

416. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+10^4}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant \frac{|x-y|}{20}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4-b^4=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right),$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)}.$$

Przyjmując $a=\sqrt[4]{x^2+10^4}$ oraz $b=\sqrt[4]{y^2+10^4}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &= \left|\sqrt[4]{x^2+10^4}-\sqrt[4]{y^2+10^4}\right|= \\ &= \left|\frac{(x^2+10^4)-(y^2+10^4)}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}\right|= \\ &= \frac{|x^2-y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}= \\ &= \frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}. \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4},$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}}<1.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}}\leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{0+10^4}+\sqrt[4]{0+10^4}}=\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} &\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}= \\ &= |x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}}\leqslant |x-y|\cdot\frac{1}{20}\cdot 1=\frac{|x-y|}{20}. \end{aligned}$$

417. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+1}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2),$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[4]{x^4 + 1}$ oraz $b = \sqrt[4]{y^4 + 1}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[4]{y^4 + 1} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^4 + 1) - (y^4 + 1)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}\right)} \right| = \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{|x^4 - y^4|}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}\right)} = \\ &= \frac{|x^2 - y^2| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}\right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}\right)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{y^4} < \sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}} < 1. \tag{3}$$

Podobnie, wykorzystując równość $x^2 = \sqrt{x^4}$ otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^4} + \sqrt{y^4} < \sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1},$$

skąd

$$\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}} < 1. \tag{4}$$

Połączenie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} &\frac{|x - y| \cdot |x + y| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}\right)} = \\ &= |x - y| \cdot \frac{|x + y|}{\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}} \cdot \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}} \leq |x - y| \cdot 1 \cdot 1 = |x - y|. \end{aligned}$$

418. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^4+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant \frac{|x-y|}{20}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$\begin{aligned}a^8-b^8&= (a^4-b^4)\cdot (a^4+b^4)= (a^2-b^2)\cdot (a^2+b^2)\cdot (a^4+b^4)=\\&= (a-b)\cdot (a+b)\cdot (a^2+b^2)\cdot (a^4+b^4),\end{aligned}$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot (a^2+b^2)\cdot (a^4+b^4)}.$$

Przyjmując $a=\sqrt[8]{x^4+10^8}$ oraz $b=\sqrt[8]{y^4+10^8}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&= \left|\sqrt[8]{x^4+10^8}-\sqrt[8]{y^4+10^8}\right|=\\&= \left|\frac{(x^4+10^8)-(y^4+10^8)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot \left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot \left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}\right|=\\&= \frac{|x^4-y^4|}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot \left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot \left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}=\\&= \frac{|x-y|\cdot |x+y|\cdot (x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot \left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot \left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}.\end{aligned}\tag{1}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|=\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{y^4}<\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8},$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}}<1.\tag{2}$$

Z kolei równość $x^2=\sqrt{x^4}$ prowadzi do:

$$x^2+y^2=\sqrt{x^4}+\sqrt{y^4}<\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8},$$

skąd

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}}<1.\tag{3}$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}}\leqslant \frac{1}{\sqrt[8]{0+10^8}+\sqrt[8]{0+10^8}}=\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}.\tag{4}$$

Zastosowanie nierówności (2), (3) i (4) do (1) pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot |x+y|\cdot (x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot \left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot \left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}=$$

$$\begin{aligned} &= |x-y| \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{x^4+10^8} + \sqrt[8]{y^4+10^8}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+10^8} + \sqrt[4]{y^4+10^8}} \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+10^8} + \sqrt{y^4+10^8}} \leqslant \\ &\leqslant |x-y| \cdot \frac{1}{20} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{|x-y|}{20}. \end{aligned}$$

419. Niech funkcja $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt[16]{x}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [1, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{16}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności stosując czterokrotnie wzór na różnicę kwadratów¹, a następnie szacujemy korzystając z nierówności $x, y \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[16]{x} - \sqrt[16]{y} \right| = \frac{|x-y|}{\left(\sqrt[16]{x} + \sqrt[16]{y} \right) \cdot \left(\sqrt[8]{x} + \sqrt[8]{y} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \right) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} \right)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{|x-y|}{\left(\sqrt[16]{1} + \sqrt[16]{1} \right) \cdot \left(\sqrt[8]{1} + \sqrt[8]{1} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{1} \right) \cdot \left(\sqrt{1} + \sqrt{1} \right)} = \frac{|x-y|}{16}, \end{aligned}$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x, y \geqslant 1$.

