

Kolokwium nr 6: czwartek 18.12.2025, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 0–616.

Zadania do omówienia¹ na ćwiczeniach

w czwartek 4.12.2025, piątek 5.12.2025, czwartek 11.12.2025 i piątek 12.12.2025.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Granica funkcji.

Zadania komputerowe do samodzielnego rozwiązania
z wykorzystaniem rysunków w Desmosie².

444. Korzystając z rysunku 11 dobierz eksperymentalnie takie a , aby funkcja

$$f(x) = \{x\} + a \cdot \{x\}^2$$

była ciągła.

445. Korzystając z rysunku 12 dobierz eksperymentalnie takie a i b , aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{dla } x \leq 2 \\ ax + b & \text{dla } 2 < x < 3 \\ 2^x & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$$

była ciągła.

446. Korzystając z rysunku 13 znajdź eksperymentalnie asymptoty funkcji

$$f(x) = \log_{32}(8^x + 16^x) \, .$$

Modyfikując wzór na funkcję f zrób to samo dla funkcji

$$f(x) = \log_{32}(8^{-x} + 16^x) \, .$$

447. Korzystając z rysunku 14 znajdź eksperymentalnie asymptoty funkcji

$$f(x) = \sqrt[n]{x^n + 6x^{n-1}}$$

dla $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

448. Korzystając z rysunku 15 znajdź eksperymentalnie asymptoty złożenia dwóch egzemplarzy funkcji

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} \, ,$$

czyli $f \circ f$. Modyfikując odpowiedni wzorek powtórz to samo dla $f \circ f \circ f$ oraz $f \circ f \circ f \circ f$.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach.

449. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x\}^2 + c \cdot \{x\} \, ,$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

¹Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.
²Linki do rysunków znajdują się na stronie wykładu.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

- a) $a = 1, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = \dots\dots\dots$
- b) $a = \dots\dots\dots, \quad b = 2, \quad c = \dots\dots\dots$
- c) $a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = 3$
- d) $a = 2, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = \dots\dots\dots$
- e) $a = \dots\dots\dots, \quad b = 3, \quad c = \dots\dots\dots$
- f) $a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = 5$

450. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{x\} + c \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

- a) $a = 1, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = \dots\dots\dots$
- b) $a = \dots\dots\dots, \quad b = 2, \quad c = \dots\dots\dots$
- c) $a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = 3$
- d) $a = 4, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = \dots\dots\dots$
- e) $a = \dots\dots\dots, \quad b = 5, \quad c = \dots\dots\dots$
- f) $a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = 6$

451. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{dla } x < 0 \\ dx + e & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } 1 \leq x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

- a) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = \dots\dots\dots, \quad e = \dots\dots\dots$
- b) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = \dots\dots\dots, \quad d = 4, \quad e = \dots\dots\dots$
- c) $a = 1, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = \dots\dots\dots, \quad d = 4, \quad e = 5$
- d) $a = \dots\dots\dots, \quad b = 7, \quad c = 8, \quad d = 9, \quad e = \dots\dots\dots$
- e) $a = 6, \quad b = 7, \quad c = \dots\dots\dots, \quad d = \dots\dots\dots, \quad e = 10$
- f) $a = 6, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = 8, \quad d = 9, \quad e = \dots\dots\dots$

452. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{x\} + b \cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b) , dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

453. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x + 1\} + c \cdot \{x\} + d \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

- a) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = \dots\dots\dots, \quad d = \dots\dots\dots$
- b) $a = \dots\dots\dots, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = \dots\dots\dots$
- c) $a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = 3, \quad d = 4$
- d) $a = 2, \quad b = 3, \quad c = \dots\dots\dots, \quad d = \dots\dots\dots$
- e) $a = \dots\dots\dots, \quad b = 3, \quad c = 6, \quad d = \dots\dots\dots$
- f) $a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = 6, \quad d = 6$

454. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a\{x\}^3 + b\{x\}^2 + c\{x\} + d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

- a) $a = \dots\dots\dots, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = 4$
- b) $a = 1, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = 3, \quad d = 4$
- c) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = \dots\dots\dots, \quad d = 4$
- d) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = \dots\dots\dots$

455. Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b) , gdzie $a < b$, dla których funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 5| & \text{dla } a \leq x < b \\ 4 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

456.

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 3 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$

457.

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 4 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$

458.

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 5 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$

459.

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 6 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$

460.

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 7 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$

461. Podać wszystkie trzy pary parametrów (a, b) , gdzie $a < b$, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < a \\ x^3 & \text{dla } a \leq x < b \\ x & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$

$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$

$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$

462. Podać wszystkie sześć par parametrów (a, b) , gdzie $a < b$, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 10x + 15| & \text{dla } a \leq x < b \\ 6 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$

$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$

$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$

$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$

$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$

$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

463.

