysunkach 3 i 4 spróbuj zmienić wzór na funkcję f .

361. Zastanów się, jak z wykresu funkcji f otrzymać wykres funkcji określonej wzorem $|f(x)|$. Zweryfikuj swoją odpowiedź na rysunku 5. Klikając na czerwone kółeczko z lewej strony $|f(x)|$ możesz włączać i wyłączać wykres tej funkcji.
Zrób to samo dla funkcji określonej wzorem $f(|x|)$. Zweryfikuj swoją odpowiedź przez odpowiednią modyfikację rysunku 5.

362. Jaką symetrię ma wykres funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$? Zweryfikuj swoje przypuszczenia na rysunku 6.

363. Jak z grubsza wygląda wykres funkcji $f(x) = \log_x 2$? Zweryfikuj swoje przypuszczenia na rysunku 7.
Zrób to samo dla funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. Zweryfikuj swoje przypuszczenia przez odpowiednią modyfikację rysunku 7.

364. Korzystając z rysunku 8 dobierz eksperymentalnie takie a , aby funkcja

$$f(x) = ax + \sqrt{3x^2 + 1}$$

była odwrotna do samej siebie. W ten sam sposób znajdź takie a , aby funkcją odwrotną do f była funkcja

$$g(x) = ax - \sqrt{3x^2 + 1}.$$

Zadania do omówienia² na ćwiczeniach w czwartek 20.11.2025 i piątek³ 21.11.2025.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

365. Niech f będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \log_x 64.$$

Podaj obrazy i przeciwobrazy zbiorów:

a) $f\left[\left(0, \frac{1}{2}\right)\right]$	b) $f\left[\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right]$	c) $f[(1, 2)]$	d) $f[(2, \infty)]$
e) $f^{-1}[(-\infty, -2)]$	f) $f^{-1}[(-2, 0)]$	g) $f^{-1}[(0, 2)]$	h) $f^{-1}[(2, \infty)]$

¹Linki do rysunków znajdują się na stronie wykładu.
²Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.
³Druga część listy 5 będzie przewidziana na ćwiczenia 27,28.11.2025.

366. Dla funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem oraz dla podanego zbioru Z rozstrzygnij, czy funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze Z oraz podaj zbiór wartości funkcji f na zbiorze Z .

- a) $f(x) = x^2, \quad Z = [-3, -1)$
- b) $f(x) = x^2, \quad Z = (-3, 4]$
- c) $f(x) = x^2, \quad Z = [-3, -2] \cup [3, 5]$
- d) $f(x) = x^2, \quad Z = (-3, -2] \cup [3, 4)$
- e) $f(x) = x^2, \quad Z = (0, 3)$
- f) $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad Z = (0, 3)$
- g) $f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad Z = (0, 3)$
- h) $f(x) = 2^x, \quad Z = (-3, 3)$
- i) $f(x) = |2^x - 3|, \quad Z = (-3, 3)$
- j) $f(x) = |2^x - 5|, \quad Z = (-3, 3)$

367. Czy funkcja f zdefiniowana podanym wzorem jest parzysta? Nieparzysta?

- a) $f(x) = 0$
- b) $f(x) = 37$
- c) $f(x) = 2x$
- d) $f(x) = 2x^2 + 1$
- e) $f(x) = 14x^5 + 6x^3$
- f) $f(x) = x^6 + x^5$
- g) $f(x) = \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$
- h) $f(x) = \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$
- i) $f(x) = x^{111} \cdot \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$
- j) $f(x) = x^{111} \cdot \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$
- k) $f(x) = x^{666} \cdot \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$
- l) $f(x) = x^{666} \cdot \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$
- m) $f(x) = \sin x^{37}$
- n) $f(x) = \sin x^{24}$
- o) $f(x) = \cos x^{37}$
- p) $f(x) = \cos x^{24}$
- q) $f(x) = (x^2 + 1) \sin x$
- r) $f(x) = (x^2 + 1) \cos x$
- s) $f(x) = (x^3 + 1) \sin x$
- t) $f(x) = (x^3 + 1) \cos x$
- u) $f(x) = e^{\cos x}$
- v) $f(x) = e^{\sin x}$
- w) $f(x) = \sin \sin \sin \sin \sin \sin \sin \sin \sin \sin x$
- x) $f(x) = \sin \sin \sin \sin \sin \cos \sin \sin \sin x$

