

620. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{1301} < \arctg 51 - \arctg 49 < \frac{1}{1201}.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \arctg x$ na przedziale $[49, 51]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (49, 51)$, że

$$\arctg 51 - \arctg 49 = (51 - 49) \cdot f'(c) = 2 \cdot f'(c).$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

z nierówności $49 < c < 51$ otrzymujemy

$$\frac{1}{1301} = \frac{2}{2602} = \frac{2}{51^2 + 1} < \arctg 51 - \arctg 49 = \frac{2}{c^2 + 1} < \frac{2}{49^2 + 1} = \frac{2}{2402} = \frac{1}{1201},$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

621. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 < \frac{1}{8}.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \ln x$ na przedziale $[8, 9]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (8, 9)$, że

$$\ln 9 - \ln 8 = f'(c).$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x},$$

z nierówności $8 < c < 9$ otrzymujemy

$$\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 = f'(c) = \frac{1}{c} < \frac{1}{8},$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

622. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{34} < \arctg 13 - \arctg 8 < \frac{1}{13}.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \arctg x$ na przedziale $[8, 13]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (8, 13)$, że

$$\arctg 13 - \arctg 8 = (13 - 8) \cdot f'(c) = 5 \cdot f'(c).$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

z nierówności $8 < c < 13$ otrzymujemy

$$\frac{1}{34} = \frac{5}{170} = \frac{5}{13^2 + 1} < \arctg 13 - \arctg 8 = \frac{5}{c^2 + 1} < \frac{5}{8^2 + 1} = \frac{5}{65} = \frac{1}{13},$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

623. Udowodnić nierówność

$$\arctg 6 + \arctg 12 < \arctg 7 + \arctg 10.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (oficjalny):

Podana nierówność może być przepisana w postaci

$$\arctg 12 - \arctg 10 < \arctg 7 - \arctg 6.$$

Z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \arctg x$ na przedziałach $[6, 7]$ oraz $[10, 12]$ wynika istnienie takich liczb $c \in (6, 7)$ oraz $d \in (10, 12)$, że

$$\arctg 7 - \arctg 6 = f'(c).$$

oraz

$$\arctg 12 - \arctg 10 = 2 \cdot f'(d).$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

z nierówności $6 < c < 7$ oraz $10 < d < 12$ otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{1}{50} < \arctg 7 - \arctg 6 = f'(c) = \frac{1}{c^2 + 1} < \frac{1}{37}$$

oraz

$$\frac{2}{145} < \arctg 12 - \arctg 10 = 2 \cdot f'(d) = \frac{2}{d^2 + 1} < \frac{2}{101}.$$

W konsekwencji

$$\arctg 12 - \arctg 10 < \frac{2}{101} < \frac{2}{100} = \frac{1}{50} < \arctg 7 - \arctg 6,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

Sposób II (rachunkowy):

Niech

$$f(x) = \arctg(6 + x) + \arctg(12 - 2x)$$

będzie funkcją, która dla $x = 0$ i $x = 1$ przyjmuje wartości równe odpowiednio lewej i prawej stronie dowodzonej nierówności. Zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykazemy, że funkcja f jest rosnąca na przedziale $(0, 1)$, a do tego wystarczy wykazać dodatniość jej pochodnej na tym przedziale. Miłośnicy rachunków bez trudu stwierdzą, że

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(6+x)^2 + 1} + \frac{-2}{(12-2x)^2 + 1} = \frac{2x^2 - 72x + 71}{((6+x)^2 + 1) \cdot ((12-2x)^2 + 1)} = \\ &= \frac{2x^2 - 4x - 68x + 2 + 68 + 1}{((6+x)^2 + 1) \cdot ((12-2x)^2 + 1)} = \frac{2 \cdot (x-1)^2 + 68 \cdot (1-x) + 1}{((6+x)^2 + 1) \cdot ((12-2x)^2 + 1)}, \end{aligned}$$

co wobec dodatniości ostatniego wyrażenia dla $x \leq 1$ kończy rozwiązanie zadania.

Sposób III (wymaga znajomości pewnej sztuczki):

Skorzystamy z tego, że $\arctg x$ jest argumentem liczby zespolonej $1 + ix$ oraz z faktu, że przy mnożeniu liczb zespolonych ich argumenty się dodają.

Wobec tego $\arctg 6 + \arctg 12$ jest argumentem liczby

$$(1 + 6i) \cdot (1 + 12i) = 1 + 18i - 72 = -71 + 18i = 71 \cdot \left(-1 + \frac{18}{71} \cdot i\right),$$

natomiast $\arctg 7 + \arctg 10$ jest argumentem liczby

$$(1 + 7i) \cdot (1 + 10i) = 1 + 17i - 70 = -69 + 17i = 69 \cdot \left(-1 + \frac{17}{69} \cdot i\right).$$

Zatem lewa i prawa strona dowodzonej nierówności są równe odpowiednio argumentom liczb

$$-1 + \frac{18}{71} \cdot i \quad \text{oraz} \quad -1 + \frac{17}{69} \cdot i.$$

Wobec tego dowodzona nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{18}{71} > \frac{17}{69},$$

którą możemy wykazać następująco:

$$\frac{18}{71} > \frac{18}{72} = \frac{1}{4} = \frac{17}{68} > \frac{17}{69}.$$

Uwagi: Ponieważ argumentem liczby zespolonej $-1 + \frac{1}{4} \cdot i = -\left(1 - \frac{1}{4} \cdot i\right)$ jest liczba

$$\pi - \arctg\left(\frac{1}{4}\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \arctg 4\right) = \frac{\pi}{2} + \arctg 4,$$

faktycznie udowodniliśmy nierówność

$$\arctg 6 + \arctg 12 < \frac{\pi}{2} + \arctg 4 < \arctg 7 + \arctg 10.$$

Zwróćmy też uwagę, że postępując podobnie jak powyżej, strony dowodzonej nierówności można zapisać jako:

$$\arctg 6 + \arctg 12 = \frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{71}{18}\right) = \frac{\pi}{2} + \arctg\left(4 - \frac{1}{18}\right)$$

oraz

$$\arctg 7 + \arctg 10 = \frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{69}{17}\right) = \frac{\pi}{2} + \arctg\left(4 + \frac{1}{17}\right).$$

Metodami podobnymi do powyższych można udowodnić nierówności równoważne danej w zadaniu nierówności:

$$\arctg 12 - \arctg 10 = \arctg\left(\frac{2}{121}\right) < \arctg\left(\frac{2}{86}\right) = \arctg\left(\frac{1}{43}\right) = \arctg 7 - \arctg 6,$$

$$\arctg 12 - \arctg 7 = \arctg\left(\frac{1}{17}\right) = \arctg\left(\frac{4}{68}\right) < \arctg\left(\frac{4}{61}\right) = \arctg 10 - \arctg 6$$

oraz

$$\arctg 12 - \arctg 10 - \arctg 7 + \arctg 6 = \arctg\left(\frac{7}{1041}\right) > 0.$$

624. Udowodnić nierówność

$$26 \cdot e^{\operatorname{arctg} 5} < 25 \cdot e^{\operatorname{arctg} 7}.$$

Rozwiązanie:

Dowodzona nierówność po obustronnym zlogarytmowaniu przy podstawie e przyjmuje postać

$$\ln 26 + \operatorname{arctg} 5 < \ln 25 + \operatorname{arctg} 7,$$

co można przepisać jako

$$\ln 26 - \ln 25 < \operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 5.$$

Z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \ln x$ na przedziale $[25, 26]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (25, 26)$, że

$$\ln 26 - \ln 25 = (26 - 25) \cdot f'(c) = f'(c).$$

Ponadto z twierdzenia Lagrange’a zastosowanego do funkcji $g(x) = \operatorname{arctg} x$ na przedziale $[5, 7]$ wynika istnienie takiej liczby $d \in (5, 7)$, że

$$\operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 5 = (7 - 5) \cdot g'(d) = 2 \cdot g'(d).$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

oraz

$$g'(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

z nierówności $25 < c < 26$ oraz $5 < d < 7$ otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{1}{26} < \ln 26 - \ln 25 = f'(c) = \frac{1}{c} < \frac{1}{25}$$

oraz

$$\frac{1}{25} = \frac{2}{50} < \operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 5 = 2 \cdot g'(d) = \frac{2}{d^2 + 1} < \frac{2}{26} = \frac{1}{13}.$$

W konsekwencji

$$\ln 26 - \ln 25 < \frac{1}{25} < \operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 5,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

625. Dana jest funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[3]{x^\pi + \pi}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant 1.$$

Bezpośrednie wyliczenia prowadzą do:

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| \frac{1}{\pi} (x^\pi + \pi)^{1/\pi-1} \cdot \pi x^{\pi-1} \right| = \frac{x^{\pi-1}}{(x^\pi + \pi)^{1-1/\pi}} = \frac{x^{\pi-1}}{(x^\pi + \pi)^{(\pi-1)/\pi}} = \frac{(x^\pi)^{(\pi-1)/\pi}}{(x^\pi + \pi)^{(\pi-1)/\pi}} = \\ &= \left(\frac{x^\pi}{x^\pi + \pi} \right)^{(\pi-1)/\pi} < 1, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

626. Dana jest funkcja $f : [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{10x^2 + 9000}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowiedzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant 1.$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x| \leqslant 10$ prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{10x}{\sqrt{10x^2 + 9000}} \right| = \frac{10 \cdot |x|}{\sqrt{10x^2 + 9000}} = \frac{10}{\sqrt{10 + \frac{9000}{x^2}}} \leqslant \frac{10}{\sqrt{10 + \frac{9000}{10^2}}} = \frac{10}{\sqrt{10 + 90}} = \frac{10}{10} = 1,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

627. Dana jest funkcja $f : [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{5x^2 + 125}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 2 \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowiedzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant 2.$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x| \leq 10$ prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 125}} \right| = \frac{5 \cdot |x|}{\sqrt{5x^2 + 125}} = \frac{5}{\sqrt{5 + \frac{125}{x^2}}} \leq \frac{5}{\sqrt{5 + \frac{125}{10^2}}} = \frac{5}{\sqrt{6,25}} = \frac{5}{2,5} = 2,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