$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ 1 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$

$a = \dots\dots\dots,$

$b = \dots\dots\dots$

464.

$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$

$a = \dots\dots\dots,$

$b = \dots\dots\dots$

465.

$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x+2 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$

$a = \dots\dots\dots,$

$b = \dots\dots\dots$

466.

$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x+6 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$

$a = \dots\dots\dots,$

$b = \dots\dots\dots$

467.

$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ 2x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$

$a = \dots\dots\dots,$

$b = \dots\dots\dots$

W każdym z trzech poniższych zadań podaj takie trzy pary liczb rzeczywistych $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

468.

$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla } x < a \\ 64x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^3 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$

$a = \dots\dots\dots,$

$b = \dots\dots\dots$

$a = \dots\dots\dots,$

$b = \dots\dots\dots$

$a = \dots\dots\dots,$

$b = \dots\dots\dots$

469.

$f(x) = \begin{cases} x^6 & \text{dla } x < a \\ 64x^2 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^6 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$

$a = \dots\dots\dots,$

$b = \dots\dots\dots$

$a = \dots\dots\dots,$

$b = \dots\dots\dots$

$a = \dots\dots\dots,$

$b = \dots\dots\dots$

470.

$f(x) = \begin{cases} x^9 & \text{dla } x < a \\ 64x^3 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^9 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$

$a = \dots\dots\dots,$

$b = \dots\dots\dots$

$a = \dots\dots\dots,$

$b = \dots\dots\dots$

$a = \dots\dots\dots,$

$b = \dots\dots\dots$

W każdym z poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji lub granicy niewłaściwej $+\infty=\infty$ albo $-\infty$. Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Możesz wykorzystać granicę

$$\lim_{x\rightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

471. $\lim_{x\rightarrow 0^+}\log(\sqrt{17}-3)x=$

473. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\log(\sqrt{17}-3)x=$

475. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x=$

477. $\lim_{x\rightarrow -\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x=$

479. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\arctg x=$

481. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\arctg\left(\sqrt{17}-4\right)x=$

482. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\arctg\left(\sqrt{13}-4\right)x=$

483. $\lim_{x\rightarrow 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64}=$

485. $\lim_{x\rightarrow 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}=$

487. $\lim_{x\rightarrow 0^-}2^{2^{1/x}}=$

489. $\lim_{x\rightarrow 0^+}2^{2^{2^{1/x}}}=$

491. $\lim_{x\rightarrow +\infty}2^{2^{2^{1/x}}}=$

492. $\lim_{x\rightarrow 16^-}\{\log_4x\}=$

494. $\lim_{x\rightarrow 16^-}\{\log_8x\}=$
472. $\lim_{x\rightarrow 0^+}\log(\sqrt{13}-3)x=$

474. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\log(\sqrt{13}-3)x=$

476. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x=$

478. $\lim_{x\rightarrow -\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x=$

480. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\arctg 2x=$

484. $\lim_{x\rightarrow 64}\frac{x-64}{\sqrt{x}-8}=$

486. $\lim_{x\rightarrow 0^+}2^{2^{1/x}}=$

488. $\lim_{x\rightarrow +\infty}2^{2^{1/x}}=$

490. $\lim_{x\rightarrow 0^-}2^{2^{2^{1/x}}}=$

493. $\lim_{x\rightarrow 16^+}\{\log_4x\}=$

495. $\lim_{x\rightarrow 16^+}\{\log_8x\}=$

496. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \dots\dots\dots$

497. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \dots\dots\dots$

498. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x} = \dots\dots\dots$

499. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x} = \dots\dots\dots$

500. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{5^{4^{3^x}}} = \dots\dots\dots$

501. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{2^{5^{4^x}}} = \dots\dots\dots$

502. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{3^{2^{5^x}}} = \dots\dots\dots$

503. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2(x+32) - \log_2(x+4)) = \dots\dots\dots$

504. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2(32x+1) - \log_2(x+4)) = \dots\dots\dots$

505. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2(32x+1) - \log_2(4x+1)) = \dots\dots\dots$

506. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \dots\dots\dots$

507. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \dots\dots\dots$

508. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \dots\dots\dots$

509. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{x^2+4}} = \dots\dots\dots$

510. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}.$$

511. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}$.

Uwaga: Treść zadania jest poprawna - pod pierwiastkiem niczego nie brakuje - ma być tak jak jest napisane.

512. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x) = x + \sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}$.

513. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \log_4(2^x + 8^x).$$

Wyznaczyć wartości granic ciągów:

514. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)$

515. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2024} \right)$

516. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2024n+1} \right)$

517. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2024}$

518. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2024} \right)^{2024}$

519. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2024n+1} \right)^{2024}$

520. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$

521. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2024n}$

522. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n/2024}$

523. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^{2024}}$

524. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\pi}{n} \right)^n$

525. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n} \right)^n$

526. Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a \cdot \frac{14n+1}{15n+1} \right)^n$$

dla takiej wartości rzeczywistej dodatniej parametru a , aby granica była dodatnia i skończona.

527. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \log_2(2^{2x} - 2^{4x+1} + 2^{6x}).$$

528. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{x}{2}.$$

529. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}.$$

530. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 5x + 4} + |x|.$$

Pochodna funkcji.

Zadania komputerowe do samodzielnego rozwiązania
z wykorzystaniem rysunków w Desmosie³.

531. Korzystając z rysunku 16 znajdź prostą styczną do wykresów obydwu funkcji

$$f(x) = x^2 + 4$$

oraz

$$g(x) = 2 - x^2.$$

Takie proste są dwie, znajdź je obie.

532. Korzystając z rysunku 17 zgadnij, czy funkcja

$$f(x) = \sqrt[n]{\sqrt[n]{x^n + 1} - 1}$$

jest różniczkowalna w zerze dla $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

533. Korzystając z rysunku 18 ustal, ile egzemplarzy funkcji

$$f(x) = \frac{x}{x - 1}$$

trzeba złożyć, aby otrzymać identyczność. Zignoruj pojedyncze punkty wypadające z dziedziny.

534. Korzystając z rysunku 19 ustal, ile egzemplarzy funkcji

$$f(x) = \frac{x - 1}{x}$$

trzeba złożyć, aby otrzymać identyczność. Zignoruj pojedyncze punkty wypadające z dziedziny.

535. Korzystając z rysunku 20 znajdź prostą styczną do wykresu funkcji

$$f(x) = \sin x + \frac{x}{2}$$

w wielu punktach.

536. Korzystając z rysunku 21 dobierz takie a i b , aby funkcja

$$f(x) = \{x\}^3 + a \cdot \{x\}^2 + b \cdot \{x\}$$

wyglądała na różniczkowalną.

537. Korzystając z rysunku 22 dobierz takie a i b , aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{dla } |x| \geq 1 \\ ax^2 + b & \text{dla } |x| < 1 \end{cases}$$

³Linki do rysunków znajdują się na stronie wykładu.

wyglądała na różniczkowalną.

538. Korzystając z rysunku 23 dobierz takie a i b , aby funkcja

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{dla } |x|\geqslant 1 \\ ax^3+bx & \text{dla } |x|<1 \end{cases}$$

wyglądała na różniczkowalną.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach.

539. Korzystając z definicji pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Uwaga: Nie wolno używać reguły de l’Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej. Ta sama uwaga dotyczy kolejnych dwóch zadań.

540. Korzystając z definicji pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x}$ na przedziale $(0,+\infty)$.

541. Korzystając z definicji pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^8+1}$.

W każdym z kolejnych 10 zadań podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

542. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $f'(1)=\dots\dots\dots$ $f'(8)=\dots\dots\dots$ $f'(27)=\dots\dots\dots$

543. $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2}$ $f'(1)=\dots\dots\dots$ $f'(2)=\dots\dots\dots$ $f'(3)=\dots\dots\dots$

544. $f(x)=\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}2$ $f'(1)=\dots\dots\dots$ $f'(2)=\dots\dots\dots$ $f'(3)=\dots\dots\dots$

545. $f(x)=\ln(x^3+1)$ $f'(1)=\dots\dots\dots$ $f'(2)=\dots\dots\dots$ $f'(3)=\dots\dots\dots$

546. $f(x)=\operatorname{arctg}(x^2)$ $f'(1)=\dots\dots\dots$ $f'(2)=\dots\dots\dots$ $f'(3)=\dots\dots\dots$

547. $f(x)=\sqrt{24x+1}$ $f'(0)=\dots\dots\dots$ $f'(1)=\dots\dots\dots$ $f'(2)=\dots\dots\dots$

548. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x+8}$ $f'(-1)=\dots\dots\dots$ $f'(0)=\dots\dots\dots$ $f'(1)=\dots\dots\dots$

549. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2+9}}$ $f'(-1)=\dots\dots\dots$ $f'(0)=\dots\dots\dots$ $f'(1)=\dots\dots\dots$

550. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x^5-x+32}}$ $f'(-1)=\dots\dots\dots$ $f'(0)=\dots\dots\dots$ $f'(1)=\dots\dots\dots$

551. $f(x)=\sqrt{8x+1}\cdot\sqrt[3]{7x^2+1}$ $f'(0)=\dots\dots\dots$ $f'(1)=\dots\dots\dots$ $f'(3)=\dots\dots\dots$

552. Wyznaczyć równanie prostej, która jest styczna do obydwu następujących parabol: paraboli o równaniu $y = x^2$ oraz paraboli o równaniu $y = x^2 - 8x$.

553. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y = x^2 + 2$ oraz do paraboli o równaniu $y = -x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

554. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y = x^2 + 2$ oraz do paraboli o równaniu $y = 2x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

555. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = 1 + x + 2\sqrt{x}.$$

Funkcja g jest złożeniem 100 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))) .$$

Obliczyć $g'(100)$.

556. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^5}$ jest różniczkowalna w zerze.

557. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^6}$ jest różniczkowalna w zerze.

558. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{\sqrt[4]{x^2 + 1} - 1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

559. Wyznaczyć taką wartość rzeczywistą parametru a , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + 1} - 1} + a \cdot \sqrt[4]{\sqrt[4]{x^4 + 1} - 1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

W każdym z kolejnych 7 zadań dla podanej funkcji $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podaj wartości pochodnych jednostronnych funkcji f_i w zerze.

560. $f_1(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

$f_1'(0^-) = \dots\dots\dots$ $f_1'(0^+) = \dots\dots\dots$
561. $f_2(x) = \sqrt{\sqrt{2x^2 + 1} - 1}$

$f_2'(0^-) = \dots\dots\dots$ $f_2'(0^+) = \dots\dots\dots$
562. $f_3(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$

$f_3'(0^-) = \dots\dots\dots$ $f_3'(0^+) = \dots\dots\dots$
563. $f_4(x) = \sqrt{\sqrt{8x^2 + 81} - 9}$

$f_4'(0^-) = \dots\dots\dots$ $f_4'(0^+) = \dots\dots\dots$
564. $f_5(x) = \sqrt{\sqrt[4]{2x^2 + 1} - 1}$

$f_5'(0^-) = \dots\dots\dots$ $f_5'(0^+) = \dots\dots\dots$
565. $f_6(x) = \sqrt{\sqrt[4]{x^2 + 16} - 2}$

$f_6'(0^-) = \dots\dots\dots$ $f_6'(0^+) = \dots\dots\dots$
566. $f_7(x) = \sqrt{\sqrt[4]{8x^2 + 81} - 3}$

$f_7'(0^-) = \dots\dots\dots$ $f_7'(0^+) = \dots\dots\dots$

567. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right).$$

Funkcja g jest złożeniem 2024 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{e})$ jest wymierna.

568. Funkcja $f : Z \rightarrow Z$, gdzie $Z = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{2})$ jest wymierna.

569. Funkcja $f : Z \rightarrow Z$, gdzie $Z = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x}.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{2})$ jest wymierna.

Obliczyć pochodną funkcji zmiennej x o podanym wzorze. Podać, w jakim zbiorze istnieje pochodna.

Uwaga: $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

570. $3x^{33} - 5x + 1$
571. $(\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$
572. $\frac{1 - x^3}{1 + x^3}$
573. $(x^5 + 1)^{20}$
574. $(1 + \sqrt{x}) (1 + x^{1/3}) (1 + x^{1/4})$
575. $\frac{x + 1}{x - 1}$
576. $\frac{x}{x^2 + 1}$
577. $(1 + 2x)^{30}$
578. $\left(\frac{1}{1 + x^2} \right)^{1/3}$
579. $\frac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}$
580. 2^{x+3}
581. $x10^x$
582. $\frac{x}{e^x}$
583. $x^2(x + 1)e^x$
584. e^{x^2}
585. e^{e^x}
586. 10^{2x-3}
587. 2^{3x}
588. $|x|^3$
589. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{10}$
590. $x^5(x^6 - 8)^{1/3}$
591. $e^{2x+3} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right)$
592. $\frac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$
593. $\operatorname{sgn}(x)$
594. 0 dla $x < 0$, x^2 dla $x \geqslant 0$
595. x dla $x < 0$, x^2 dla $x \geqslant 0$
596. $e^{-|x|}$
597. $\sqrt{\sqrt{1 + x^2} - 1}$
598. $\{x\}$
599. $\{x\}^3$
600. e^e
601. $\frac{\pi^{10}}{x - e}$
602. e^x dla $x < 0$, $1 + x$ dla $x \geqslant 0$
603. $x^7 + e^2$
604. $(x + e)^{20}$
605. $\operatorname{sgn}(x^5 - x^3)$
606. $\operatorname{arctg}(x^{2023})$
607. $(\operatorname{arctg} x)^{2023}$
608. $(\operatorname{arctg}(x^{2023}))^{2023}$
609. $(\operatorname{arctg}(x^{2023} + 2023))^{2023}$
610. $(x^2 + 1)^{x^2}$
611. x^{x^x}
612. $e^{e^{e^x}}$
613. $\frac{x^{2023}}{x^{666} + 1729}$
614. $\sqrt[2023]{x}$
615. $\sqrt[666]{x^{37} + 1}$
616. $\frac{x^{666}}{\sqrt[37]{x^2 + 1}}$