368. Podaj wzór i dziedzinę funkcji odwrotnej do funkcji f określonej podanym wzorem:

- a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$
- b) $f(x) = \sqrt{x^3 + 8}$
- c) $f(x) = \ln(1 + e^x)$
- d) $f(x) = \ln(1 - e^x)$

369. Niech $f(x) = \left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right|$. Naskicuj wykres funkcji f .

370. Funkcja f spełnia warunki

$$f(3-x)=f(x), \qquad f(6-x)=f(x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x . Udowodnij, że funkcja f jest okresowa i parzysta.

371. Udowodnij, że dowolną funkcję $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ można jednoznacznie przedstawić w postaci f_n+f_p , gdzie f_n jest funkcją nieparzystą, a f_p parzystą.

372. Połącz w pary warunków równoważnych opisy własności funkcji f określonych na całej prostej z opisami własności ich wykresów.

- a) funkcja parzysta
- b) funkcja nieparzysta
- c) funkcja stała równa 0
- d) funkcja stała równa 2
- e) funkcja okresowa
- f) suma funkcji okresowej i liniowej
- g) funkcja jest odwrotna do samej siebie
- h) funkcja określona wzorem $-f(x)$ jest odwrotna do samej siebie
- i) $f(-x)=4-f(x)$ dla każdego x
- j) $f(4-x)=f(x)$ dla każdego x
- k) $f(4-x)=-f(x)$ dla każdego x
- 1) wykres niezmienniczy ze względu na translację o niezerowy wektor niepionowy
- 2) wykres niezmienniczy ze względu na translację o niezerowy wektor poziomy
- 3) wykres niezmienniczy ze względu na symetrię osiową względem osi OX
- 4) wykres niezmienniczy ze względu na symetrię osiową względem osi OY
- 5) wykres niezmienniczy ze względu na symetrię osiową względem prostej o równaniu $y=x$
- 6) wykres niezmienniczy ze względu na symetrię osiową względem prostej o równaniu $y=2$
- 7) wykres niezmienniczy ze względu na symetrię osiową względem prostej o równaniu $x=2$
- 8) wykres niezmienniczy ze względu na symetrię osiową względem prostej o równaniu $y=-x$
- 9) wykres niezmienniczy ze względu na symetrię środkową względem punktu $(0,0)$
- 10) wykres niezmienniczy ze względu na symetrię środkową względem punktu $(2,0)$
- 11) wykres niezmienniczy ze względu na symetrię środkową względem punktu $(0,2)$

W każdym z poniższych zadań podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

373.

$f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x-4)}$

$D_f=$

374.

$f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x-4)^2}$

$D_f=$

375.

$f(x)=\sqrt{(x-1)^2\cdot(x-4)}$

$D_f=$

376.

$f(x)=\sqrt{(x^2-1)\cdot(x-4)}$

$D_f=$

377.

