

Kolokwium nr 7: czwartek 22.01.2026, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 0–717.

**Zadania do omówienia¹ na ćwiczeniach w czwartek 18.12.2025,
piątek 19.12.2025, piątek 9.01.2026, czwartek 15.01.2026 i piątek 16.01.2026.**

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Pochodna funkcji – zastosowania.

**Zadania komputerowe do samodzielnego rozwiązania
z wykorzystaniem rysunków w Desmosie².**

617. Na rysunku **24** znajdź eksperymentalnie prostą styczną do wykresu, która wygląda na z grubsza równoległą do narysowanej siecznej. Zauważ, że w początkowej konfiguracji takie styczne są dwie. Interesują nas tylko takie styczne, dla których punkt styczności leży pomiędzy punktami wykresu wyznaczającymi sieczną.

Zrób to samo dla innych siecznych i ewentualnie zmienionej funkcji.

618. Na rysunku **25** znajdź eksperymentalnie poziomą prostą styczną do wykresu funkcji

$$f(x) = x^x,$$

czyli (w tym wypadku) ekstremum tej funkcji. Jakie to ekstremum? Jakiej wartości argumentu ono odpowiada? Odczytaj z rysunku przybliżenie, a następnie wylicz dokładną wartość.

Odczytaj z rysunku granicę (prawostronną) funkcji f w zerze. A co możesz przypuszczać na okoliczność granicy (prawostronnej) funkcji f' w zerze na podstawie kierunku stycznej? Skonfrontuj swoje przypuszczenia z rysunkami **26** i **27** oraz obliczeniami symbolicznymi lub numerycznymi o dużej dokładności.

619. Dla których liczb naturalnych $n \geq 2$ funkcja

$$f(x) = n \cdot \sin x - \sin(nx)$$

osiąga swoje maksimum w dwóch punktach każdego okresu? Wyszuj hipotezę na podstawie rysunku **28**.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach.

620. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{1301} < \arctg 51 - \arctg 49 < \frac{1}{1201}.$$

621. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 < \frac{1}{8}.$$

622. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{34} < \arctg 13 - \arctg 8 < \frac{1}{13}.$$

¹Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.
²Linki do rysunków znajdują się na stronie wykładu.

623. Udowodnić nierówność

$$\arctg 6 + \arctg 12 < \arctg 7 + \arctg 10.$$

624. Udowodnić nierówność

$$26 \cdot e^{\arctg 5} < 25 \cdot e^{\arctg 7}.$$

625. Dana jest funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[3]{x^\pi + \pi}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

626. Dana jest funkcja $f : [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{10x^2 + 9000}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

627. Dana jest funkcja $f : [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{5x^2 + 125}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq 2 \cdot |x - y|.$$

628. Dana jest funkcja $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-1, 1]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

629. Dana jest funkcja $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 9}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{5} \cdot |x - y|.$$

630. Niech funkcja $f : [4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x^4}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [4, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{256}.$$

631. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \ln(e^x + e^{-x}).$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|.$$

632. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|.$$

633. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - 3 \cdot |x + 1|$$

na przedziale $[-2, 2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

634. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - 6|$$

na przedziale $[-4, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

635. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - x - 6|$$

na przedziale $[-5, 5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

636. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$$

na przedziale $[-3, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

637. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 1} - x^2$$

na przedziale $[-2, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

638. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = 3x + |x^3 - 9x|$$

na przedziale $[-4, \sqrt{10}]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

639. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^4 - 98x^2 + 7^4}$$

na przedziale $[-11, 9]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

640. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{x}{99} - \frac{10 \cdot \ln(x^2 + 1)}{99} + \operatorname{arctg} x$$

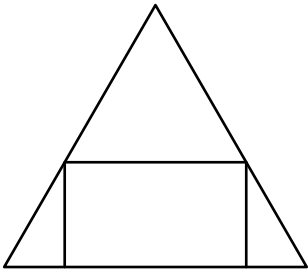
osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9, 11]$.

641. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

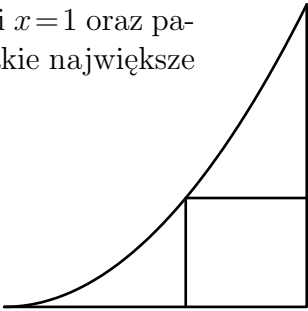
$$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{81}{8x^2} + \ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4, 5]$.

