

449. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x\}^2 + c \cdot \{x\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, \quad b = -1, \quad c = 0$

b) $a = -2, \quad b = 2, \quad c = 0$

c) $a = \text{NIE}, \quad b = \text{NIE}, \quad c = 3$

d) $a = 2, \quad b = -2, \quad c = 0$

e) $a = -3, \quad b = 3, \quad c = 0$

f) $a = \text{NIE}, \quad b = \text{NIE}, \quad c = 5$

450. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{x\} + c \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, \quad b = -1, \quad c = -1$

b) $a = -2, \quad b = 2, \quad c = 2$

c) $a = -3, \quad b = 3, \quad c = 3$

d) $a = 4, \quad b = -4, \quad c = -4$

e) $a = -5, \quad b = 5, \quad c = 5$

f) $a = -6, \quad b = 6, \quad c = 6$

451. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{dla } x < 0 \\ dx + e & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } 1 \leq x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = 3, \quad e = 3$

b) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = \text{NIE}, \quad d = 4, \quad e = \text{NIE}$

c) $a = 1, \quad b = 3, \quad c = 5, \quad d = 4, \quad e = 5$

d) $a = 2, \quad b = 7, \quad c = 8, \quad d = 9, \quad e = 8$

e) $a = 6, \quad b = 7, \quad c = 10, \quad d = 13, \quad e = 10$

f) $a = 6, \quad b = 3, \quad c = 8, \quad d = 9, \quad e = 8$

452. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{x\} + b \cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b) , dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

Rozwiązanie:

Funkcja f zależy od $\{x\}$, jest więc okresowa z okresem 1. Ponadto f jest ciągła we wszystkich punktach niecałkowitych. Pozostaje zbadać ciągłość funkcji f w punktach całkowitych, a wobec jej okresowości, wystarczy zbadać ciągłość w punkcie 1.

Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + 3b$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = b,$$

funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a + 3b = b,$$

czyli

$$a = -2b.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $a = -2b$.

453. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x + 1\} + c \cdot \{x\} + d \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = -3, \quad d = -3$

b) $a = -5, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = 3$

c) $a = \mathbf{NIE}, \quad b = \mathbf{NIE}, \quad c = 3, \quad d = 4$

d) $a = 2, \quad b = 3, \quad c = -5, \quad d = -5$

e) $a = -9, \quad b = 3, \quad c = 6, \quad d = 6$

f) $a = \mathbf{dowolne}, \quad b = -6 - a, \quad c = 6, \quad d = 6$

454. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a\{x\}^3 + b\{x\}^2 + c\{x\} + d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a = -5, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = 4$

b) $a = 1, \quad b = -4, \quad c = 3, \quad d = 4$

c) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = -3, \quad d = 4$

d) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = \text{NIE}$

455. Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b) , gdzie $a < b$, dla których funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 5| & \text{dla } a \leq x < b \\ 4 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

Rozwiązanie:

Oczywiście funkcja f jest ciągła w każdym punkcie różnym od a i b .

Ponadto

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 4$$

oraz

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = |a^2 - 5|,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4 = |a^2 - 5|.$$

Przekształcanie powyższego równania prowadzi kolejno do

$$a^2 - 5 = \pm 4,$$

$$a^2 = 5 \pm 4,$$

skąd $a \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

Podobnie

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = |b^2 - 5|$$

oraz

$$f(b) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = 4,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie b wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4 = |b^2 - 5|,$$

czyli $b \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

Zatem funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $a, b \in \{-3, -1, 1, 3\}$, co w połączeniu z warunkiem $a < b$ prowadzi do sześciu par (a, b) spełniających warunki zadania.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez pary $(-3, -1)$, $(-3, 1)$, $(-3, 3)$, $(-1, 1)$, $(-1, 3)$, $(1, 3)$.

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

456.

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 3 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = -1, \quad b = 1.$

457.

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 4 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = -3, \quad b = 3.$

458.

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 5 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = -5, \quad b = 5.$

459.

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 6 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = -\sqrt{57}, \quad b = \sqrt{57}.$

460.