$f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x^2-4)}$

$D_f=$

378. $f(x) = \sqrt{(x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4)}$ $D_f = \dots\dots\dots$
379. $f(x) = \sqrt{(x^2 - 1)^2 \cdot (x^2 - 4)}$ $D_f = \dots\dots\dots$
380. $f(x) = \sqrt{(x - 4) \cdot (x - 9) \cdot (x - 16)}$ $D_f = \dots\dots\dots$
381. $f(x) = \sqrt{(x - 4)^{2026} \cdot (x - 9)^{2026} \cdot (x - 16)^{2025}}$ $D_f = \dots\dots\dots$
382. $f(x) = \sqrt{(x - 4)^{2025} \cdot (x - 9)^{2025} \cdot (x - 16)^{2026}}$ $D_f = \dots\dots\dots$
383. $f(x) = \sqrt{(x - 4)^{2025} \cdot (x - 9)^{2026} \cdot (x - 16)^{2025}}$ $D_f = \dots\dots\dots$
384. $f(x) = \sqrt{(x - 4) \cdot (x - 9) \cdot (x^2 - 16)}$ $D_f = \dots\dots\dots$
385. $f(x) = \sqrt{(x - 4) \cdot (x^2 - 9) \cdot (x^2 - 16)}$ $D_f = \dots\dots\dots$
386. $f(x) = \sqrt{(x^2 - 4) \cdot (x^2 - 9) \cdot (x^2 - 16)}$ $D_f = \dots\dots\dots$
387. $f(x) = \sqrt{(x^2 - 4) \cdot (x^2 - 9) \cdot (x^4 - 16)}$ $D_f = \dots\dots\dots$
388. $f(x) = \sqrt{(3 - \log_2 x) \cdot (5 - \log_2 x) \cdot (3 - \log_3 x)}$ $D_f = \dots\dots\dots$
389. $f(x) = \sqrt{(3 - \log_2 x) \cdot (2 - \log_5 x) \cdot (3 - \log_3 x)}$ $D_f = \dots\dots\dots$
390. $f(x) = \sqrt{(3 - \log_4 x) \cdot (6 - \log_2 x) \cdot (3 - \log_3 x)}$ $D_f = \dots\dots\dots$
391. $f(x) = \sqrt{\log_2 \log_3 x}$ $D_f = \dots\dots\dots$
392. $f(x) = \sqrt{\log_3 \log_2 x}$ $D_f = \dots\dots\dots$
393. $f(x) = \sqrt{\log_5 \log_3 \log_2 x}$ $D_f = \dots\dots\dots$
394. $f(x) = \sqrt{\log_3 \log_2 \log_5 x}$ $D_f = \dots\dots\dots$
395. $f(x) = \log_2 \log_x 256$ $D_f = \dots\dots\dots$
396. $f(x) = \log_2 \log_2 \log_x 256$ $D_f = \dots\dots\dots$
397. $f(x) = \log_2 \log_2 \log_2 \log_x 256$ $D_f = \dots\dots\dots$
398. $f(x) = \log_2 \log_2 \log_2 \log_2 \log_x 256$ $D_f = \dots\dots\dots$
399. $f(x) = \log_2 \log_2 \log_2 \log_2 \log_2 \log_x 256$ $D_f = \dots\dots\dots$

400. Funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=-\frac{25x}{24}+\frac{\sqrt{49x^2+37}}{24}.$$

Udowodnij, że f jest odwrotna do samej siebie.

401. Wyznacz wszystkie wartości rzeczywiste parametru a , dla których funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+1}$$

jest odwrotna do samej siebie.

402. Wyznacz wszystkie wartości rzeczywiste parametru a , dla których funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+2}$$

jest odwrotna do samej siebie.

W każdym z poniższych 10 zadań dla podanej liczby a podaj taką liczbę b , że funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=a|x|+bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x))=x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

403. $a=1,$ $b=.....$

404. $a=-1,$ $b=.....$

405. $a=2,$ $b=.....$

406. $a=-2,$ $b=.....$

407. $a=3,$ $b=.....$

408. $a=-3,$ $b=.....$

409. $a=3/4,$ $b=.....$

410. $a=-3/4,$ $b=.....$

411. $a=4/3,$ $b=.....$

412. $a=-4/3,$ $b=.....$

413. Wiadomo, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między podanymi niżej wzorami i wykresami funkcji na kolejnych stronach. W każdym z zadań **413.a-413.j** podaj numer rysunku, na którym znajduje się wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem.

Przypomnienie: $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

413.a. $f(x)=\{|x|\}$

413.b. $f(x)=\{x\}^2$

413.c. $f(x)=\{|x|\}^2$

413.d. $f(x)=\sqrt{\{x\}}$

413.e. $f(x)=\sqrt{\{|x|\}}$

413.f. $f(x)=\{\sqrt{|x|}\}$

413.g. $f(x)=\sqrt[5]{\{x\}}$

413.h. $f(x)=\{\sqrt[5]{x}\}$

413.i. $f(x)=\{x\}^5$

413.j. $f(x)=\{|x|\}^5$