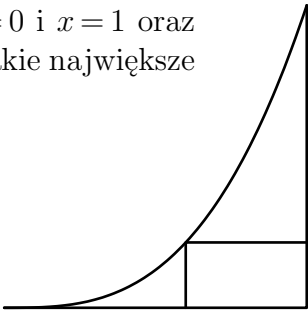
642. W stożku o objętości 1 chcemy umieścić walec w taki sposób, że jedna z podstaw walca leży w płaszczyźnie podstawy stożka, a obwód drugiej podstawy walca leży na powierzchni bocznej stożka. Rysunek obok przedstawia widok z boku, ewentualnie przekrój płaszczyzną zawierającą wspólną oś obrotu stożka i walca. Jaką największą objętość może mieć walec?



643. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz parabolą o równaniu $y=x^2$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



644. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz krzywą o równaniu $y=x^3$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



645. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+12}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant \frac{|x-y|}{C},$$

gdzie $C=6$ (**wersja trudniejsza**) lub $C=3$ (**wersja łatwiejsza**).

646. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x\in(2,4)$ zachodzi nierówność $\sqrt[x]{x}>\sqrt{2}$.

647. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x)=5\sin x-\sin 5x.$$

648. Niech $f(x)=4\cos x+\sin 4x$. Podać wszystkie miejsca zerowe pochodnej funkcji f w przedziale $[0,2\pi)$.

649. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$16\cdot\arctg 7+\ln 13\qquad\text{czy}\qquad 16\cdot\arctg 8+\ln 10\text{ ?}$$

Wskazówka 1: Podane liczby są większe od 25, a różnią się o mniej niż 0,02 — nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Wskazówka 2: Zbadaj funkcję pomocniczą $f(x) = 16\arctg x - \ln(x^2 + 1)$.

W każdym z 10 poniższych zadań podaj największą wartość funkcji f na przedziale $[0, \infty)$. Odpowiedzi podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

650. $f(x) = \sqrt{x} - 2x^2$
651. $f(x) = 4\sqrt{x} - x^2$
652. $f(x) = 32\sqrt{x} - x^2$
653. $f(x) = 4\sqrt{x} - 27x^2$
654. $f(x) = 32\sqrt{x} - 27x^2$
655. $f(x) = 4\sqrt{x} - 125x^2$
656. $f(x) = 6\sqrt{x} - x^3$
657. $f(x) = 3\sqrt{x} - 16x^3$
658. $f(x) = 8\sqrt{x} - x^4$
659. $f(x) = \sqrt{x} - 16x^4$

660. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f , tzn. $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x .

Podać wzór na pochodną funkcji g . Podać przykład takiej liczby wymiernej $x > 1$, że liczba $g'(x)$ jest wymierna.

661. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $g(x) = x^5 + x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(2)$ i $f'(34)$.

662. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $g(x) = x^3 + 9x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(10)$ i $f'(100)$.

W każdym z kolejnych 7 zadań funkcja $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji g_i w trzech podanych punktach.

- | | | | |
|---------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 663. $f_1(x) = x^3 + x$ | $g'_1(0) = \dots\dots\dots$ | $g'_1(2) = \dots\dots\dots$ | $g'_1(130) = \dots\dots\dots$ |
| 664. $f_2(x) = x^7 + x$ | $g'_2(0) = \dots\dots\dots$ | $g'_2(2) = \dots\dots\dots$ | $g'_2(130) = \dots\dots\dots$ |
| 665. $f_3(x) = x^3 + 5x$ | $g'_3(0) = \dots\dots\dots$ | $g'_3(6) = \dots\dots\dots$ | $g'_3(42) = \dots\dots\dots$ |
| 666. $f_4(x) = x^5 + 5x$ | $g'_4(0) = \dots\dots\dots$ | $g'_4(6) = \dots\dots\dots$ | $g'_4(42) = \dots\dots\dots$ |
| 667. $f_5(x) = x^3 + 2x$ | $g'_5(3) = \dots\dots\dots$ | $g'_5(12) = \dots\dots\dots$ | $g'_5(72) = \dots\dots\dots$ |
| 668. $f_6(x) = x^3 + 4x$ | $g'_6(5) = \dots\dots\dots$ | $g'_6(16) = \dots\dots\dots$ | $g'_6(80) = \dots\dots\dots$ |
| 669. $f_7(x) = 2x^3 + x$ | $g'_7(3) = \dots\dots\dots$ | $g'_7(18) = \dots\dots\dots$ | $g'_7(57) = \dots\dots\dots$ |

W każdym z kolejnych 5 zadań dla podanej funkcji $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f_i(g_i(x)) = x^3 + 3x.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji f_i w trzech podanych punktach.