628. Dana jest funkcja $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-1, 1]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowiedzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in [-1, 1]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leq 1.$$

Dla $x = 0$ powyższa nierówność jest oczywista wobec $f'(0) = 0$, a dla $x \neq 0$ bezpośrednio wyliczenia połączone z nierównością $|x| \leq 1$ prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 2}} \right| = \frac{2 \cdot |x|}{\sqrt{2x^2 + 2}} = \frac{2}{\sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{2 + \frac{2}{1^2}}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

629. Dana jest funkcja $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 9}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{5} \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Należy udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$\left| \sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{y^2 + 9} \right| \leq \frac{4}{5} \cdot |x - y|.$$

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{y^2 + 9} \right| &= \left| \sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{y^2 + 9} \right| \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 9}} = \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 9}} = |x - y| \cdot \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 9}}. \end{aligned}$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykazemy nierówność

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}} \leqslant \frac{4}{5},$$

która jest równoważna nierówności

$$|x+y| \leqslant \frac{4}{5} \cdot \left(\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9} \right).$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta, wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ oraz uwzględniając nierówności $x^2 \leqslant 16$ i $y^2 \leqslant 16$:

$$\begin{aligned} |x+y| &\leqslant |x|+|y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{9x^2}{25} + \frac{16x^2}{25}} + \sqrt{\frac{9y^2}{25} + \frac{16y^2}{25}} \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{\frac{9 \cdot 16}{25} + \frac{16x^2}{25}} + \sqrt{\frac{9 \cdot 16}{25} + \frac{16y^2}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25} \cdot (x^2+9)} + \sqrt{\frac{16}{25} \cdot (y^2+9)} = \\ &= \frac{4}{5} \cdot \left(\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9} \right). \end{aligned}$$

Sposób II:

Dla $x=y$ dowiedzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c leży między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby $x \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant \frac{4}{5}.$$

Bezpośrednie wyliczenia prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+9}} \right| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}},$$

co jest oczywiście mniejsze od $4/5$ dla $x=0$, natomiast dla $x \neq 0$ możemy kontynuować oszacowania:

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{25/16}} = \frac{4}{5}.$$

630. Niech funkcja $f : [4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x^4}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [4, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{|x - y|}{256}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 4$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4} \right| = \left| \frac{y^4 - x^4}{x^4 y^4} \right| = \frac{|x - y| \cdot (x^3 + x^2 y + x y^2 + y^3)}{x^4 y^4} = \\ &= |x - y| \cdot \left(\frac{x^3}{x^4 y^4} + \frac{x^2 y}{x^4 y^4} + \frac{x y^2}{x^4 y^4} + \frac{y^3}{x^4 y^4} \right) = |x - y| \cdot \left(\frac{1}{x y^4} + \frac{1}{x^2 y^3} + \frac{1}{x^3 y^2} + \frac{1}{x^4 y} \right) \leq \\ &\leq |x - y| \cdot \left(\frac{1}{4^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{4^5} \right) = |x - y| \cdot \frac{4}{4^5} = |x - y| \cdot \frac{1}{4^4} = |x - y| \cdot \frac{1}{256}, \end{aligned}$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x, y \geq 4$.

Nieco inna postać oszacowań:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4} \right| = \left| \frac{y^4 - x^4}{x^4 y^4} \right| = \frac{|x - y| \cdot (x + y) \cdot (x^2 + y^2)}{x^4 y^4} = |x - y| \cdot \frac{x + y}{xy} \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^3 y^3} = \\ &= |x - y| \cdot \left(\frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^3 y^3} + \frac{y^2}{x^3 y^3} \right) = |x - y| \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) \cdot \left(\frac{1}{x y^3} + \frac{1}{x^3 y} \right) \leq \\ &\leq |x - y| \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^4} \right) = |x - y| \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4^4} = |x - y| \cdot \frac{1}{4^4} = |x - y| \cdot \frac{1}{256}. \end{aligned}$$

Sposób II:

Dowodzona nierówność jest oczywista w przypadku $x = y$, natomiast dla $x \neq y$ stosujemy do funkcji f twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Na mocy tego twierdzenia istnieje taka liczba c pomiędzy x i y , a więc spełniająca nierówność $c > 4$, że

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(c)| = \left| \frac{-4}{c^5} \right| = \frac{4}{c^5} < \frac{4}{4^5} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256},$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

631. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \ln(e^x + e^{-x}).$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Pominawszy trywialny przypadek $x = y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |f'(c)|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą pomiędzy x i y .

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)| \leq 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x , co dowodzimy następująco:

$$|f'(x)| = \left| \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right| = \frac{|e^x - e^{-x}|}{e^x + e^{-x}} \leq \frac{|e^x| + |-e^{-x}|}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1.$$

632. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \, .$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y| \, .$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowiedzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \, ,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant 1 \, .$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z wykorzystaniem nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| = \frac{\sqrt{x^2 \cdot 1}}{\frac{x^2 + 1}{2}} \leqslant 1 \, ,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

633. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - 3 \cdot |x + 1|$$

na przedziale $[-2, 2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \in [-1, +\infty) \\ -x - 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 3 & \text{dla } x \in [-1, 2] \\ x^2 + 3x + 3 & \text{dla } x \in [-2, -1) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2, 2]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{dla } x \in (-1, 2) \\ 2x + 3 & \text{dla } x \in (-2, -1) \end{cases}$$

W punkcie -1 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-1, 2)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do równania $2x - 3 = 0$, co ma rozwiązanie $x = 3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1, 2)$.

2° W przypadku $x \in (-2, -1)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x + 3 = 0$, co ma rozwiązanie $x = -3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2, -1)$.

- Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:
- końce przedziału: -2 i 2 ,
 - miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
 - punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -1 .

$$\begin{aligned}f(-2) &= 1, \\f(-3/2) &= 3/4, \\f(-1) &= 1, \\f(3/2) &= -21/4 = -5,25, \\f(2) &= -5.\end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-21/4$ w punkcie $3/2$, a wartość największą równą 1 w punktach -2 oraz -1 .

634. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - 6|$$

na przedziale $[-4, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$|x^2 - 6| = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{dla } x \in (-\infty, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, +\infty) \\ -x^2 + 6 & \text{dla } x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 - 6 & \text{dla } x \in [-4, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, 3] \\ x - x^2 + 6 & \text{dla } x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-4, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x & \text{dla } x \in (-4, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3) \\ 1 - 2x & \text{dla } x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \end{cases}$$

W punktach $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

- Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:
- 1° W przypadku $x \in (-4, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do równania $1 + 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = -1/2$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-4, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3)$.
- 2° W przypadku $x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $1 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 1/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$.

- Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:
- końce przedziału: -4 i 3 ,

- miejsce zerowe pochodnej: $1/2$,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$.

$$\begin{aligned}f(-4) &= 6\,, \\ f\left(-\sqrt{6}\right) &= -\sqrt{6}\,, \\ f(1/2) &= 6,25\,, \\ f\left(\sqrt{6}\right) &= \sqrt{6}\,, \\ f(3) &= 6\,.\end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-\sqrt{6}$ w punkcie $-\sqrt{6}$, a wartość największą równą $6,25 = 25/4$ w punkcie $1/2$.

635. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + \left| x^2 - x - 6 \right|$$

na przedziale $[-5, 5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^2 - x - 6 = (x - 3) \cdot (x + 2)\,.$$

Stąd

$$\left| x^2 - x - 6 \right| = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{dla } x \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty) \\ -x^2 + x + 6 & \text{dla } x \in (-2, 3) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{dla } x \in [-5, -2] \cup [3, 5] \\ -x^2 + 2x + 6 & \text{dla } x \in (-2, 3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-5, 5]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in (-5, -2) \cup (3, 5) \\ -2x + 2 & \text{dla } x \in (-2, 3) \end{cases}$$

W punktach -2 i 3 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-5, -2) \cup (3, 5)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 0$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-5, -2) \cup (3, 5)$.

2° W przypadku $x \in (-2, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $-2x + 2 = 0$, co ma rozwiązanie $x = 1$, które należy do rozważanego przedziału $(-2, 3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -5 i 5 ,
- miejsce zerowe pochodnej: 1 ,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -2 i 3 .

$$f(-5) = 19\,,$$

$$f(-2) = -2,$$
$$f(1) = 7,$$
$$f(3) = 3,$$
$$f(5) = 19.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -2 w punkcie -2 , a wartość największą równą 19 w punktach -5 i 5 .

636. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$$

na przedziale $[-3, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x + 1)^2} = |2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dla } x \in [-1/2, +\infty) \\ -2x - 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -1/2) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{dla } x \in [-1/2, 3] \\ x^2 + 2x + 1 & \text{dla } x \in [-3, -1/2) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-3, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{dla } x \in (-1/2, 3) \\ 2x + 2 & \text{dla } x \in (-3, -1/2) \end{cases}$$

W punkcie $-1/2$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

- Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:
- 1° W przypadku $x \in (-1/2, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do równania $2x - 2 = 0$, co ma rozwiązanie $x = 1$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/2, 3)$.
 - 2° W przypadku $x \in (-3, -1/2)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x + 2 = 0$, co ma rozwiązanie $x = -1$, które należy do rozważanego przedziału $(-3, -1/2)$.

- Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:
- końce przedziału: -3 i 3 ,
 - miejsca zerowe pochodnej: -1 i 1 ,
 - punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/2$.

$$f(-3) = 4,$$
$$f(-1) = 0,$$
$$f(-1/2) = 1/4 = 0,25,$$
$$f(1) = -2,$$

$f(3)=2\,.$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -2 w punkcie 1 , a wartość największą równą 4 w punkcie -3 .

637. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt{9x^2+6x+1}-x^2$$

na przedziale $[-2, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x)=\sqrt{9x^2+6x+1}-x^2=\sqrt{(3x+1)^2}-x^2=|3x+1|-x^2$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1-x^2 & \text{dla } x\in[-1/3, 3] \\ -3x-1-x^2 & \text{dla } x\in[-2, -1/3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 3-2x & \text{dla } x\in(-1/3, 3) \\ -3-2x & \text{dla } x\in(-2, -1/3) \end{cases}$$

W punkcie $-1/3$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-1/3, 3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $3-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/3, 3)$.

2° W przypadku $x\in(-2, -1/3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $-3-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2, -1/3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -2 i 3 ,
- miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/3$.

$f(-2)=1\, ,$

$f(-3/2)=5/4\, ,$

$f(-1/3)=-1/9\, ,$

$f(3/2)=13/4\, ,$

$f(3)=1\, .$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-1/9$ w punkcie $-1/3$, a wartość największą równą $13/4$ w punkcie $3/2$.

638. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = 3x + |x^3 - 9x|$$

na przedziale $[-4, \sqrt{10}]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^3 - 9x = (x - 3) \cdot x \cdot (x + 3).$$

Stąd

$$|x^3 - 9x| = \begin{cases} x^3 - 9x & \text{dla } x \in [-3, 0] \cup [3, +\infty) \\ -x^3 + 9x & \text{dla } x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x & \text{dla } x \in [-3, 0] \cup [3, \sqrt{10}] \\ -x^3 + 12x & \text{dla } x \in [-4, -3) \cup (0, 3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-4, \sqrt{10}]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6 & \text{dla } x \in (-3, 0) \cup (3, \sqrt{10}) \\ -3x^2 + 12 & \text{dla } x \in (-4, -3) \cup (0, 3) \end{cases}$$

W punktach $-3, 0$ i 3 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-3, 0) \cup (3, \sqrt{10})$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $3x^2 = 6$, co ma dwa rozwiązania $x = \pm\sqrt{2}$, z których tylko jedno, a mianowicie $x = -\sqrt{2}$, należy do rozważanego zbioru $(-3, 0) \cup (3, \sqrt{10})$.

2° W przypadku $x \in (-4, -3) \cup (0, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $3x^2 = 12$, co ma dwa rozwiązania $x = \pm 2$, z których tylko jedno, a mianowicie $x = 2$, należy do rozważanego zbioru $(-4, -3) \cup (0, 3)$.

Porównamy wartości funkcji f w siedmiu punktach:

- końce przedziału: -4 i $\sqrt{10}$,
- miejsca zerowe pochodnej: $-\sqrt{2}$ i 2 ,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-3, 0$ i 3 .

$$f(-4) = 16, \quad f(-3) = -9, \quad f(0) = 13, \quad f(2) = 16, \quad f(3) = 9,$$

$$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 + 6 \cdot \sqrt{2} = -2 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2} \in (4, 8), \quad \text{bo } \sqrt{2} \in (1, 2),$$

$$f(\sqrt{10}) = (\sqrt{10})^3 - 6 \cdot \sqrt{10} = 10 \cdot \sqrt{10} - 6 \cdot \sqrt{10} = 4 \cdot \sqrt{10} \in (12, 16), \quad \text{bo } \sqrt{10} \in (3, 4).$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -9 w punkcie -3 , a wartość największą równą 16 w punktach -4 i 2 .

639. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^4 - 98x^2 + 7^4}$$

na przedziale $[-11, 9]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^4 - 98x^2 + 7^4} = 2x + \sqrt{(x^2 - 49)^2} = 2x + |x^2 - 49|, \tag{1}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 - 49 & \text{dla } x \in [-11, -7] \cup [7, 9] \\ 2x - x^2 + 49 & \text{dla } x \in (-7, 7) \end{cases} \tag{2}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-11, 9]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2 + 2x & \text{dla } x \in (-11, -7) \cup (7, 9) \\ 2 - 2x & \text{dla } x \in (-7, 7) \end{cases} \tag{3}$$

W punktach ± 7 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-11, -7) \cup (7, 9)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2 + 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = -1$, które **nie należy** do rozważanego zbioru $(-11, -7) \cup (7, 9)$.

2° W przypadku $x \in (-7, 7)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 1$, które **należy** do rozważanego przedziału $(-7, 7)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -11 i 9 ,
- miejsce zerowe pochodnej: 1 ,
- punkty, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -7 i 7 .

$$f(-11) = 50,$$

$$f(-7) = -14,$$

$$f(1) = 50,$$

$$f(7) = 14,$$

$$f(9) = 50.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -14 w punkcie -7 , a wartość największą równą 50 w punktach -11 , 1 i 9 .

640. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{x}{99} - \frac{10 \cdot \ln(x^2 + 1)}{99} + \arctg x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9, 11]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x) = \frac{1}{99} - \frac{10 \cdot 2x}{99 \cdot (x^2 + 1)} + \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{99 \cdot (x^2 + 1)} - \frac{20x}{99 \cdot (x^2 + 1)} + \frac{99}{99 \cdot (x^2 + 1)} =$$

$$= \frac{x^2 - 20x + 100}{99 \cdot (x^2 + 1)} = \frac{(x - 10)^2}{99 \cdot (x^2 + 1)} \geq 0,$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x = 10$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 9, a największą na końcu, czyli w punkcie 11.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$\begin{aligned} f(9) &= \frac{1}{11} - \frac{10 \cdot \ln 82}{99} + \arctg 9 \approx \mathbf{1,105925}, \\ f(10) &= \frac{10}{99} - \frac{10 \cdot \ln 101}{99} + \arctg 10 \approx \mathbf{1,105964}, \\ f(11) &= \frac{1}{9} - \frac{10 \cdot \ln 122}{99} + \arctg 11 \approx \mathbf{1,105993}. \end{aligned}$$

641. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{81}{8x^2} + \ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4, 5]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} + \frac{81}{4x^3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{81}{4x^3} = \frac{4x^2 - 36x + 81}{4x^3} = \frac{(2x - 9)^2}{4x^3} \geq 0,$$

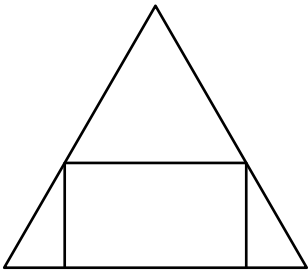
przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x = 9/2$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 4, a największą na końcu, czyli w punkcie 5.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{207}{128} + \ln 4 \approx 3,00348, \\ f(9/2) &= \frac{3}{2} + \ln(9/2) \approx 3,00408, \\ f(5) &= \frac{279}{200} + \ln 5 \approx 3,00444. \end{aligned}$$

642. W stożku o objętości 1 chcemy umieścić walec w taki sposób, że jedna z podstaw walca leży w płaszczyźnie podstawy stożka, a obwód drugiej podstawy walca leży na powierzchni bocznej stożka. Rysunek obok przedstawia widok z boku, ewentualnie przekrój płaszczyzną zawierającą wspólną oś obrotu stożka i walca. Jaką największą objętość może mieć walec?



Rozwiązanie:

Niech r będzie promieniem podstawy stożka, a h jego wysokością. Jeżeli walec ma wysokość $x \in (0, h)$, to jego podstawa ma promień $r \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)$, co ustalamy na podstawie prostych rozważań geometrycznych.

Wówczas objętość walca jest równa

$$V(x) = \pi \cdot x \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} V(x) = \lim_{x \rightarrow h^-} V(x) = 0,$$

a ponadto

$$\begin{aligned} V'(x) &= \pi \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 - \frac{2\pi \cdot x \cdot r^2}{h} \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) = \left(1 - \frac{x}{h} - \frac{2x}{h}\right) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{3x}{h}\right) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right). \end{aligned}$$

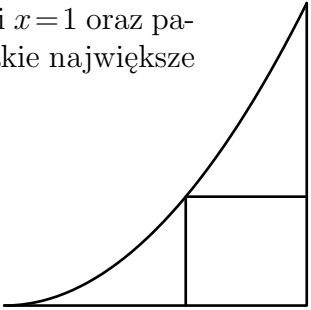
Wobec tego $V'(x) = 0$ dla $x = h/3$, co prowadzi do maksymalnej objętości walca równej

$$V(h/3) = \pi \cdot \frac{h}{3} \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{h/3}{h}\right)^2 = \frac{\pi \cdot h \cdot r^2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy z podanego w treści zadania założenia, że stożek ma objętość $1 = \pi r^2 h/3$.

Odpowiedź: Największa możliwa objętość walca wynosi $4/9$.

643. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz parabolą o równaniu $y=x^2$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



Rozwiązanie:
Niech (a, a^2) , gdzie $a \in (0, 1)$, będzie wierzchołkiem prostokąta leżącym na paraboli.
Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(a) = (1 - a) \cdot a^2 = a^2 - a^3.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} P(a) = \lim_{a \rightarrow 1^-} P(a) = 0,$$

a ponadto

$$P'(a) = 2a - 3a^2.$$

Wobec tego $P'(a) = 0$ dla $a = 2/3$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{27}.$$

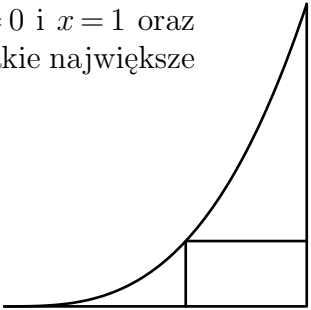
Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi $4/27$.

Uwaga: Używając odpowiedniej wersji¹ nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną można uniknąć różniczkowania.
Mamy bowiem

$$P(a) = (1 - a) \cdot a^2 = 4 \cdot (1 - a) \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2},$$

gdzie otrzymaliśmy iloczyn trzech czynników dodatnich o stałej sumie równej 1, a taki iloczyn jest największy, gdy wszystkie trzy czynniki są równe, czyli równe $1/3$.

644. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz krzywą o równaniu $y=x^3$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



Rozwiązanie:

¹ $xyz \leq \frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{x+y+z}{3}$

Niech (a, a^3) , gdzie $a \in (0, 1)$, będzie wierzchołkiem prostokąta leżącym na krzywej.

Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(a) = (1 - a) \cdot a^3 = a^3 - a^4.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} P(a) = \lim_{a \rightarrow 1^-} P(a) = 0,$$

a ponadto

$$P'(a) = 3a^2 - 4a^3.$$

Wobec tego $P'(a) = 0$ dla $a = 3/4$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej

$$P\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{27}{64} = \frac{27}{256}.$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi $27/256$.

645. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 12}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{C},$$

gdzie $C = 6$ (**wersja trudniejsza**) lub $C = 3$ (**wersja łatwiejsza**).

Rozwiązanie:

Rozwiązanie wersji łatwiejszej:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2),$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[4]{x^2 + 12}$ oraz $b = \sqrt[4]{y^2 + 12}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[4]{x^2 + 12} - \sqrt[4]{y^2 + 12} \right| = \left| \frac{(x^2 + 12) - (y^2 + 12)}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 12} + \sqrt[4]{y^2 + 12}\right) \left(\sqrt{x^2 + 12} + \sqrt{y^2 + 12}\right)} \right| = \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 12} + \sqrt[4]{y^2 + 12}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 12} + \sqrt{y^2 + 12}\right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 12} + \sqrt[4]{y^2 + 12}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 12} + \sqrt{y^2 + 12}\right)}. \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + 12} + \sqrt{y^2 + 12},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 12} + \sqrt{y^2 + 12}} < 1.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{0+12}+\sqrt[4]{0+12}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{12}}.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} & \frac{|x-y| \cdot |x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)} = \\ &= |x-y| \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}} \leq \\ &\leq |x-y| \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{12}} \cdot 1 = \frac{|x-y|}{\sqrt[4]{16 \cdot 12}} \leq \frac{|x-y|}{\sqrt[4]{9 \cdot 9}} = \frac{|x-y|}{3}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie wersji trudniejszej:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y| \cdot |f'(c)|,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y .

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)| \leq 1/6$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Przyjmując²

$$g(x)=f'(x)=\frac{x}{2 \cdot (x^2+12)^{3/4}}$$

otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} g(x)=\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{2 \cdot (x^2+12)^{3/4}}=\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^{-1/2}}{2 \cdot (1+12 \cdot x^{-2})^{3/4}}=0.$$

Zauważmy, że g jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$g'(x)=\frac{1}{2 \cdot (x^2+12)^{3/4}}-\frac{3x^2}{4 \cdot (x^2+12)^{7/4}}.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się tej pochodnej:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot (x^2+12)^{3/4}} &= \frac{3x^2}{4 \cdot (x^2+12)^{7/4}}, \\ 2 \cdot (x^2+12) &= 3x^2, \\ 2 \cdot 12 &= x^2, \\ x &= \pm 2 \cdot \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Wyliczamy wartość funkcji g w miejscach zerowych pochodnej:

$$g\left(\pm 2 \cdot \sqrt{6}\right)=\frac{\pm 2 \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot \left(\left(\pm 2 \cdot \sqrt{6}\right)^2+12\right)^{3/4}}=\pm \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 36^{3/4}}=\pm \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 6^{3/2}}=\pm \frac{1}{6}.$$

²W celu uniknięcia pojęcia pochodnej drugiego rzędu, gdyż to pojęcie nie pojawiło się jeszcze na wykładzie.

Stąd wynika, że funkcja g przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/6$ i $1/6$, skąd $|g(x)| \leq 1/6$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

646. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (2, 4)$ zachodzi nierówność $\sqrt[3]{x} > \sqrt{2}$.

Rozwiązanie:
Niech $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
Wówczas

$$f'(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Zatem $f'(x) > 0$ dla $x < e$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x > e$.
Wobec tego funkcja f jest rosnąca w przedziale $[2, e]$ i malejąca w przedziale $[e, 4]$, a ponieważ $f(2) = f(4) = \sqrt{2}$, otrzymujemy $\sqrt[3]{x} > \sqrt{2}$ dla $x \in (2, 4)$.

647. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem
$$f(x) = 5 \sin x - \sin 5x.$$

Rozwiązanie:
Ponieważ funkcja f jest okresowa z okresem 2π i różniczkowalna, wystarczy porównać wartości funkcji w miejscach zerowych pochodnej znajdujących się w przedziale $[0, 2\pi)$.
Skoro

$$f'(x) = 5 \cos x - 5 \cos 5x,$$

równanie $f'(x) = 0$ jest równoważne równaniu

$$\cos x = \cos 5x.$$

Ponieważ równość

$$\cos x = \cos y$$

jest równoważna istnieniu liczby całkowitej k i znaku $\pm$ takich, że

$$y = 2k\pi \pm x,$$

otrzymujemy równanie

$$5x = 2k\pi \pm x,$$

czyli

$$(5 \mp 1) \cdot x = 2k\pi.$$

Wobec tego

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{k\pi}{3},$$

co w połączeniu z warunkiem $x \in [0, 2\pi)$ prowadzi do ośmiu miejsc zerowych pochodnej w jednym okresie.

Sprawdzając wartości funkcji f w tych ośmiu punktach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f(\pi/3) &= 3\sqrt{3}, & f(\pi/2) &= 4, & f(2\pi/3) &= 3\sqrt{3}, \\ f(\pi) &= 0, & f(4\pi/3) &= -3\sqrt{3}, & f(3\pi/2) &= -4, & f(5\pi/3) &= -3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Największa wartość funkcji f jest równa $3\sqrt{3}$.

648. Niech $f(x) = 4\cos x + \sin 4x$. Podać wszystkie miejsca zerowe pochodnej funkcji f w przedziale $[0, 2\pi)$.

649. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:
 $16 \cdot \operatorname{arctg} 7 + \ln 13$ czy $16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 10$?

Wskazówka 1: Podane liczby są większe od 25, a różnią się o mniej niż 0,02 — nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Wskazówka 2: Zbadaj funkcję pomocniczą $f(x) = 16\operatorname{arctg} x - \ln(x^2 + 1)$.

Rozwiązanie:
Różniczkując podaną we wskazówce funkcję pomocniczą otrzymujemy
$$f'(x) = \frac{16}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2(8 - x)}{x^2 + 1} > 0$$

dla $x < 8$. Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 8]$. W szczególności $f(7) < f(8)$, skąd dostajemy kolejno:

$$\begin{aligned} 16 \cdot \operatorname{arctg} 7 - \ln 50 &< 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 - \ln 65, \\ 16 \cdot \operatorname{arctg} 7 + \ln 65 &< 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 50, \\ 16 \cdot \operatorname{arctg} 7 + \ln 13 + \ln 5 &< 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 10 + \ln 5, \\ 16 \cdot \operatorname{arctg} 7 + \ln 13 &< 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 10. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Większa jest liczba $16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 10$.

W każdym z 10 poniższych zadań podaj największą wartość funkcji f na przedziale $[0, \infty)$.
Odpowiedzi podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

- 650.** $f(x) = \sqrt{x} - 2x^2$ **3/8**
- 651.** $f(x) = 4\sqrt{x} - x^2$ **3**
- 652.** $f(x) = 32\sqrt{x} - x^2$ **48**
- 653.** $f(x) = 4\sqrt{x} - 27x^2$ **1**
- 654.** $f(x) = 32\sqrt{x} - 27x^2$ **16**
- 655.** $f(x) = 4\sqrt{x} - 125x^2$ **3/5**
- 656.** $f(x) = 6\sqrt{x} - x^3$ **5**
- 657.** $f(x) = 3\sqrt{x} - 16x^3$ **5/4**
- 658.** $f(x) = 8\sqrt{x} - x^4$ **7**
- 659.** $f(x) = \sqrt{x} - 16x^4$ **7/16**

660. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f , tzn. $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x .

Podać wzór na pochodną funkcji g . Podać przykład takiej liczby wymiernej $x > 1$, że liczba $g'(x)$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Równość $g(x) = y$ jest równoważna równości $f(y) = x$, czyli

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

lub inaczej

$$x = \frac{t - \frac{1}{t}}{2}, \tag{♣}$$

jeśli przyjmiemy $t = e^y$. Przy tych oznaczeniach mamy $t > 0$ i $y = \ln t$. Rozwiązujemy równanie (♣) tak, aby wyznaczyć t w zależności od x :

$$\begin{aligned} 2xt &= t^2 - 1, \\ t^2 - 2xt - 1 &= 0, \\ t &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}, \\ t &= x \pm \sqrt{x^2 + 1}, \end{aligned}$$

skąd wobec $t > 0$ musimy przyjąć " $\pm$ " = " $+$ ". Ostatecznie

$$t = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

i w konsekwencji

$$g(x) = y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

Mając jawny wzór określający funkcję g bez trudu obliczamy jej pochodną:

$$g'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Jako przykład liczby wymiernej $x > 1$, dla której $g'(x)$ jest liczbą wymierną, przyjmijmy $x = 4/3$. Otrzymujemy wtedy

$$g'(x) = g'(4/3) = \frac{1}{\sqrt{16/9 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{25/9}} = \frac{3}{5}.$$

Sposób II:

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} f'(y) &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \sqrt{\frac{e^{2y} + 2 + e^{-2y}}{4}} = \sqrt{\frac{e^{2y} - 2 + e^{-2y}}{4} + 1} = \sqrt{\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 + 1} = \\ &= \sqrt{(f(y))^2 + 1}. \end{aligned}$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\sqrt{(f(g(x)))^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

W powyższych przekształceniach wykorzystaliśmy równość

$$f'(y) = \sqrt{(f(y))^2 + 1}$$

dla $y = g(x)$.

