

W każdym z poniższych zadań podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

$$373. \quad f(x) = \sqrt{(x-1) \cdot (x-4)} \quad D_f = (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$$

$$374. \quad f(x) = \sqrt{(x-1) \cdot (x-4)^2} \quad D_f = [1, +\infty)$$

$$375. \quad f(x) = \sqrt{(x-1)^2 \cdot (x-4)} \quad D_f = \{1\} \cup [4, +\infty)$$

$$376. \quad f(x) = \sqrt{(x^2-1) \cdot (x-4)} \quad D_f = [-1, 1] \cup [4, +\infty)$$

$$377. \quad f(x) = \sqrt{(x-1) \cdot (x^2-4)} \quad D_f = [-2, 1] \cup [2, +\infty)$$

$$378. \quad f(x) = \sqrt{(x^2-1) \cdot (x^2-4)} \quad D_f = (-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$$

$$379. \quad f(x) = \sqrt{(x^2-1)^2 \cdot (x^2-4)} \quad D_f = (-\infty, -2] \cup \{-1\} \cup \{1\} \cup [2, +\infty)$$

$$380. \quad f(x) = \sqrt{(x-4) \cdot (x-9) \cdot (x-16)} \quad D_f = [4, 9] \cup [16, +\infty)$$

$$381. \quad f(x) = \sqrt{(x-4)^{2026} \cdot (x-9)^{2026} \cdot (x-16)^{2025}} \quad D_f = \{4\} \cup \{9\} \cup [16, +\infty)$$

$$382. \quad f(x) = \sqrt{(x-4)^{2025} \cdot (x-9)^{2025} \cdot (x-16)^{2026}} \quad D_f = (-\infty, 4] \cup [9, +\infty)$$

$$383. \quad f(x) = \sqrt{(x-4)^{2025} \cdot (x-9)^{2026} \cdot (x-16)^{2025}} \quad D_f = (-\infty, 4] \cup \{9\} \cup [16, +\infty)$$

$$384. \quad f(x) = \sqrt{(x-4) \cdot (x-9) \cdot (x^2-16)} \quad D_f = (-\infty, -4] \cup \{4\} \cup [9, +\infty)$$

$$385. \quad f(x) = \sqrt{(x-4) \cdot (x^2-9) \cdot (x^2-16)} \quad D_f = [-4, -3] \cup [3, +\infty)$$

$$386. \quad f(x) = \sqrt{(x^2-4) \cdot (x^2-9) \cdot (x^2-16)} \quad D_f = \\ = (-\infty, -4] \cup [-3, -2] \cup [2, 3] \cup [4, +\infty)$$

$$387. \quad f(x) = \sqrt{(x^2-4) \cdot (x^2-9) \cdot (x^4-16)} \quad D_f = (-\infty, -3] \cup \{-2\} \cup \{2\} \cup [3, +\infty)$$

$$388. \quad f(x) = \sqrt{(3 - \log_2 x) \cdot (5 - \log_2 x) \cdot (3 - \log_3 x)} \quad D_f = (0, 8] \cup [27, 32]$$

$$389. \quad f(x) = \sqrt{(3 - \log_2 x) \cdot (2 - \log_5 x) \cdot (3 - \log_3 x)} \quad D_f = (0, 8] \cup [25, 27]$$

$$390. \quad f(x) = \sqrt{(3 - \log_4 x) \cdot (6 - \log_2 x) \cdot (3 - \log_3 x)} \quad D_f = (0, 27] \cup \{64\}$$