670. $g_1(x) = x^3 + x + 6$
671. $g_2(x) = x^3 + 2x + 3$
672. $g_3(x) = 2x^3 + x$
673. $g_4(x) = x^5 + x + 2$
674. $g_5(x) = x^5 + 2x$
- $f_1'(8) = \dots\dots\dots$
 $f_2'(6) = \dots\dots\dots$
 $f_3'(3) = \dots\dots\dots$
 $f_4'(2) = \dots\dots\dots$
 $f_5'(0) = \dots\dots\dots$
- $f_1'(16) = \dots\dots\dots$
 $f_2'(15) = \dots\dots\dots$
 $f_3'(18) = \dots\dots\dots$
 $f_4'(4) = \dots\dots\dots$
 $f_5'(3) = \dots\dots\dots$
- $f_1'(36) = \dots\dots\dots$
 $f_2'(36) = \dots\dots\dots$
 $f_3'(57) = \dots\dots\dots$
 $f_4'(36) = \dots\dots\dots$
 $f_5'(36) = \dots\dots\dots$
675. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = \arctg\left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}} + 1} + \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} - 1} - 1\right) + \arctg\left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}} + 1} - \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} - 1} - 1\right)$$

na przedziale $[10, 50]$ i określić, w których punktach te wartości są przyjmowane. Doprowadzić wartości najmniejszą i największą do tak prostej postaci, aby było widać, czy są to liczby wymierne, czy niewymierne.

Wskazówka: $f = g \circ h$, gdzie

$$g(t) = \arctg(t - 1) + \arctg\left(\frac{2}{t} - 1\right)$$

oraz

$$h(x) = \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} + 1} + \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} - 1}.$$

676. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

677. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

678. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - e^{2x} - \ln(1+x)}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

679. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2xe^{-x}-\ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla } x\neq 0 \\ A & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

680. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \frac{e^x-\sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} & \text{dla } x\neq 0 \\ A & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

681. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \frac{e^{e^x}-e^{x+1}}{x^2} & \text{dla } x\neq 0 \\ A & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

682. Dobrać takie wartości parametrów rzeczywistych dodatnich k i b , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=x+\frac{1-\sqrt{kx+1}}{2}$$

na przedziale $[-1/k, b]$ była odwrotna do samej siebie.

683. Dobrać takie wartości parametrów rzeczywistych dodatnich k i b , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=x+1-\sqrt{kx+1}$$

na przedziale $[-1/k, b]$ była odwrotna do samej siebie.

Druga pochodna i wypukłość funkcji.

Zadania komputerowe do samodzielnego rozwiązania

z wykorzystaniem rysunków w Desmosie³.

684. Zaobserwuj na rysunku **29**, kiedy styczna leży (lokalnie) po jednej stronie wykresu, a kiedy wykres przecina.

Zrób to samo dla zmienionej funkcji.

685. Zaobserwuj na rysunku **30**, kiedy cięciwa leży (w całości) po jednej stronie wykresu. Zwróć uwagę, że dla krótkich cięciw jest to związane z wypukłością/wklęsłością funkcji, a dla długich może być przypadkowe.

Zrób to samo dla zmienionej funkcji.

³Linki do rysunków znajdują się na stronie wykładu.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach.**686.** Niech funkcja $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \ln x - \sqrt{x}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(16) + f(18) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(17) ?$$

687. Niech funkcja $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \ln x - \sqrt[3]{x}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(89) + f(91) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(90) ?$$

688. Niech $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 2 \cdot \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(61) + f(63) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(62) ?$$

689. Niech $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 2 \cdot \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(65) + f(67) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(66) ?$$

690. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$\arctg 100 + 2 \cdot \arctg 103 + 3 \cdot \arctg 106 \quad \text{czy} \quad 6 \cdot \arctg 104 ?$$

691. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\arctg 3 + \arctg 5 + 2 \cdot \ln 4 \quad \text{czy} \quad \ln 3 + \ln 5 + 2 \cdot \arctg 4.$$