420. Niech funkcja $f : [3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [3, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{25}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geqslant 3$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} \right| = \left| \frac{y^3 - x^3}{x^3 y^3} \right| = \frac{|x-y| \cdot (x^2 + xy + y^2)}{x^3 y^3} = \\ &= |x-y| \cdot \left(\frac{x^2}{x^3 y^3} + \frac{xy}{x^3 y^3} + \frac{y^2}{x^3 y^3} \right) = |x-y| \cdot \left(\frac{1}{xy^3} + \frac{1}{x^2 y^2} + \frac{1}{x^3 y} \right) \leqslant \\ &\leqslant |x-y| \cdot \left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} \right) = |x-y| \cdot \frac{3}{3^4} = |x-y| \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{|x-y|}{27} \leqslant \frac{|x-y|}{25}, \end{aligned}$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x, y \geqslant 3$.

421. Niech funkcja $f : [16, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [16, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{128}.$$

¹Można również zastosować ogólny wzór na różnicę n -tych potęg dla $n = 16$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 16$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \right| = \frac{|\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}|}{\sqrt[4]{xy}} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{\sqrt[4]{xy} \cdot (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})} = \\ &= \frac{|x - y|}{\sqrt[4]{xy} \cdot (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})} \leq \frac{|x - y|}{\sqrt[4]{16 \cdot 16} \cdot (\sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{16}) \cdot (\sqrt{16} + \sqrt{16})} = \\ &= \frac{|x - y|}{4 \cdot (2 + 2) \cdot (4 + 4)} = \frac{|x - y|}{128}, \end{aligned}$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x, y \geq 16$.

422. Niech funkcja $f : [8, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/60$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 8$:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{xy} \leq \frac{|x - y|}{8 \cdot 8} = \frac{|x - y|}{64} \leq \frac{|x - y|}{60},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C = 1/60$ i dowolnych $x, y \geq 8$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/80$.

Rozwiązanie:

Dla $x = 8$ oraz $y = 9$ mamy $|x - y| = 1$ oraz

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{72} > \frac{|x - y|}{80},$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x, y \geq 8$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C = 1/80$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$.

423. Niech funkcja $f : [25, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/10$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 25$:

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x - y|}{\sqrt{25} + \sqrt{25}} = \frac{|x - y|}{5 + 5} = \frac{|x - y|}{10},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C = 1/10$ i dowolnych $x, y \geq 25$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/12$.

Rozwiązanie:

Dla $x = 25$ oraz $y = 36$ mamy $|x - y| = 11$ oraz

$$|f(x) - f(y)| = 1 = \frac{|x - y|}{11} > \frac{|x - y|}{12},$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x, y \geq 25$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C = 1/12$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$.

424. Dla funkcji $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = x^2$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Z równości

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = (x + y) \cdot |x - y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek

$$x + y > 100.$$

Możemy więc wskazać $x = 50, y = 51$.

425. Dla funkcji $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Z równości

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{xy} \cdot |x - y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek

$$\frac{1}{xy} > 100,$$

czyli

$$xy < \frac{1}{100}.$$

Możemy więc wskazać $x = 1/10, y = 1/11$.

426. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 10^8}.$$

Dla wybranych przez siebie liczb rzeczywistych x, y udowodnić nierówność

$$|f(x) - f(y)| > 0,6 \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów prowadzi do

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8}} = |x - y| \cdot \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8}}.$$

Dana w treści zadania nierówność będzie spełniona, jeżeli $x \neq y$ oraz

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8}} > 0,6. \tag{1}$$

Dla uzyskania nierówności (1) wystarczy przyjąć, że x i y są różnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi warunki

$$x > 0,6 \cdot \sqrt{x^2 + 10^8} \tag{2}$$

oraz

$$y > 0,6 \cdot \sqrt{y^2 + 10^8}. \tag{3}$$

Przekształcanie nierówności (2) prowadzi (przy założeniu dodatniości x) do nierówności równoważnych:

$$\begin{aligned} x^2 &> 0,6^2 \cdot x^2 + 0,6^2 \cdot 10^8, \\ 0,64 \cdot x^2 &> 0,36 \cdot 10^8, \\ x^2 &> \frac{0,36 \cdot 10^8}{0,64}, \\ x^2 &> \frac{36 \cdot 10^8}{64}, \\ x &> \frac{6 \cdot 10^4}{8}, \\ x &> \frac{3 \cdot 10^4}{4}, \\ x &> 7500. \end{aligned}$$

Analogicznie nierówność (3) jest równoważna nierówności $y > 7500$.

Dana w treści zadania nierówność jest więc prawdziwa dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y większych od 7500, np. dla $x = 7501$ i $y = 7502$.

427. Dana jest taka funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 10 \cdot |x - y|,$$

a dla każdych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunek $|x - y| \geqslant 10$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|.$$

Dowieść, że

$$|f(6) - f(0)| \leqslant 50.$$

Rozwiązanie:

Teza zadania wynika z następujących nierówności, wykorzystujących nierówność trójkąta oraz założenia o funkcji f :

$$\begin{aligned} |f(6) - f(0)| &= |f(6) - f(10) + f(10) - f(0)| \leq |f(6) - f(10)| + |f(10) - f(0)| \leq \\ &\leq 10 \cdot |6 - 10| + |10 - 0| = 40 + 10 = 50. \end{aligned}$$

428. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x) - f(y)| \leq 10 \cdot |x - y| \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x + 5) - f(x)| \leq 5 \quad \text{dla dowolnego } x \in \mathbb{R}.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$|f(8) - f(0)| \leq 35,$
 $|f(8) - f(0)| \leq 30.$

(wersja łatwiejsza)
(wersja trudniejsza)

Rozwiązanie:

Wersja łatwiejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(5) - f(0)| \leq 5$$

oraz

$$|f(8) - f(5)| \leq 10 \cdot |8 - 5| = 30.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych dwóch nierówności otrzymujemy

$$|f(8) - f(0)| = |(f(8) - f(5)) + (f(5) - f(0))| \leq |f(8) - f(5)| + |f(5) - f(0)| \leq 30 + 5 = 35,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Wersja trudniejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$\begin{aligned} |f(5) - f(0)| &\leq 5, \\ |f(10) - f(5)| &\leq 5 \end{aligned}$$

oraz

$$|f(8) - f(10)| \leq 10 \cdot |8 - 10| = 20.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych trzech nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} |f(8) - f(0)| &= |(f(8) - f(10)) + (f(10) - f(5)) + (f(5) - f(0))| \leq \\ &\leq |f(8) - f(10)| + |f(10) - f(5)| + |f(5) - f(0)| \leq 20 + 5 + 5 = 30, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

429. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x) - f(y)| \leq 10 \cdot |x - y| \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+10) - f(x)| \leq 10 \quad \text{dla dowolnego } x \in \mathbb{R}.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(17) - f(0)| \leq 80, \qquad \qquad \qquad \text{(wersja łatwiejsza)}$$

$$|f(17) - f(0)| \leq 50. \qquad \qquad \qquad \text{(wersja trudniejsza)}$$

Rozwiązanie:

Wersja łatwiejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(10) - f(0)| \leq 10$$

oraz

$$|f(17) - f(10)| \leq 10 \cdot |17 - 10| = 70.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych dwóch nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} |f(17) - f(0)| &= |(f(17) - f(10)) + (f(10) - f(0))| \leq \\ &\leq |f(17) - f(10)| + |f(10) - f(0)| \leq 70 + 10 = 80, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Wersja trudniejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(10) - f(0)| \leq 10,$$

$$|f(20) - f(10)| \leq 10$$

oraz

$$|f(17) - f(20)| \leq 10 \cdot |17 - 20| = 30.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych trzech nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} |f(17) - f(0)| &= |(f(17) - f(20)) + (f(20) - f(10)) + (f(10) - f(0))| \leq \\ &\leq |f(17) - f(20)| + |f(20) - f(10)| + |f(10) - f(0)| \leq 30 + 10 + 10 = 50, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

