

Kolokwium nr 5: czwartek 4.12.2025, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 0–443.

Ciągłość funkcji.

Zadania komputerowe do samodzielnego rozwiązania
z wykorzystaniem rysunków w Desmosie¹.

414. Dla których liczb naturalnych parzystych n wykres funkcji

$$f(x) = 2^x$$

przecina w naszym Wszechświecie wykres funkcji

$$g(x) = x^n + 4,$$

jeżeli za jednostkę na osiach przyjmiemy 1 cm? Przyjmij promień Wszechświata równy 10^{28} cm.

Najpierw spróbuj to oszacować przyjmując $2^{10} \approx 1000$, a potem sprawdź to na rysunku 9 dobierając eksperymentalnie wartość n . Zwróć uwagę na skalę logarytmiczną na osi y .

415. Udowodnij, że równanie

$$x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos x$$

ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

Zrób odręcznie rysunek ilustrujący to zadanie, a następnie porównaj z rysunkiem 10.

=====

Zadania do omówienia² na ćwiczeniach w czwartek 27.11.2025 i piątek 28.11.2025.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

416. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+10^4}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant \frac{|x-y|}{20}.$$

417. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+1}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant |x-y|.$$

418. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^4+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant \frac{|x-y|}{20}.$$

¹Linki do rysunków znajdują się na stronie wykładu.

²Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

419. Niech funkcja $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt[16]{x}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [1, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{16}.$$

420. Niech funkcja $f : [3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [3, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{25}.$$

421. Niech funkcja $f : [16, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [16, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{128}.$$

422. Niech funkcja $f : [8, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$.
Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

- a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/60$.
- b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/80$.

423. Niech funkcja $f : [25, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt{x}$.
Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

- a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/10$.
- b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/12$.

424. Dla funkcji $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = x^2$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y|.$$

425. Dla funkcji $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y|.$$

426. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 10^8}.$$

Dla wybranych przez siebie liczb rzeczywistych x, y udowodnić nierówność

$$|f(x) - f(y)| > 0,6 \cdot |x - y|.$$

427. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot |x-y|,$$

a dla każdych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunek $|x-y|\geqslant 10$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant |x-y|.$$

Dowieść, że

$$|f(6)-f(0)|\leqslant 50.$$

428. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot |x-y| \quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+5)-f(x)|\leqslant 5 \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$|f(8)-f(0)|\leqslant 35,$
 $|f(8)-f(0)|\leqslant 30.$

(wersja łatwiejsza)
(wersja trudniejsza)

429. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot |x-y| \quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+10)-f(x)|\leqslant 10 \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$|f(17)-f(0)|\leqslant 80,$
 $|f(17)-f(0)|\leqslant 50.$

(wersja łatwiejsza)
(wersja trudniejsza)

430. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant (x-y)^2.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

431. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant |x-y|^{1,001}.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

432. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant \frac{1}{(x-y)^2+1}.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

433. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[16]{x^2 + 10^{16}}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{80\,000\,000}.$$

Opisać, jak wygląda wykres funkcji f .

434. Dowieść, że równanie $\cos x = x$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

435. Dowieść, że równanie $\cos x = x^2$ ma co najmniej dwa rozwiązania.

436. Dowieść, że równanie

$$x^{2025} + x = 2025$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

437. Dowieść, że równanie

$$x^{1\,000\,000} + 2 = (1,000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

Jak wyglądają wykresy obu stron równania jako funkcji zmiennej x ?

438. Rozważamy funkcję $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{x}.$$

Udowodnić, że funkcja f nie spełnia warunku Lipschitza³.

439. Udowodnić, że funkcja z poprzedniego zadania jest jednostajnie ciągła. W tym celu udowodnić, że dla każdych $x, y \geq 0$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt[4]{|x - y|}.$$

Jak wygląda dobór δ do ε w definicji (jednostajnej) ciągłości?

Jak wygląda dobór δ do ε w definicji (jednostajnej) ciągłości dla funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o której wiemy, że dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi podana nierówność?

- 440.** $|f(x) - f(y)| \leq 3 \cdot \sqrt{|x - y|}$
- 441.** $|f(x) - f(y)| \leq 5 \cdot \sqrt[3]{|x - y|}$
- 442.** $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt[2025]{|x - y|}$
- 443.** $|f(x) - f(y)| \leq 512 \cdot |x - y|^{9/10}$

³Mówimy, że funkcja f spełnia warunek Lipschitza, jeżeli istnieje taka stała C , że dla każdych $x, y \in D_f$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$