$$391. \quad f(x) = \sqrt{\log_2 \log_3 x} \quad D_f = [3, +\infty)$$

$$392. \quad f(x) = \sqrt{\log_3 \log_2 x} \quad D_f = [2, +\infty)$$

$$393. \quad f(x) = \sqrt{\log_5 \log_3 \log_2 x} \quad D_f = [8, +\infty)$$

$$394. \quad f(x) = \sqrt{\log_3 \log_2 \log_5 x} \quad D_f = [25, +\infty)$$

$$395. \quad f(x) = \log_2 \log_x 256 \quad D_f = (1, +\infty)$$

$$396. \quad f(x) = \log_2 \log_2 \log_x 256 \quad D_f = (1, 256)$$

$$397. \quad f(x) = \log_2 \log_2 \log_2 \log_x 256 \quad D_f = (1, 16)$$

398. $f(x) = \log_2 \log_2 \log_2 \log_2 \log_x 256 \qquad D_f = (1, 4)$

399. $f(x) = \log_2 \log_2 \log_2 \log_2 \log_x 256 \qquad D_f = (1, \sqrt{2})$

400. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = -\frac{25x}{24} + \frac{\sqrt{49x^2 + 37}}{24}.$$

Udowodnij, że f jest odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Wykres funkcji f jest krzywą o równaniu

$$y = -\frac{25x}{24} + \frac{\sqrt{49x^2 + 37}}{24},$$

czyli

$$24y + 25x = \sqrt{49x^2 + 37}.$$

Z powyższego równania wynika

$$24y + 24x = \sqrt{49x^2 + 37} - x \geq \sqrt{49x^2 + 37} - |x| = \sqrt{49x^2 + 37} - \sqrt{x^2} > 0,$$

a z podobnego równania

$$24y + 25x = -\sqrt{49x^2 + 37}$$

dochodzimy do

$$24y + 24x = -\sqrt{49x^2 + 37} - x \leq -\sqrt{49x^2 + 37} + |x| = -\sqrt{49x^2 + 37} + \sqrt{x^2} < 0.$$

Zatem równanie wykresu funkcji f można podnieść do kwadratu uzupełniając je nierównością $x + y > 0$. Otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} 576y^2 + 1200xy + 625x^2 &= 49x^2 + 37, & x + y > 0 \\ 576y^2 + 1200xy + 576x^2 &= 37, & x + y > 0 \end{aligned}$$

Z uwagi na symetrię występowania x oraz y w powyższym warunku, wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $x = y$, co oznacza, że funkcja f jest funkcją odwrotną do samej siebie.

401. Wyznacz wszystkie wartości rzeczywiste parametru a , dla których funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = ax + \sqrt{x^2 + 1}$$

jest odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Ponieważ $f(0) = 1$ oraz $f(1) = a + \sqrt{2}$, funkcja f ma szansę być odwrotną do samej siebie tylko wtedy, gdy

$$0 = f(f(0)) = a + \sqrt{2},$$

czyli tylko dla $a = -\sqrt{2}$.

Wykażemy, że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = -\sqrt{2} \cdot x + \sqrt{x^2 + 1}$$

jest odwrotna do samej siebie.

Wykres funkcji f jest krzywą¹ o równaniu

$$y = -\sqrt{2} \cdot x + \sqrt{x^2 + 1},$$

czyli

$$y + \sqrt{2} \cdot x = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Z powyższego równania wynika

$$\begin{aligned} y + x &= \sqrt{x^2 + 1} - (\sqrt{2} - 1) \cdot x \geq \sqrt{x^2 + 1} - (\sqrt{2} - 1) \cdot |x| > \sqrt{x^2} - (\sqrt{2} - 1) \cdot |x| = \\ &= |x| - (\sqrt{2} - 1) \cdot |x| = (2 - \sqrt{2}) \cdot |x| \geq 0, \end{aligned}$$

natomiast z podobnego równania

$$y + \sqrt{2} \cdot x = -\sqrt{x^2 + 1} \tag{\diamond}$$

dochodzimy do

$$\begin{aligned} y + x &= -\sqrt{x^2 + 1} - (\sqrt{2} - 1) \cdot x \leq -\sqrt{x^2 + 1} + (\sqrt{2} - 1) \cdot |x| < -\sqrt{x^2} + (\sqrt{2} - 1) \cdot |x| = \\ &= -|x| + (\sqrt{2} - 1) \cdot |x| = (\sqrt{2} - 2) \cdot |x| \leq 0. \end{aligned}$$

Podsumujmy:

$$y + \sqrt{2} \cdot x = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow x + y > 0$$

oraz

$$y + \sqrt{2} \cdot x = -\sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow x + y < 0,$$

a więc w równaniu

$$y + \sqrt{2} \cdot x = \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

znak " $\pm$ " jest taki sam jak znak liczby $x + y$.