Dla urozmaicenia tym razem jako przykład liczby wymiernej $x > 1$, dla której $g'(x)$ jest liczbą wymierną, przyjmijmy $x = 12/5$. Otrzymujemy wtedy

$$g'(x) = g'(12/5) = \frac{1}{\sqrt{144/25 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{169/25}} = \frac{5}{13}.$$

661. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $g(x) = x^5 + x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(2)$ i $f'(34)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że pochodna funkcji g dana jest wzorem

$$g'(x) = 5x^4 + 1.$$

Zauważmy też, że

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 2 \quad \text{oraz} \quad g(2) = 34,$$

skąd odpowiednio

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 1 \quad \text{oraz} \quad f(34) = 2.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))},$$

co po podstawieniu kolejno $x = 0$, $x = 2$ i $x = 34$ prowadzi odpowiednio do

$$f'(0) = \frac{1}{g'(f(0))} = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{5 \cdot 0^4 + 1} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$f'(2) = \frac{1}{g'(f(2))} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{5 \cdot 1^4 + 1} = \frac{1}{6}$$

i

$$f'(34) = \frac{1}{g'(f(34))} = \frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{5 \cdot 2^4 + 1} = \frac{1}{81}.$$

Odpowiedź:

$$f'(0) = 1, \quad f'(2) = \frac{1}{6} \quad \text{oraz} \quad f'(34) = \frac{1}{81}.$$

662. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $g(x) = x^3 + 9x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(10)$ i $f'(100)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że pochodna funkcji g dana jest wzorem

$$g'(x) = 3x^2 + 9.$$

Zauważmy też, że

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 10 \quad \text{oraz} \quad g(4) = 100,$$

skąd odpowiednio

$$f(0) = 0, \quad f(10) = 1 \quad \text{oraz} \quad f(100) = 4.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} \, ,$$

co po podstawieniu kolejno $x = 0$, $x = 10$ i $x = 100$ prowadzi odpowiednio do

$$f'(0) = \frac{1}{g'(f(0))} = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{3 \cdot 0^2 + 9} = \frac{1}{9} \, ,$$

$$f'(10) = \frac{1}{g'(f(10))} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 9} = \frac{1}{12}$$

i

$$f'(100) = \frac{1}{g'(f(100))} = \frac{1}{g'(4)} = \frac{1}{3 \cdot 4^2 + 9} = \frac{1}{57} \, .$$

Odpowiedź:

$$f'(0) = \frac{1}{9}, \quad f'(10) = \frac{1}{12} \quad \text{oraz} \quad f'(100) = \frac{1}{57} \, .$$

W każdym z kolejnych 7 zadań funkcja $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji g_i w trzech podanych punktach.

663. $f_1(x) = x^3 + x$	$g'_1(0) = 1$	$g'_1(2) = 1/4$	$g'_1(130) = 1/76$
664. $f_2(x) = x^7 + x$	$g'_2(0) = 1$	$g'_2(2) = 1/8$	$g'_2(130) = 1/449$
665. $f_3(x) = x^3 + 5x$	$g'_3(0) = 1/5$	$g'_3(6) = 1/8$	$g'_3(42) = 1/32$
666. $f_4(x) = x^5 + 5x$	$g'_4(0) = 1/5$	$g'_4(6) = 1/10$	$g'_4(42) = 1/85$
667. $f_5(x) = x^3 + 2x$	$g'_5(3) = 1/5$	$g'_5(12) = 1/14$	$g'_5(72) = 1/50$
668. $f_6(x) = x^3 + 4x$	$g'_6(5) = 1/7$	$g'_6(16) = 1/16$	$g'_6(80) = 1/52$
669. $f_7(x) = 2x^3 + x$	$g'_7(3) = 1/7$	$g'_7(18) = 1/25$	$g'_7(57) = 1/55$

W każdym z kolejnych 5 zadań dla podanej funkcji $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f_i(g_i(x)) = x^3 + 3x \, .$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji f_i w trzech podanych punktach.

670. $g_1(x) = x^3 + x + 6$	$f'_1(8) = 3/2$	$f'_1(16) = 15/13$	$f'_1(36) = 15/14$
671. $g_2(x) = x^3 + 2x + 3$	$f'_2(6) = 6/5$	$f'_2(15) = 15/14$	$f'_2(36) = 30/29$
672. $g_3(x) = 2x^3 + x$	$f'_3(3) = 6/7$	$f'_3(18) = 3/5$	$f'_3(57) = 6/11$
673. $g_4(x) = x^5 + x + 2$	$f'_4(2) = 3$	$f'_4(4) = 1$	$f'_4(36) = 5/27$
674. $g_5(x) = x^5 + 2x$	$f'_5(0) = 3/2$	$f'_5(3) = 6/7$	$f'_5(36) = 15/82$

675. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x)=\arctg\left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}+\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}-1\right)+\arctg\left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}-\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}-1\right)$$

na przedziale $[10, 50]$ i określić, w których punktach te wartości są przyjmowane. Doprowadzić wartości najmniejszą i największą do tak prostej postaci, aby było widać, czy są to liczby wymierne, czy niewymierne.

Wskazówka: $f = g \circ h$, gdzie

$$g(t)=\arctg(t-1)+\arctg\left(\frac{2}{t}-1\right)$$

oraz

$$h(x)=\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}+\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}.$$

Rozwiązanie:

Funkcja $g:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem

$$g(t)=\arctg(t-1)+\arctg\left(\frac{2}{t}-1\right)$$

ma pochodną

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{(t-1)^2+1} + \frac{-2/t^2}{\left(\frac{2}{t}-1\right)^2+1} = \frac{1}{t^2-2t+2} - \frac{2}{(2-t)^2+t^2} = \\ &= \frac{1}{t^2-2t+2} - \frac{2}{4-4t+2t^2} = \frac{1}{t^2-2t+2} - \frac{1}{2-2t+t^2} = 0, \end{aligned}$$

jest więc stała. Ponieważ

$$g(1)=\arctg0+\arctg1=\frac{\pi}{4},$$

mamy $g(t)=\pi/4$ dla każdego $t\in(0,+\infty)$.

Pozostaje zauważyć, że przyjmując

$$t=\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}+\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}$$

otrzymujemy

$$\frac{2}{t}=\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}-\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1},$$

skąd

$$f(x)=g(t)=\frac{\pi}{4}.$$

Zatem f jest funkcją stałą równą $\pi/4$. W konsekwencji przyjmuje ona na całym rozważanym przedziale $[10, 50]$ największą (a zarazem najmniejszą) wartość $\pi/4$ (niewymierną, bo π jest niewymierne).

676. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \frac{e^{2x}-2x^2-2x-1}{x^3} & \text{dla } x\neq 0 \\ A & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{2h} - 2h^2 - 2h - 1}{h^3} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2h} - 2h^2 - 2h - 1 - Ah^3}{h^4}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{2h} - 4h - 2 - 3Ah^2}{4h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4e^{2h} - 4 - 6Ah}{12h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8e^{2h} - 6A}{24h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{8-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=4/3$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16e^{2h}}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=4/3$ i wówczas $f'(0) = 2/3$.

677. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos h}{e^h - 1 - h} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h - Ae^h + A + Ah}{he^h - h - h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h - Ae^h + A}{e^h + he^h - 1 - 2h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - Ae^h}{2e^h + he^h - 2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = 1$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l’Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin h - e^h}{3e^h + he^h} = -\frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = 1$ i wówczas $f'(0) = -1/3$.

678. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - e^{2x} - \ln(1+x)}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{3h} - e^{2h} - \ln(1+h)}{h^2} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{3h} - e^{2h} - \ln(1+h) - Ah^2}{h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l’Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3e^{3h} - 2e^{2h} - \frac{1}{1+h} - 2Ah}{3h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l’Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9e^{3h} - 4e^{2h} + \frac{1}{(1+h)^2} - 2A}{6h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{6-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = 3$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l’Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{27e^{3h} - 8e^{2h} - \frac{2}{(1+h)^3}}{6} = \frac{17}{6}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = 3$ i wówczas $f'(0) = 17/6$.

679. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2xe^{-x} - \ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2he^{-h} - \ln(1+2h)}{h^3} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2he^{-h} - \ln(1+2h) - Ah^3}{h^4}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l’Hospitála.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{-h} - 2he^{-h} - \frac{2}{1+2h} - 3Ah^2}{4h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l’Hospitála.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4e^{-h} + 2he^{-h} + \frac{4}{(1+2h)^2} - 6Ah}{12h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l’Hospitála.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6e^{-h} - 2he^{-h} - \frac{16}{(1+2h)^3} - 6A}{24h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{-10-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = -5/3$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l’Hospitála.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8e^{-h} + 2he^{-h} + \frac{96}{(1+2h)^4} - 8}{24} = \frac{-8 + 96}{24} = \frac{88}{24} = \frac{11}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = -5/3$ i wówczas $f'(0) = 11/3$.

680. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h - \sqrt{1+h}}{\ln(1+h)} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \sqrt{1+h} - A \cdot \ln(1+h)}{h \cdot \ln(1+h)}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l’Hospitála.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{1}{2\sqrt{1+h}} - \frac{A}{1+h}}{\ln(1+h) + \frac{h}{1+h}}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1/2-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = 1/2$. Wówczas możemy po raz drugi zastosować regułę de l’Hospitála.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h + \frac{1}{4 \cdot (1+h)^{3/2}} + \frac{1/2}{(1+h)^2}}{\frac{1}{1+h} + \frac{1}{(1+h)^2}} = \frac{7}{8}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = 1/2$ i wówczas $f'(0) = 7/8$.

681. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \frac{e^{e^x}-e^{x+1}}{x^2} & \text{dla } x\neq 0 \\ A & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\frac{e^{e^h}-e^{h+1}}{h^2}-A}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e^{e^h}-e^{h+1}-Ah^2}{h^3}.$$

Przy $h\rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l’Hospitála.

$$f'(0)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e^{e^h}\cdot e^h-e^{h+1}-2Ah}{3h^2}.$$

Przy $h\rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l’Hospitála.

$$f'(0)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e^{e^h}\cdot e^{2h}+e^{e^h}\cdot e^h-e^{h+1}-2A}{6h}.$$

Przy $h\rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{e-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=e/2$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l’Hospitála.

$$f'(0)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e^{e^h}\cdot e^{3h}+2\cdot e^{e^h}\cdot e^{2h}+e^{e^h}\cdot e^{2h}+e^{e^h}\cdot e^h-e^{h+1}}{6}=\frac{4e}{6}=\frac{2e}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=e/2$ i wówczas $f'(0)=2e/3$.