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 7 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = -11, \quad b = 11.$

461. Podać wszystkie trzy pary parametrów (a, b) , gdzie $a < b$, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < a \\ x^3 & \text{dla } a \leq x < b \\ x & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

$a = -1, \quad b = 0$

$a = -1, \quad b = 1$

$a = 0, \quad b = 1$

462. Podać wszystkie sześć par parametrów (a, b) , gdzie $a < b$, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 10x + 15| & \text{dla } a \leq x < b \\ 6 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

$a = 1, \quad b = 3$

$a = 1, \quad b = 7$

$a = 1, \quad b = 9$

$a = 3, \quad b = 7$

$a = 3, \quad b = 9$

$a = 7, \quad b = 9$

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

463.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ 1 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = -1, \quad b = 1.$

464.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = 0, \quad b = 1.$

465.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x+2 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = -1, \quad b = 2.$

466.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x+6 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = -2, \quad b = 3.$

467.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ 2x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = 0, \quad b = 2.$

W każdym z trzech poniższych zadań podaj takie trzy pary liczb rzeczywistych $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

468.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla } x < a \\ 64x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^3 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = -8, \quad b = 0$
 $a = -8, \quad b = 8$
 $a = 0, \quad b = 8$

469.

$$f(x) = \begin{cases} x^6 & \text{dla } x < a \\ 64x^2 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^6 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = -2\sqrt{2}, \quad b = 0$
 $a = -2\sqrt{2}, \quad b = 2\sqrt{2}$
 $a = 0, \quad b = 2\sqrt{2}$

470.

$$f(x) = \begin{cases} x^9 & \text{dla } x < a \\ 64x^3 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^9 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

$a = -2, \quad b = 0$
 $a = -2, \quad b = 2$
 $a = 0, \quad b = 2$

W każdym z poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji lub granicy niewłaściwej $+\infty=\infty$ albo $-\infty$. Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Możesz wykorzystać granicę

$$\lim_{x\rightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

471. $\lim_{x\rightarrow 0^+}\log(\sqrt{17}-3)x= -\infty$

473. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\log(\sqrt{17}-3)x= +\infty$

475. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x= +\infty$

477. $\lim_{x\rightarrow -\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x= 0$

479. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\arctg x= \pi/2$

481. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\arctg\left(\sqrt{17}-4\right)x= \pi/2$

482. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\arctg\left(\sqrt{13}-4\right)x= -\pi/2$

483. $\lim_{x\rightarrow 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64}= 1/48$

485. $\lim_{x\rightarrow 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}= 1/3$

487. $\lim_{x\rightarrow 0^-}2^{2^{1/x}}= 1$

489. $\lim_{x\rightarrow 0^+}2^{2^{2^{1/x}}}= +\infty$

491. $\lim_{x\rightarrow +\infty}2^{2^{2^{1/x}}}= 4$

492. $\lim_{x\rightarrow 16^-}\{\log_4x\}= 1$

494. $\lim_{x\rightarrow 16^-}\{\log_8x\}= 1/3$
472. $\lim_{x\rightarrow 0^+}\log(\sqrt{13}-3)x= +\infty$

474. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\log(\sqrt{13}-3)x= -\infty$

476. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x= 0$

478. $\lim_{x\rightarrow -\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x= +\infty$

480. $\lim_{x\rightarrow +\infty}\arctg 2x= \pi/2$

484. $\lim_{x\rightarrow 64}\frac{x-64}{\sqrt{x}-8}= 16$

486. $\lim_{x\rightarrow 0^+}2^{2^{1/x}}= +\infty$

488. $\lim_{x\rightarrow +\infty}2^{2^{1/x}}= 2$

490. $\lim_{x\rightarrow 0^-}2^{2^{2^{1/x}}}= 2$

493. $\lim_{x\rightarrow 16^+}\{\log_4x\}= 0$

495. $\lim_{x\rightarrow 16^+}\{\log_8x\}= 1/3$

496. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2$

497. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = e^3$

498. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x} = e^{e^4}$

499. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x} = e^{e^{27}}$

500. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{5^{4^{3^x}}} = 32$

501. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{2^{5^{4^x}}} = 9$

502. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{3^{2^{5^x}}} = 64$

503. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2(x+32) - \log_2(x+4)) = 0$

504. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2(32x+1) - \log_2(x+4)) = 5$

505. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2(32x+1) - \log_2(4x+1)) = 3$

506. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = e^2$

507. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = e^8$

508. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \sqrt{e}$

509. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt[4]{e}$

510. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4 + x^3 + x^2 = x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4} + \frac{3 \cdot x^2}{4} = \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3 \cdot x^2}{4} \geq 0,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{\frac{x^4 + x^3 + x^2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^4 + x^3 + x^2) - x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} + x \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + x^3 + x^2} + x^2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} + x \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + x^3 + x^2} + x^2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^{-1}}{\left(\sqrt[4]{1 + x^{-1} + x^{-2}} + 1 \right) \cdot \left(\sqrt{1 + x^{-1} + x^{-2}} + 1 \right)} = \frac{1}{(1 + 1) \cdot (1 + 1)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s - t = \frac{s^4 - t^4}{(s + t) \cdot (s^2 + t^2)}.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x \rightarrow -\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x < 0$, a w konsekwencji $x = -|x| = -\sqrt[4]{x^4}$.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt[4]{\frac{x^4 + x^3 + x^2}{x^4}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = -1. \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^4 + x^3 + x^2) - x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - x \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + x^3 + x^2} + x^2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - x \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + x^3 + x^2} + x^2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}}{x} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^4 + x^3 + x^2}}{x^2} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^4 + x^3 + x^2}}{\sqrt{x^4}} + 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^{-1}}{\left(-\sqrt[4]{1 + x^{-1} + x^{-2}} - 1 \right) \cdot \left(\sqrt{1 + x^{-1} + x^{-2}} + 1 \right)} = \frac{1}{(-1 - 1) \cdot (1 + 1)} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s + t = \frac{s^4 - t^4}{(s - t) \cdot (s^2 + t^2)}.$$

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y = x + \frac{1}{4}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y = -x - \frac{1}{4}$.

511. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}$.

Uwaga: Treść zadania jest poprawna - pod pierwiastkiem niczego nie brakuje - ma być tak jak jest napisane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 2x)^2 + 2x^2 + 1 > 0,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = 1. \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1) - x^4}{(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x) \cdot (\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x) \cdot (\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{(\sqrt[4]{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} + 1) \cdot (\sqrt{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} + 1)} = \\ &= \frac{4}{(1 + 1) \cdot (1 + 1)} = 1. \end{aligned}$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s - t = \frac{s^4 - t^4}{(s + t) \cdot (s^2 + t^2)}.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x \rightarrow -\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x < 0$, a w konsekwencji $x = -|x| = -\sqrt[4]{x^4}$.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{-\sqrt[4]{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt[4]{\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}{x^4}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt[4]{1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}} \right) = -1. \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1) - x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} - x\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} - x\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x^2} + 1\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{-\sqrt[4]{x^4}} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{\sqrt{x^4}} + 1\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{\left(-\sqrt[4]{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} + 1\right)} = \\ &= \frac{4}{(-1 - 1) \cdot (1 + 1)} = -1. \end{aligned}$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s + t = \frac{s^4 - t^4}{(s - t) \cdot (s^2 + t^2)}$$

przy $s = \sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} > 0$ i $t = x < 0$, a więc w sytuacji, gdy $s - t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y = x + 1$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y = -x - 1$.

512. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x) = x + \sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^8 + x^7 + x^6 + 7 = \left(x^4 + \frac{x^3}{2}\right)^2 + \frac{3x^6}{4} + 7 > 0,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt[8]{\frac{x^8 + x^7 + x^6 + 7}{x^8}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt[8]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}} = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7} - 2x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7} - x\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^8 + x^7 + x^6 + 7) - x^8}{\left(\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7 + x}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^8 + x^7 + x^6 + 7 + x^2}\right) \cdot \left(\sqrt{x^8 + x^7 + x^6 + 7 + x^4}\right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + x^6 + 7}{\left(\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7 + x}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^8 + x^7 + x^6 + 7 + x^2}\right) \cdot \left(\sqrt{x^8 + x^7 + x^6 + 7 + x^4}\right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{7}{x^7}}{\left(\sqrt[8]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}} + 1\right) \cdot \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}} + 1\right) \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}} + 1\right)} = \\
&= \frac{1}{(1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1)} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s - t = \frac{s^8 - t^8}{(s+t) \cdot (s^2+t^2) \cdot (s^4+t^4)}.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x \rightarrow -\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x < 0$, a w konsekwencji $x = -|x| = -\sqrt[8]{x^8}$.