Idea powyższych oszacowań jest następująca: W wyrażeniu

$$\pm \sqrt{x^2 + 1} - (\sqrt{2} - 1) \cdot x,$$

które jest równe sumie $x + y$, pierwszy składnik ma większą wartość bezwzględną niż drugi, a więc znak całego wyrażenia (czyli znak $x + y$) będzie taki sam jak znak pierwszego składnika, czyli jak znak " $\pm$ ".

Zatem równanie $(\heartsuit)$ wykresu funkcji f można podnieść do kwadratu uzupełniając je nierównością $x + y > 0$, gdyż nierówność ta wymusza, aby pierwiastek był ze znakiem plus, a nie minus.

Otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} y^2 + 2\sqrt{2} \cdot xy + 2x^2 &= x^2 + 1, & x + y > 0 \\ y^2 + 2\sqrt{2} \cdot xy + x^2 &= 1, & x + y > 0 \end{aligned}$$

Z uwagi na symetrię występowania x oraz y w powyższym warunku, wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $y = x$, co oznacza, że funkcja f jest funkcją odwrotną do samej siebie.

Odpowiedź: Jediną wartością parametru spełniającą warunki zadania jest $a = -\sqrt{2}$.

¹Z uzyskanej w dalszej części rozwiązania postaci równania tej krzywej można stwierdzić, że krzywa ta jest hiperbolą. A dokładniej jest jedną gałęzią hiperboli, podczas gdy druga gałąź jest opisywana przez równanie $(\diamond)$.

402. Wyznacz wszystkie wartości rzeczywiste parametru a , dla których funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+2}$$

jest odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Identyczne jak w zadaniu poprzednim, gdyż zmiana 1 na 2 pod pierwiastkiem nie wpływa na tok rozumowania.

Odpowiedź: Jediną wartością parametru spełniającą warunki zadania jest $a=-\sqrt{2}$.

W każdym z poniższych 10 zadań dla podanej liczby a podaj taką liczbę b , że funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=a|x|+bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x))=x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

403. $a=1,$

$b=-\sqrt{2}$
404. $a=-1,$

$b=-\sqrt{2}$
405. $a=2,$

$b=-\sqrt{5}$
406. $a=-2,$

$b=-\sqrt{5}$
407. $a=3,$

$b=-\sqrt{10}$
408. $a=-3,$

$b=-\sqrt{10}$
409. $a=3/4,$

$b=-5/4$
410. $a=-3/4,$

$b=-5/4$
411. $a=4/3,$

$b=-5/3$
412. $a=-4/3,$

$b=-5/3$

413. Wiadomo, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między podanymi niżej wzorami i wykresami funkcji na kolejnych stronach. W każdym z zadań **413.a-413.j** podaj numer rysunku, na którym znajduje się wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem.

Przypomnienie: $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

- 413.a. $f(x)=\{|x|\}$

5

413.b. $f(x)=\{x\}^2$

1
- 413.c. $f(x)=\{|x|\}^2$

4

413.d. $f(x)=\sqrt{\{x\}}$

8
- 413.e. $f(x)=\sqrt{\{|x|\}}$

7

413.f. $f(x)=\{\sqrt{|x|}\}$

6
- 413.g. $f(x)=\sqrt[5]{\{x\}}$

9

413.h. $f(x)=\{\sqrt[5]{x}\}$

10
- 413.i. $f(x)=\{x\}^5$

2

413.j. $f(x)=\{|x|\}^5$

3