682. Dobrać takie wartości parametrów rzeczywistych dodatnich k i b , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=x+\frac{1-\sqrt{kx+1}}{2}$$

na przedziale $[-1/k, b]$ była odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest fragment krzywej o równaniu

$$y=x+\frac{1-\sqrt{kx+1}}{2},$$

czyli

$$y-x-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{kx+1}}{2},$$

a to z kolei jest fragmentem krzywej o równaniu

$$y-x-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{kx+1}}{2}.$$

Obustronne podniesienie do kwadratu powyższego równania prowadzi do

$$y^2 + x^2 + \frac{1}{4} - 2xy - y + x = \frac{kx}{4} + \frac{1}{4},$$

czyli

$$y^2 + x^2 - 2xy - y + x \cdot \left(1 - \frac{k}{4}\right) = 0.$$

Powyższe równanie będzie symetryczne ze względu na zamianę x i y , jeżeli współczynnik przy x będzie taki sam jak przy y , co prowadzi do warunku

$$1 - \frac{k}{4} = -1$$

spełnionego dla $k = 8$.

Wobec tego podejrzewamy, że w zadaniu chodzi o funkcję określoną wzorem

$$f(x) = x + \frac{1 - \sqrt{8x + 1}}{2}.$$

Pozostaje wyznaczyć przedział, na którym jest ona odwrotna do samej siebie i to precyzyjnie uzasadnić – na razie wiemy tylko, że wykres funkcji f jest jakimś fragmentem pewnej krzywej symetrycznej względem prostej o równaniu $y = x$.

Na krzywą określoną równaniem

$$y^2 + x^2 - 2xy - y - x = 0$$

składają się wykresy dwóch funkcji $f, g: [-1/8, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonych wzorami

$$f(x) = x + \frac{1 - \sqrt{8x + 1}}{2}$$

oraz

$$g(x) = x + \frac{1 + \sqrt{8x + 1}}{2}.$$

Zauważmy, że

$$f\left(-\frac{1}{8}\right) = g\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8} \quad \text{oraz} \quad f\left(\frac{3}{8}\right) = -\frac{1}{8}.$$

Ponadto funkcja g jest rosnąca (a więc przyjmuje wartości $\geq 3/8$), natomiast wobec³

$$f(x) = \left(\sqrt{x + \frac{1}{8}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

wnioskujemy, że funkcja f jest malejąca⁴ na przedziale $[-1/8, 3/8]$ i przekształca ten przedział na siebie.

Zatem wykres funkcji f ograniczonej do przedziału $[-1/8, 3/8]$ jest określony warunkami

$$y^2 + x^2 - 2xy - y - x = 0, \quad x, y \leq 3/8,$$

³Mniej trikowe jest użycie pochodnej:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{8x + 1}} \begin{cases} < 0 & \text{dla } x < 3/8 \\ > 0 & \text{dla } x > 3/8 \end{cases}$$

⁴I rosnąca na przedziale $[3/8, \infty)$.

a zatem jest symetryczny względem prostej o równaniu $y = x$.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k = 8$ i $b = 3/8$.

Uwaga: Zauważmy, że krzywą o równaniu

$$y^2 + x^2 - 2xy - y - x = 0$$

możemy podzielić na 3 części:

- wykres funkcji f na przedziale $[-1/8, 3/8]$ – składa się ze wszystkich punktów krzywej spełniających warunek $x, y \leq 3/8$,
- wykres funkcji g na przedziale $(-1/8, \infty)$ – wszystkie punkty na tym wykresie spełniają warunek $y > 3/8$,
- wykres funkcji f na przedziale $(3/8, \infty)$ – wszystkie punkty na tym wykresie spełniają warunek $x > 3/8$. Ten wykres jest symetryczny do wykresu funkcji g względem prostej o równaniu $y = x$.

683. Dobrać takie wartości parametrów rzeczywistych dodatnich k i b , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{kx + 1}$$

na przedziale $[-1/k, b]$ była odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest fragment krzywej o równaniu

$$y = x + 1 - \sqrt{kx + 1},$$

czyli

$$y - x - 1 = -\sqrt{kx + 1},$$

a to z kolei jest fragmentem krzywej o równaniu

$$y - x - 1 = \pm \sqrt{kx + 1}.$$

Obustronne podniesienie do kwadratu powyższego równania prowadzi do

$$y^2 + x^2 + 1 - 2xy - 2y + 2x = kx + 1,$$

czyli

$$y^2 + x^2 - 2xy - 2y + x \cdot (2 - k) = 0.$$

Powyższe równanie będzie symetryczne ze względu na zamianę x i y , jeżeli współczynnik przy x będzie taki sam jak przy y , co prowadzi do warunku

$$2 - k = -2$$

spełnionego dla $k = 4$.

Wobec tego podejrzewamy, że w zadaniu chodzi o funkcję określoną wzorem

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{4x + 1}.$$

Pozostaje wyznaczyć przedział, na którym jest ona odwrotna do samej siebie i to precyzyjnie uzasadnić – na razie wiemy tylko, że wykres funkcji f jest jakimś fragmentem pewnej krzywej symetrycznej względem prostej o równaniu $y = x$.

Na krzywą określoną równaniem

$$y^2 + x^2 - 2xy - 2y - 2x = 0$$

składają się wykresy dwóch funkcji $f, g: [-1/4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonych wzorami

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{4x + 1}$$

oraz

$$g(x) = x + 1 + \sqrt{4x + 1}.$$

Zauważmy, że

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = g\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \qquad \text{oraz} \qquad f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Ponadto funkcja g jest rosnąca (a więc przyjmuje wartości $\geq 3/4$), natomiast wobec⁵

$$f(x) = \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} - 1\right)^2 - \frac{1}{4}$$

wnioskujemy, że funkcja f jest malejąca⁶ na przedziale $[-1/4, 3/4]$ i przekształca ten przedział na siebie.

Zatem wykres funkcji f ograniczonej do przedziału $[-1/4, 3/4]$ jest określony warunkami

$$y^2 + x^2 - 2xy - 2y - 2x = 0, \qquad x, y \leq 3/4,$$

a zatem jest symetryczny względem prostej o równaniu $y = x$.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k = 4$ i $b = 3/4$.

Uwaga: Zauważmy, że krzywą o równaniu

$$y^2 + x^2 - 2xy - 2y - 2x = 0$$

- możemy podzielić na 3 części:
- wykres funkcji g na przedziale $(-1/4, \infty)$ – wszystkie punkty na tym wykresie spełniają warunek $y > 3/4$,
 - wykres funkcji f na przedziale $(3/4, \infty)$ – wszystkie punkty na tym wykresie spełniają warunek $x > 3/4$ – ten wykres jest symetryczny do wykresu funkcji g względem prostej o równaniu $y = x$,
 - wykres funkcji f na przedziale $[-1/4, 3/4]$ – składa się ze wszystkich punktów krzywej spełniających warunek $x, y \leq 3/4$.

686. Niech funkcja $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \ln x - \sqrt{x}.$$

⁵Mniej trikowe jest użycie pochodnej:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{4x + 1}} \begin{cases} < 0 & \text{dla } x < 3/4 \\ > 0 & \text{dla } x > 3/4 \end{cases}$$

⁶I rosnąca na przedziale $[3/4, \infty)$.

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(16)+f(18) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(17) \, ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\, ,$$

skąd nierówność $f''(x)>0$ jest równoważna kolejnym nierównościami

$$-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}>0\, ,$$

$$\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}>\frac{1}{x^2}\, ,$$

$$\sqrt{x}>4\, ,$$

$$x>16\, .$$

Zatem f jest ściśle wypukła w przedziale $[16;+\infty)$, skąd

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)\, ,$$

czyli

$$f(x)+f(y)>2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y\geqslant 16$.

W szczególności

$$f(16)+f(18)>2\cdot f(17)\, .$$

687. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\ln x-\sqrt[3]{x}\, .$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(89)+f(91) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(90) \, ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{3\cdot x^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{9\cdot x^{5/3}}\, ,$$

skąd nierówność $f''(x)<0$ jest równoważna kolejnym nierównościami

$$-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{9\cdot x^{5/3}}<0\, ,$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{9 \cdot x^{5/3}} &< \frac{1}{x^2} \, , \\ x^{1/3} &< \frac{9}{2} \, , \\ x &< \frac{9^3}{2^3} = \frac{729}{8} = 91,125 \, .\end{aligned}$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $(0; 91,125)$, skąd

$$f(x) + f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x, y < 91,125$.

W szczególności

$$f(89) + f(91) < 2 \cdot f(90) \, .$$

Uwaga: Bezpośrednie obliczenia pokazują, że

$$f(89) + f(91) \approx \mathbf{0,036809335389}$$

oraz

$$2 \cdot f(90) \approx \mathbf{0,036809847546} \, ,$$

co wydaje się skutecznie odbierać wszelką nadzieję na rozwiązanie zadania poprzez bezpośrednie szacowanie każdej z podanych liczb z osobna.

688. Niech $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 2 \cdot \ln x \, .$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(61) + f(63) \qquad \text{czy} \qquad 2 \cdot f(62) \, ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{2}{x} \, , \\ f''(x) &= -\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{2}{x^2} \, .\end{aligned}$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x) > 0$:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{2}{x^2} &> 0 \, , \\ \frac{2}{x^2} &> \frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} \, , \\ 8 &> \sqrt{x} \, , \\ x &< 64 \, ,\end{aligned}$$

co oznacza, że $f''(x) > 0$ dla $x \in (0, 64)$ oraz $f''(x) < 0$ dla $x \in (64, \infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0, 64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64, \infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0, 64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=61$ oraz $y=63$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(61)+f(63)>2\cdot f(62).$$

Odpowiedź: Liczba $f(61)+f(63)$ jest większa od liczby $2\cdot f(62)$.