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{-\sqrt[8]{x^8}}\right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \sqrt[8]{\frac{x^8 + x^7 + x^6 + 7}{x^8}}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \sqrt[8]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}}\right) = 1 - 1 = 0. \\
b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}\right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^8 + x^7 + x^6 + 7) - x^8}{\left(\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7 - x}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^8 + x^7 + x^6 + 7 + x^2}\right) \cdot \left(\sqrt{x^8 + x^7 + x^6 + 7 + x^4}\right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 + x^6 + 7}{\left(\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7 - x}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^8 + x^7 + x^6 + 7 + x^2}\right) \cdot \left(\sqrt{x^8 + x^7 + x^6 + 7 + x^4}\right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{7}{x^7}}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{x} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{x^2} + 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{x^4} + 1\right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{7}{x^7}}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{-\sqrt[8]{x^8}} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{\sqrt[4]{x^8}} + 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{\sqrt{x^8}} + 1\right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{7}{x^7}}{\left(-\sqrt[8]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}} - 1\right) \cdot \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}} + 1\right) \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}} + 1\right)} = \\
&= \frac{1}{(-1-1) \cdot (1+1) \cdot (1+1)} = -\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^8-t^8}{(s-t)\cdot (s^2+t^2)\cdot (s^4+t^4)}$$

przy $s=\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}>0$ i $t=x<0$, a więc w sytuacji, gdy $s-t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=2x+\frac{1}{8}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę poziomą o równaniu $y=-\frac{1}{8}$.

539. Korzystając z **definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Uwaga: Nie wolno używać reguły de l’Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej. Ta sama uwaga dotyczy kolejnych dwóch zadań.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{y-x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y^2-x^2}{\left(\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot (y-x)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y-x)\cdot (y+x)}{\left(\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot (y-x)} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y+x}{\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}} = \\ &= \frac{x+x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}} = \frac{2\cdot x}{2\cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

540. Korzystając z **definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x}$ na przedziale $(0,+\infty)$.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz wzór na różnicę czwartych potęg otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x}}{y-x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y-x}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot (y-x)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x}\right)\cdot \left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{(2\cdot \sqrt[4]{x})\cdot (2\cdot \sqrt{x})} = \frac{1}{4\cdot \sqrt[4]{x^3}}. \end{aligned}$$

541. Korzystając z **definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^8+1}$.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz pięciokrotnie wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt[4]{y^8 + 1} - \sqrt[4]{x^8 + 1}}{y - x} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{y^8 - x^8}{(\sqrt{y^8 + 1} + \sqrt{x^8 + 1}) \cdot (\sqrt[4]{y^8 + 1} + \sqrt[4]{x^8 + 1}) \cdot (y - x)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y - x) \cdot (y + x) \cdot (x^2 + y^2) \cdot (x^4 + y^4)}{(\sqrt{y^8 + 1} + \sqrt{x^8 + 1}) \cdot (\sqrt[4]{y^8 + 1} + \sqrt[4]{x^8 + 1}) \cdot (y - x)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y + x) \cdot (x^2 + y^2) \cdot (x^4 + y^4)}{(\sqrt{y^8 + 1} + \sqrt{x^8 + 1}) \cdot (\sqrt[4]{y^8 + 1} + \sqrt[4]{x^8 + 1})} = \\ &= \frac{(x + x) \cdot (x^2 + x^2) \cdot (x^4 + x^4)}{(\sqrt{x^8 + 1} + \sqrt{x^8 + 1}) \cdot (\sqrt[4]{x^8 + 1} + \sqrt[4]{x^8 + 1})} = \\ &= \frac{2x \cdot 2x^2 \cdot 2x^4}{2\sqrt{x^8 + 1} \cdot 2\sqrt[4]{x^8 + 1}} = \frac{2x^7}{(x^8 + 1)^{3/4}}. \end{aligned}$$

W każdym z kolejnych 10 zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

542. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
543. $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$
544. $f(x) = \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} 2$
545. $f(x) = \ln(x^3 + 1)$
546. $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$
547. $f(x) = \sqrt{24x + 1}$
548. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x} + 8$
549. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 - x^2 + 9}}$
550. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^5 - x} + 32}$
551. $f(x) = \sqrt{8x + 1} \cdot \sqrt[3]{7x^2 + 1}$
- $f'(1) = 1/3$
 $f'(1) = -1/2$
 $f'(1) = 1$
 $f'(1) = 3/2$
 $f'(1) = 1$
 $f'(0) = 12$
 $f'(-1) = 1/6$
 $f'(-1) = 1/27$
 $f'(-1) = -1/80$
 $f'(0) = 4$
- $f'(8) = 1/12$
 $f'(2) = -8/125$
 $f'(2) = 4/5$
 $f'(2) = 4/3$
 $f'(2) = 4/17$
 $f'(1) = 12/5$
 $f'(0) = -1/12$
 $f'(0) = 0$
 $f'(0) = 1/320$
 $f'(1) = 37/6$
- $f'(27) = 1/27$
 $f'(3) = -3/250$
 $f'(3) = 3/5$
 $f'(3) = 27/28$
 $f'(3) = 3/41$
 $f'(2) = 12/7$
 $f'(1) = 1/6$
 $f'(1) = -1/27$
 $f'(1) = -1/80$
 $f'(3) = 303/40$