430. Dana jest taka funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

Rozwiązanie:

Ustalmy dowolne liczby rzeczywiste x, y . Dla dowolnej liczby naturalnej n przyjmijmy

$$\begin{aligned} t_0 = x, \quad t_1 = x + \frac{y-x}{n}, \quad t_2 = x + 2 \cdot \frac{y-x}{n}, \quad t_3 = x + 3 \cdot \frac{y-x}{n}, \quad t_4 = x + 4 \cdot \frac{y-x}{n}, \quad \dots \\ \dots, \quad t_{n-2} = x + (n-2) \cdot \frac{y-x}{n}, \quad t_{n-1} = x + (n-1) \cdot \frac{y-x}{n}, \quad t_n = x + n \cdot \frac{y-x}{n} = y. \end{aligned}$$

Powyższe punkty dzielą odcinek osi liczbowej od x do y na n równych części.

$$\begin{aligned} |f(t_1) - f(t_2)| &\leq (t_1 - t_2)^{1,001} = \left(\frac{y-x}{n}\right)^{1,001} = \frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}, \\ |f(t_2) - f(t_3)| &\leq (t_2 - t_3)^{1,001} = \left(\frac{y-x}{n}\right)^{1,001} = \frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}, \\ &\dots\dots\dots \\ |f(t_{n-2}) - f(t_{n-1})| &\leq (t_{n-2} - t_{n-1})^{1,001} = \left(\frac{y-x}{n}\right)^{1,001} = \frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}, \\ |f(t_{n-1}) - f(t_n)| &\leq (t_{n-1} - t_n)^{1,001} = \left(\frac{y-x}{n}\right)^{1,001} = \frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}. \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} &|f(x) - f(y)| = \\ &= |(f(t_0) - f(t_1)) + (f(t_1) - f(t_2)) + (f(t_2) - f(t_3)) + \dots + (f(t_{n-1}) - f(t_n))| \leq \\ &\leq |f(t_0) - f(t_1)| + |f(t_1) - f(t_2)| + |f(t_2) - f(t_3)| + \dots + |f(t_{n-1}) - f(t_n)| \leq \\ &\leq \frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}} + \frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}} + \frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}} + \dots + \frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}} = \frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1/1000}}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1/1000}}$$

prawdziwą dla dowolnej liczby naturalnej n . Ponieważ lewa strona tej nierówności jest nieujemna i nie zależy od n , a prawa może osiągać dowolnie małe wartości dodatnie, otrzymujemy $|f(x) - f(y)| = 0$. Stąd wynika, że $f(x) = f(y)$, a w konsekwencji f jest funkcją stałą.

432. Dana jest taka funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{(x-y)^2 + 1}.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

Rozwiązanie:
Ustalmy dowolne liczby rzeczywiste $x < y$. Dla dowolnej liczby naturalnej n przyjmijmy $z_n = y + \frac{1}{n}$. Wówczas na mocy założenia o funkcji f oraz nierówności trójkąta otrzymujemy

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(z_n)| + |f(z_n) - f(y)| \leq \frac{1}{(x - z_n)^2 + 1} + \frac{1}{(z_n - y)^2 + 1} < \\ &< \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{2}{n^2 + 1}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{n^2 + 1}$$

prawdziwą dla dowolnej liczby naturalnej n . Ponieważ lewa strona tej nierówności jest nieujemna i nie zależy od n , a prawa może osiągać dowolnie małe wartości dodatnie, otrzymujemy $|f(x) - f(y)| = 0$. Stąd wynika, że $f(x) = f(y)$, a w konsekwencji f jest funkcją stałą.