692. Niech funkcja $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{x}},$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(6) + f(8) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(7) ?$$

693. Niech funkcja $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[4]{x}},$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(79) + f(81) = \mathbf{39,79911...} \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(80) = \mathbf{39,79911...} ?$$

- 694.** Niech funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 10 \ln x .$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(1600) + f(1602) = -\mathbf{67,54267816...} \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(1601) = -\mathbf{67,54267816...} \, ?$$
- 695.** Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 432}$. Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(36,001) = f(36001/1000) \approx \mathbf{12,0001666666667}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{72001}{6000} = 12 + \frac{1}{6000} \approx \mathbf{12,0001666666667} .$$
- 696.** Dowieść, że nierówność

$$(n+1)^{3n+3} < n^{2n} \cdot (n+3)^{n+3}$$

zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej $n > 0$.
- 697.** Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ W(x) & \text{dla } 0 < x < 1 \\ x & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.
- 698.** Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \leqslant -1 \\ W(x) & \text{dla } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.
- 699.** Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

a) Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?
b) Dla tej samej wartości parametru A wyznaczyć $f''(0)$.
- 700.** Niech funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = x^5 + x .$$

Podać dwie pary liczb (n, w) , gdzie n jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią) mniejszą od 100, a w liczbą wymierną, spełniające równanie

$$f''(n) = w .$$

Jeżeli licznik lub mianownik liczby w jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

$f''(\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$

$f''(\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$

701. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x)=\frac{x^3}{3}+x\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w trzech podanych punktach.

$f''\left(\frac{4}{3}\right) = \dots\dots\dots$

$f''\left(\frac{14}{3}\right) = \dots\dots\dots$

$f''(12) = \dots\dots\dots$

702. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x)=\frac{x^3}{3}+2x\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w czterech podanych punktach.

$f''\left(\frac{7}{3}\right) = \dots\dots\dots$

$f''\left(\frac{20}{3}\right) = \dots\dots\dots$

$f''(15) = \dots\dots\dots$

$f''\left(\frac{88}{3}\right) = \dots\dots\dots$

703. Niech

$$f(x)=\sqrt[5]{x^3+5}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(3,01)=f(301/100)\approx \mathbf{2,003375}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{16027}{8000}=2+\frac{27}{8000}=\mathbf{2,003375}$$

704. Niech

$$f(x)=\sqrt[5]{x^3+5}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(4,08)\approx \mathbf{2,36}$$

jest mniejsza czy większa od

$$f(4)+0,027\approx \mathbf{2,36}$$

705. Niech

$$f(x)=\sqrt[3]{x^5-5}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(2,1)=f(21/10)\approx \mathbf{3,30}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{89}{27}=3+\frac{8}{27}\approx \mathbf{3,30}$$

706. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz $f''(x) \geq 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{(x-y)^2}{8}.$$

707. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2}$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C , że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leq C \cdot |x-y|.$$

708. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (2, 4)$ zachodzi nierówność

$$\log_2 x > \frac{x}{2}.$$

709. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (3, 5)$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[7]{x^3+3} < \frac{x+7}{6}.$$

Wyznaczyć punkty przegięcia i przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji zmiennej x danej wzorem:

710. x^3+2x^2+3x+4

711. $x^8-x^2+7x-15$

712. e^{-x^2}

713. $\sin^4 x$

714. $x^4 + \sqrt[4]{x}$

715. Uzupełnić znakami " $<$ " lub " $>$ ":

LEMAT: Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$.

Jeżeli dla każdego $x > a$ zachodzi nierówność $f'(x) < g'(x)$, to dla dowolnego $x > a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

Jeżeli dla każdego $x < a$ zachodzi nierówność $f'(x) < g'(x)$, to dla dowolnego $x < a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

716. Uzupełnić znakami " $<$ " lub " $>$ ":

LEMAT: Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$ oraz $f'(a) = g'(a)$.

Jeżeli dla każdego $x > a$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x > a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

Jeżeli dla każdego $x < a$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x < a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

717. Uzupełnić znakami " $<$ " lub " $>$ ":

LEMAT: Niech $a < b$ będą liczbami rzeczywistymi i niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$ oraz $f(b) = g(b)$.

Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi nierówność $f''(x) > g''(x)$, to dla dowolnego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.