552. Wyznaczyć równanie prostej, która jest styczna do obydwu następujących parabol: paraboli o równaniu $y = x^2$ oraz paraboli o równaniu $y = x^2 - 8x$.

Rozwiązanie:
Niech (a, a^2) i $(b, b^2 - 8b)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów

funkcji określonych wzorami $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^2 - 8x$. Ponieważ $f'(x) = 2x$ oraz $g'(x) = 2x - 8$, równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \quad \text{oraz} \quad y = g'(b) \cdot (x - b) + g(b) ,$$

czyli

$$y = 2a \cdot x - a^2 \quad \text{oraz} \quad y = (2b - 8) \cdot x - b^2 .$$

Aby obydwie powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a = 2b - 8 \quad \text{oraz} \quad -a^2 = -b^2 .$$

Z drugiego równania otrzymujemy $a = \pm b$, a ponieważ pierwsze równanie daje $b - a = 4 \neq 0$, musi być $a = -b$. Stąd $b = 2$ oraz $a = -2$.

W konsekwencji szukana prosta ma równanie

$$y = -4x - 4 .$$

553. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y = x^2 + 2$ oraz do paraboli o równaniu $y = -x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

Rozwiązanie:

Niech $(a, a^2 + 2)$ i $(b, -b^2)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = x^2 + 2$ i $g(x) = -x^2$. Ponieważ

$$f'(x) = 2x \quad \text{oraz} \quad g'(x) = -2x ,$$

równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \quad \text{oraz} \quad y = g'(b) \cdot (x - b) + g(b) ,$$

czyli

$$y = 2a \cdot x - a^2 + 2 \quad \text{oraz} \quad y = -2b \cdot x + b^2 .$$

Aby obydwie powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a = -2b \quad \text{oraz} \quad -a^2 + 2 = b^2 .$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $b = -a$, co po wstawieniu do drugiego równania prowadzi do $a = \pm 1$ oraz $b = \mp 1$.

W konsekwencji istnieją dwie *fajne* proste, a ich równania to

$$y = 2x + 1 \quad \text{oraz} \quad y = -2x + 1 .$$

554. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y = x^2 + 2$ oraz do paraboli o równaniu $y = 2x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

Rozwiązanie:

Niech $(a, a^2 + 2)$ i $(b, 2b^2)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = x^2 + 2$ i $g(x) = 2x^2$. Ponieważ

$$f'(x) = 2x \qquad \text{oraz} \qquad g'(x) = 4x \, ,$$

równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \qquad \text{oraz} \qquad y = g'(b) \cdot (x - b) + g(b) \, ,$$

czyli

$$y = 2a \cdot x - a^2 + 2 \qquad \text{oraz} \qquad y = 4b \cdot x - 2b^2 \, .$$

Aby obydwie powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a = 4b \qquad \text{oraz} \qquad -a^2 + 2 = -2b^2 \, .$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $a = 2b$, co po wstawieniu do drugiego równania prowadzi do $b = \pm 1$ oraz $a = \pm 2$.

W konsekwencji istnieją dwie *fajne* proste, a ich równania to

$$y = 4x - 2 \qquad \text{oraz} \qquad y = -4x - 2 \, .$$

555. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = 1 + x + 2\sqrt{x} \, .$$

Funkcja g jest złożeniem 100 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x)) \dots))) \, .$$

Obliczyć $g'(100)$.

Rozwiązanie:

Niech f_n będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji f . Udowodnimy przez indukcję, że

$$f_n(x) = \left(\sqrt{x} + n\right)^2 \, .$$

1° Zauważmy, że

$$f_1(x) = f(x) = \left(\sqrt{x} + 1\right)^2 \, ,$$

zatem dowodzone twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$.

2° Zakładając

$$f_n(x) = \left(\sqrt{x} + n\right)^2 \, ,$$

otrzymujemy

$$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) = f\left(\left(\sqrt{x} + n\right)^2\right) = \left(\sqrt{\left(\sqrt{x} + n\right)^2} + 1\right)^2 = \left(\sqrt{x} + n + 1\right)^2 \, ,$$

co kończy zasadniczą część dowodu indukcyjnego.

Ponieważ $g = f_{100}$,

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x} + 100\right)^2 = 2 \cdot \left(\sqrt{x} + 100\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 100}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{100}{\sqrt{x}} \, ,$$

skąd $g'(100) = 11$.

556. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^5}$ jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^5}}{x}=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^5}}{\sqrt[3]{x^3}}=\lim_{x\rightarrow 0}\sqrt[3]{\frac{x^3+x^5}{x^3}}=\lim_{x\rightarrow 0}\sqrt[3]{1+x^2}=1\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna w zerze.

557. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^6}$ jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Z definicji pochodnych jednostronnych otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x\rightarrow 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\rightarrow 0^+}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^6}}{x}=\lim_{x\rightarrow 0^+}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^6}}{\sqrt[4]{x^4}}=\lim_{x\rightarrow 0^+}\sqrt[4]{\frac{x^4+x^6}{x^4}}=\\ &= \lim_{x\rightarrow 0^+}\sqrt[4]{1+x^2}=1 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x\rightarrow 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\rightarrow 0^-}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^6}}{x}=\lim_{x\rightarrow 0^-}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^6}}{-|x|}=\lim_{x\rightarrow 0^-}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^6}}{-\sqrt[4]{x^4}}=\\ &= -\lim_{x\rightarrow 0^-}\sqrt[4]{\frac{x^4+x^6}{x^4}}=-\lim_{x\rightarrow 0^-}\sqrt[4]{1+x^2}=-1\, . \end{aligned}$$

Ponieważ pochodne jednostronne funkcji f w zerze są różne, funkcja nie jest tam różniczkowalna.

Odpowiedź: Funkcja f nie jest różniczkowalna w zerze.

558. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+1}-1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną prawostronną funkcji f w zerze:

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{h\rightarrow 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0^+}\frac{\sqrt{\sqrt[4]{h^2+1}-1}-0}{h}=\lim_{h\rightarrow 0^+}\frac{\sqrt{\frac{h^2}{(\sqrt{h^2+1}+1)\cdot(\sqrt[4]{h^2+1}+1)}}}{h}=\\ &= \lim_{h\rightarrow 0^+}\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{h^2+1}+1)\cdot(\sqrt[4]{h^2+1}+1)}}=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}}=\frac{1}{2}\, . \end{aligned}$$

Analogicznie obliczamy pochodną lewostronną funkcji f w zerze:

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[4]{h^2+1} - 1 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{(\sqrt{h^2+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^2+1}+1)}}}{-|h|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} -\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{h^2+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^2+1}+1)}} = -\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ponieważ pochodne jednostronne funkcji f w zerze są różne, funkcja ta nie jest różniczkowalna w zerze.

559. Wyznaczyć taką wartość rzeczywistą parametru a , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+1}-1} + a \cdot \sqrt[4]{\sqrt{x^4+1}-1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną prawostronną funkcji f w zerze:

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sqrt{h^2+1}-1} + a \cdot \sqrt[4]{\sqrt{h^4+1}-1} - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{\sqrt{h^2+1}+1}} + a \cdot \sqrt[4]{\frac{h^4}{(\sqrt{h^4+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^4+1}+1)}}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{h^2+1}+1}} + a \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(\sqrt{h^4+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^4+1}+1)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt[4]{4}} = \frac{1+a}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Analogicznie obliczamy pochodną lewostronną funkcji f w zerze:

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\sqrt{h^2+1}-1} + a \cdot \sqrt[4]{\sqrt{h^4+1}-1} - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{\sqrt{h^2+1}+1}} + a \cdot \sqrt[4]{\frac{h^4}{(\sqrt{h^4+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^4+1}+1)}}}{-|h|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{\sqrt{\sqrt{h^2+1}+1}} - a \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(\sqrt{h^4+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^4+1}+1)}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt[4]{4}} = \frac{-1-a}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Funkcja f jest różniczkowalna w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(0^+) = f'(0^-)$, czyli

$$\frac{1+a}{\sqrt{2}} = \frac{-1-a}{\sqrt{2}},$$

co zachodzi dla $a = -1$.

Odpowiedź: Podana funkcja jest różniczkowalna w zerze dla $a = -1$.

W każdym z kolejnych 7 zadań dla podanej funkcji $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podaj wartości pochodnych jednostronnych funkcji f_i w zerze.

560.

$f_1(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

$f_1'(0^-) = -1/\sqrt{2}$

$f_1'(0^+) = 1/\sqrt{2}$
561.

$f_2(x) = \sqrt{\sqrt{2x^2 + 1} - 1}$

$f_2'(0^-) = -1$

$f_2'(0^+) = 1$
562.

$f_3(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$

$f_3'(0^-) = -1/2$

$f_3'(0^+) = 1/2$
563.

$f_4(x) = \sqrt{\sqrt{8x^2 + 81} - 9}$

$f_4'(0^-) = -2/3$

$f_4'(0^+) = 2/3$
564.

$f_5(x) = \sqrt{\sqrt[4]{2x^2 + 1} - 1}$

$f_5'(0^-) = -1/\sqrt{2}$

$f_5'(0^+) = 1/\sqrt{2}$
565.

$f_6(x) = \sqrt{\sqrt[4]{x^2 + 16} - 2}$

$f_6'(0^-) = -1/(4\sqrt{2})$

$f_6'(0^+) = 1/(4\sqrt{2})$
566.

$f_7(x) = \sqrt{\sqrt[4]{8x^2 + 81} - 3}$

$f_7'(0^-) = -(\sqrt{2})/(3\sqrt{3})$

$f_7'(0^+) = (\sqrt{2})/(3\sqrt{3})$

567. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right).$$

Funkcja g jest złożeniem 2024 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x)) \dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{e})$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest krzywa o równaniu

$$y = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right).$$

Przekształcanie tego równania prowadzi kolejno do równań równoważnych

$$\begin{aligned} e^y &= \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \\ e^x \cdot e^y - e^y &= e^x + 1, \\ e^x \cdot e^y - e^x - e^y &= 1. \end{aligned}$$

Ponieważ ostatnie równanie nie zmienia się przy zamianie x i y , krzywa opisana tym równaniem jest symetryczna względem prostej o równaniu $x = y$. To oznacza, że funkcja f jest odwrotna sama do siebie, czyli $f(f(x)) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x . W konsekwencji $g(x) = x$ dla $x > 0$ i $g'(x) = 1$. W szczególności $g'(\sqrt{e}) = 1$ jest liczbą wymierną.

568. Funkcja $f : Z \rightarrow Z$, gdzie $Z = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))) \, .$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{2})$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest krzywa o równaniu

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$$

Przekształcanie tego równania prowadzi kolejno do równań równoważnych

$$\begin{aligned} y^3 &= \frac{x^3}{x^3 - 1} \, , \\ x^3 y^3 - y^3 &= x^3 \, , \\ x^3 y^3 &= x^3 + y^3 \, . \end{aligned}$$

Ponieważ ostatnie równanie nie zmienia się przy zamianie x i y , krzywa opisana tym równaniem jest symetryczna względem prostej o równaniu $x = y$. To oznacza, że funkcja f jest odwrotna sama do siebie, czyli $f(f(x)) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$. W konsekwencji $g(x) = x$ dla $x \neq 1$, wobec czego $g'(x) = 1$. W szczególności $g'(\sqrt{2}) = 1$ jest liczbą wymierną.

569. Funkcja $f : Z \rightarrow Z$, gdzie $Z = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x} \, .$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))) \, .$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{2})$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}} \, ,$$

skąd

$$f(f(x)) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{(f(x))^3}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x^3}}} = \sqrt[3]{1 - \frac{x^3 - 1}{x^3}} = \sqrt[3]{1 - \frac{x^3}{x^3 - 1}} = \sqrt[3]{\frac{-1}{x^3 - 1}}$$

oraz

$$f(f(f(x))) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{(f(f(x)))^3}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\frac{-1}{x^3 - 1}}} = \sqrt[3]{1 + x^3 - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x \, .$$

Z otrzymanej równości $f(f(f(x))) = x$ wynika $g(x) = x$ dla $x \in Z$, co daje $g'(x) = 1$. W szczególności $g'(\sqrt{2}) = 1$ jest liczbą wymierną.