689. Niech $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(65)+f(67)\qquad\text{czy}\qquad 2\cdot f(66)\,?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}},$$

$$8>\sqrt{x},$$

$$x<64,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)<0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64,\infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=65$ oraz $y=67$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(65)+f(67)<2\cdot f(66).$$

Odpowiedź: Liczba $f(65)+f(67)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(66)$.

690. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$\arctg100+2\cdot\arctg103+3\cdot\arctg106\qquad\text{czy}\qquad 6\cdot\arctg104\,?$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem $f(x) = \arctg x$. Ponieważ jej pochodna $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ jest malejąca na przedziale $(0, +\infty)$, funkcja f jest na tym przedziale ściśle wklęsła.

Zatem na mocy nierówności Jensena dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich x_1, x_2 i x_3 oraz dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a_1, a_2 i a_3 spełniających warunek $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ zachodzi

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) > a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + a_3f(x_3) \, ,$$

co dla $x_1 = 100, x_2 = 103, x_3 = 106, a_1 = 1/6, a_2 = 1/3, a_3 = 1/2$ prowadzi do nierówności

$$f(104) > \frac{f(100)}{6} + \frac{f(103)}{3} + \frac{f(106)}{2} \, ,$$

gdyż wówczas

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \frac{100}{6} + \frac{103}{3} + \frac{106}{2} = \frac{100 + 2 \cdot 103 + 3 \cdot 106}{6} = \frac{624}{6} = 104 \, .$$

Mnożąc udowodnioną nierówność stronami przez 6 i podstawiając $f(x) = \arctg x$ otrzymujemy

$$6 \cdot \arctg 104 > \arctg 100 + 2 \cdot \arctg 103 + 3 \cdot \arctg 106 \, .$$

Uwaga:

Bezpośrednie wyliczenia pokazują, że

$$\arctg 100 + 2 \cdot \arctg 103 + 3 \cdot \arctg 106 \approx \mathbf{9,367060}$$

oraz

$$6 \cdot \arctg 104 \approx \mathbf{9,367087} \, .$$

Różnica między porównywanymi liczbami jest więc zbyt mała, aby można sobie wyobrazić ich porównanie bez użycia komputera przez oszacowanie każdej z nich z osobna.

691. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\arctg 3 + \arctg 5 + 2 \cdot \ln 4 \qquad \text{czy} \qquad \ln 3 + \ln 5 + 2 \cdot \arctg 4 \, .$$

Rozwiązanie:

Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = \arctg x - \ln x$. Wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-2x^3 + x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 \cdot (x^2 + 1)^2} = \frac{x^3 \cdot (x - 2) + x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 \cdot (x^2 + 1)^2} \, ,$$

co na pewno jest dodatnie dla $x > 2$. Wobec tego funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(2, +\infty)$. Na mocy nierówności Jensena otrzymujemy więc

$$f(4) < \frac{f(3) + f(5)}{2} \, ,$$

co jest równoważne kolejnym nierównościami:

$$2f(4) < f(3) + f(5) \, ,$$

$$2\arctg 4 - 2\ln 4 < \arctg 3 - \ln 3 + \arctg 5 - \ln 5 \, ,$$

$$2\arctg4 + \ln3 + \ln5 < \arctg3 + \arctg5 + 2\ln4 \, .$$

Odpowiedź:

$$\arctg3 + \arctg5 + 2 \cdot \ln4 \qquad > \qquad \ln3 + \ln5 + 2 \cdot \arctg4 \, .$$

692. Niech funkcja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{x}} \, ,$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(6) + f(8) \qquad \text{czy} \qquad 2 \cdot f(7) \, ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f w przedziale $(0, +\infty)$ otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3 \cdot x^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{4/3}} - \frac{2 \cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{5/3}} \, ,$$

skąd nierówność $f''(x) < 0$ jest równoważna kolejnym nierównościami

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{4/3}} - \frac{2 \cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{5/3}} &< 0 \, , \\ x^{1/3} &< 2 \, , \\ x &< 8 \, . \end{aligned}$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[0; 8]$, skąd

$$f(x) + f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych nieujemnych $x, y \leqslant 8$.

W szczególności

$$f(6) + f(8) < 2 \cdot f(7) \, .$$

693. Niech funkcja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[4]{x}},$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(79) + f(81) = \mathbf{39,79911\dots} \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(80) = \mathbf{39,79911\dots} \, ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x) = e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{4 \cdot x^{3/4}}$$

oraz

$$f''(x) = e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{4 \cdot x^{3/4}} \cdot \frac{1}{4 \cdot x^{3/4}} - e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{3}{16 \cdot x^{7/4}} = e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{x^{1/4} - 3}{16 \cdot x^{7/4}},$$

skąd nierówność $f''(x) < 0$ jest równoważna kolejnym nierównościami

$$\begin{aligned} x^{1/4} - 3 &< 0, \\ x^{1/4} &< 3, \\ x &< 81. \end{aligned}$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[0; 81]$, skąd

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} < f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

czyli

$$f(x) + f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x, y \in [0; 81]$.

W szczególności

$$f(79) + f(81) < 2 \cdot f(80).$$

694. Niech funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 10 \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(1600) + f(1602) = \mathbf{-67,54267816\dots} \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(1601) = \mathbf{-67,54267816\dots} \, ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{10}{x}$$

oraz

$$f''(x) = -\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{10}{x^2},$$

skąd nierówność $f''(x) < 0$ jest równoważna kolejnym nierównościami

$$-\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{10}{x^2} < 0,$$

$$\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} > \frac{10}{x^2},$$
$$\sqrt{x} > 40,$$
$$x > 1600.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[1600; +\infty)$, skąd

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} < f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

czyli

$$f(x)+f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y \geqslant 1600$.

W szczególności

$$f(1600)+f(1602) < 2 \cdot f(1601).$$

695. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2+432}$. Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(36,001) = f(36001/1000) \approx \mathbf{12,00016666666667}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{72001}{6000} = 12 + \frac{1}{6000} \approx \mathbf{12,00016666666667}.$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot (x^2+432)^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{2}{3 \cdot (x^2+432)^{2/3}} - \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2+432)^{5/3}} = \frac{6 \cdot (x^2+432)}{9 \cdot (x^2+432)^{5/3}} - \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2+432)^{5/3}} =$$
$$\frac{6x^2+6 \cdot 432-8x^2}{9 \cdot (x^2+432)^{5/3}} = \frac{-2x^2+2 \cdot 36^2}{9 \cdot (x^2+432)^{5/3}} = \frac{2 \cdot (-x^2+36^2)}{9 \cdot (x^2+432)^{5/3}} < 0$$

dla $x > 36$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[36, \infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x > 36$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 36. Ponieważ $f(36) = 12$ oraz $f'(36) = 1/6$, dla $x > 36$ zachodzi nierówność $f(x) < 12 + (x-36)/6$ i w konsekwencji

$$f(36,001) < 12 + \frac{0,001}{6} = 12 + \frac{1}{6000} = \frac{72000}{6000} + \frac{1}{6000} = \frac{72001}{12}.$$

Odpowiedź: Wartość $f(36,001)$ jest mniejsza od $72001/6000$.

696. Dowieść, że nierówność

$$(n+1)^{3n+3} < n^{2n} \cdot (n+3)^{n+3}$$

zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej $n > 0$.

Rozwiązanie:

Po obustronnym zlogarytmowaniu przy podstawie e dana w zadaniu nierówność przybiera postać

$$3 \cdot f(n+1) < 2 \cdot f(n) + f(n+3), \tag{♠}$$

gdzie $f(x) = x \cdot \ln x$ dla $x > 0$. Ponieważ $f'(x) = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1$ oraz $f''(x) = 1/x > 0$, funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0, +\infty)$, skąd wynika nierówność

$$f\left(\frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y\right) < \frac{2}{3} \cdot f(x) + \frac{1}{3} \cdot f(y)$$

prawdziwa dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y . W szczególności dla $x = n$ oraz $y = n + 3$ otrzymujemy

$$f\left(\frac{2}{3} \cdot n + \frac{1}{3} \cdot (n+3)\right) < \frac{2}{3} \cdot f(n) + \frac{1}{3} \cdot f(n+3),$$

czyli

$$f(n+1) < \frac{2}{3} \cdot f(n) + \frac{1}{3} \cdot f(n+3),$$

a to po obustronnym pomnożeniu przez 3 daje nierówność (♠).

697. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ W(x) & \text{dla } 0 < x < 1 \\ x & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

Rozwiązanie:

Niech

$$W(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g.$$

Aby funkcja f była dwukrotnie różniczkowalna w zerze, muszą zachodzić warunki

$$W(0) = W'(0) = W''(0) = 0,$$

skąd

$$d = e = g = 0$$

i w konsekwencji

$$W(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3.$$

Dwukrotną różniczkowalność funkcji f w jedynce otrzymamy pod warunkiem

$$W(1) = W'(1) = 1 \qquad \text{oraz} \qquad W''(1) = 0,$$

co wobec

$$W'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2$$

oraz

$$W''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx$$

prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a + b + c &= 1 \\ 5a + 4b + 3c &= 1 \\ 20a + 12b + 6c &= 0 \end{cases}$$

który ma rozwiązanie $a = 3, b = -8, c = 6$.

Odpowiedź: Wielomianem spełniającym warunki zadania jest $W(x) = 3x^5 - 8x^4 + 6x^3$.

698. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \leq -1 \\ W(x) & \text{dla } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

Rozwiązanie:

Niech

$$W(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g.$$

Aby funkcja f była dwukrotnie różniczkowalna w punkcie -1 , muszą zachodzić warunki

$$W(-1) = -1 \qquad \text{oraz} \qquad W'(-1) = W''(-1) = 0.$$

Dwukrotną różniczkowalność funkcji f w jedynce otrzymamy pod warunkiem

$$W(1) = 1 \qquad \text{oraz} \qquad W'(1) = W''(1) = 0,$$

co wobec

$$W'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$$

oraz

$$W''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d$$

prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} -a + b - c + d - e + g &= -1 \\ a + b + c + d + e + g &= 1 \\ 5a - 4b + 3c - 2d + e &= 0 \\ 5a + 4b + 3c + 2d + e &= 0 \\ -20a + 12b - 6c + 2d &= 0 \\ 20a + 12b + 6c + 2d &= 0 \end{cases} \tag{4}$$

Dodanie stronami równań pierwszego i drugiego, odjęcie trzeciego i czwartego, dodanie piątego i szóstego daje po uproszczeniu

$$\begin{cases} b + d + g &= 0 \\ 2b + d &= 0 \\ 6b + d &= 0 \end{cases}$$

Stąd łatwo otrzymujemy $b=d=g=0$. W konsekwencji układ równań (4) po uproszczeniu przyjmuje postać

$$\begin{cases} a+c+e &= 1 \\ 5a+3c+e &= 0 \\ 10a+3c &= 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $a=3/8, c=-5/4, e=15/8$.

Odpowiedź: Wielomianem spełniającym warunki zadania jest

$$W(x)=\frac{3x^5-10x^3+15x}{8}.$$

699. Niech

$$f(x)=\begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{dla } x\neq 0 \\ A & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

- a) Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?
- b) Dla tej samej wartości parametru A wyznaczyć $f''(0)$.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\frac{e^h-1}{h}-A}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e^h-1-A\cdot h}{h^2}.$$

Przy $h\rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l’Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e^h-A}{2h}.$$

Przy $h\rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1$. Wówczas możemy po raz drugi zastosować regułę de l’Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e^h}{2}=\frac{1}{2}.$$

W celu obliczenia pochodnej drugiego rzędu w zerze musimy najpierw obliczyć pierwszą pochodną poza zerem:

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}.$$

Z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f''(0)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\frac{e^h\cdot h-e^h+1}{h^2}-1/2}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e^h\cdot h-e^h+1-\frac{h^2}{2}}{h^3}.$$

Przy $h\rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l’Hospitala.

$$f''(0)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e^h\cdot h+e^h-e^h-h}{3h^2}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e^h\cdot h-h}{3h^2}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e^h-1}{3h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc ponownie zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h}{3} = \frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = 1$ i wówczas $f'(0) = 1/2$ oraz $f''(0) = 1/3$.

700. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = x^5 + x.$$

Podać dwie pary liczb (n, w) , gdzie n jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią) mniejszą od 100, a w liczbą wymierną, spełniające równanie

$$f''(n) = w.$$

Jeżeli licznik lub mianownik liczby w jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

$f''(2) = -\frac{20}{6^3} = -\frac{20}{216} = -\frac{5}{54}$

$f''(34) = -\frac{160}{81^3} = -\frac{160}{3^{12}}$

701. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + x.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w trzech podanych punktach.

$f''\left(\frac{4}{3}\right) = -1/4$

$f''\left(\frac{14}{3}\right) = -4/125$

$f''(12) = -3/500$

702. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + 2x.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w czterech podanych punktach.

$f''\left(\frac{7}{3}\right) = -2/27$

$f''\left(\frac{20}{3}\right) = -1/54$

$f''(15) = -6/1331$

$f''\left(\frac{88}{3}\right) = -1/729$

703. Niech

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 5}.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(3,01) = f(301/100) \approx \mathbf{2,003375}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{16027}{8000} = 2 + \frac{27}{8000} = \mathbf{2,003375}$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{3x^2}{5 \cdot (x^3 + 5)^{4/5}}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{6x}{5 \cdot (x^3 + 5)^{4/5}} - \frac{36x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} = \frac{30x \cdot (x^3 + 5)}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} - \frac{36x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} = \\ &= \frac{30x^4 + 150x - 36x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} = \frac{150x - 6x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} = \frac{6x \cdot (25 - x^3)}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} < 0 \end{aligned}$$

dla $x > \sqrt[3]{25}$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt[3]{25}, \infty\right)$, zawierającym przedział $\left[\sqrt[3]{27}, \infty\right) = [3, \infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x > 3$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie odpowiadającym $x = 3$. Ponieważ $f(3) = 2$ oraz $f'(3) = 27/80$, dla $x > 3$ zachodzi nierówność

$$f(x) < 2 + \frac{27 \cdot (x - 3)}{80}$$

i w konsekwencji

$$f(3,01) < 2 + \frac{27 \cdot 0,01}{80} = 2 + \frac{27}{8000}.$$

Odpowiedź: Wartość $f(3,01)$ jest mniejsza od $16027/8000$.

704. Niech

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 5}.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(4,08) \approx \mathbf{2,36}$$

jest mniejsza czy większa od

$$f(4) + 0,027 \approx \mathbf{2,36}$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{3x^2}{5 \cdot (x^3 + 5)^{4/5}}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{6x}{5 \cdot (x^3 + 5)^{4/5}} - \frac{36x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} = \frac{30x \cdot (x^3 + 5)}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} - \frac{36x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} = \\ &= \frac{30x^4 + 150x - 36x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} = \frac{150x - 6x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} = \frac{6x \cdot (25 - x^3)}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} < 0 \end{aligned}$$

dla $x > \sqrt[3]{25}$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt[3]{25}, \infty\right)$, zawierającym przedział $\left[\sqrt[3]{27}, \infty\right) = [3, \infty)$, a funkcja f' jest w tym przedziale malejąca.

Zatem wykres funkcji f dla $x > 4$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie odpowiadającym $x = 4$. Ponieważ $f'(4) < f'(3) = 27/80$, dla $x > 4$ zachodzą nierówności

$$f(x) < f(4) + f'(4) \cdot (x - 4) < f(4) + \frac{27 \cdot (x - 4)}{80}$$

i w konsekwencji

$$f(4,08) < f(4) + \frac{27 \cdot 0,080}{80} = f(4) + 0,027.$$

Odpowiedź: Wartość $f(4,08)$ jest mniejsza od $f(4) + 0,027$.

705. Niech

$$f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 5}.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(2,1) = f(21/10) \approx \mathbf{3,30}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{89}{27} = 3 + \frac{8}{27} \approx \mathbf{3,30}$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{5x^4}{3 \cdot (x^5 - 5)^{2/3}}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{20x^3}{3 \cdot (x^5 - 5)^{2/3}} - \frac{50x^8}{9 \cdot (x^5 - 5)^{5/3}} = \frac{60x^3 \cdot (x^5 - 5)}{9 \cdot (x^5 - 5)^{5/3}} - \frac{50x^8}{9 \cdot (x^5 - 5)^{5/3}} = \\ &= \frac{60x^8 - 300x^3 - 50x^8}{9 \cdot (x^5 - 5)^{5/3}} = \frac{10x^8 - 300x^3}{9 \cdot (x^5 - 5)^{5/3}} = \frac{10x^3 \cdot (x^5 - 30)}{9 \cdot (x^5 - 5)^{5/3}} > 0 \end{aligned}$$

dla $x > \sqrt[5]{30}$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $\left[\sqrt[5]{30}, \infty\right)$, zawierającym przedział $\left[\sqrt[5]{32}, \infty\right) = [2, \infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x > 2$ leży powyżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie odpowiadającym $x = 2$. Ponieważ $f(2) = 3$ oraz $f'(2) = 80/27$, dla $x > 2$ zachodzi nierówność

$$f(x) > 3 + \frac{80 \cdot (x - 2)}{27}$$

i w konsekwencji

$$f(2,1) > 3 + \frac{80 \cdot 0,1}{27} = 3 + \frac{8}{27}.$$

Odpowiedź: Wartość $f(2,1)$ jest większa od $89/27$.

706. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz $f''(x) \geq 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x + y}{2}\right) + \frac{(x - y)^2}{8}.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję pomocniczą $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}.$$

Wówczas dla każdej liczby rzeczywistej x otrzymujemy

$$g''(x) = f''(x) - 1 \geq 1 - 1 = 0,$$

skąd wynika, że g jest funkcją wypukłą. Wobec tego dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\frac{g(x) + g(y)}{2} \geq g\left(\frac{x + y}{2}\right),$$

co po wykorzystaniu definicji funkcji g daje kolejno:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - \frac{x^2}{2} + f(y) - \frac{y^2}{2}}{2} &\geq f\left(\frac{x + y}{2}\right) - \frac{\left(\frac{x + y}{2}\right)^2}{2}, \\ \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{x^2 + y^2}{4} &\geq f\left(\frac{x + y}{2}\right) - \frac{(x + y)^2}{8}, \\ \frac{f(x) + f(y)}{2} &\geq f\left(\frac{x + y}{2}\right) + \frac{x^2 + y^2}{4} - \frac{x^2 + 2xy + y^2}{8}, \\ \frac{f(x) + f(y)}{2} &\geq f\left(\frac{x + y}{2}\right) + \frac{2x^2 + 2y^2}{8} - \frac{x^2 + 2xy + y^2}{8}, \\ \frac{f(x) + f(y)}{2} &\geq f\left(\frac{x + y}{2}\right) + \frac{x^2 - 2xy + y^2}{8}, \\ \frac{f(x) + f(y)}{2} &\geq f\left(\frac{x + y}{2}\right) + \frac{(x - y)^2}{8}, \end{aligned}$$

co należało dowieść.

707. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C , że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x = y$, z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |f'(c)|,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y .

Zatem najmniejsza stała C , z którą prawdziwa jest nierówność podana w treści zadania, jest równa kresowi górnemu zbioru $\{|f'(x)| : x \in \mathbb{R}\}$.

Obliczamy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^{-1/3}}{3 \cdot (1 + 2 \cdot x^{-2})^{2/3}} = 0.$$

Ponadto

$$f''(x) = \frac{2}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}} - \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2 + 2)^{5/3}}.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się f'' :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}} &= \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2 + 2)^{5/3}}, \\ 3 \cdot (x^2 + 2) &= 4x^2, \\ 6 &= x^2, \\ x &= \pm\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Wyliczamy wartości funkcji f' w miejscach zerowych jej pochodnej:

$$f'(\pm\sqrt{6}) = \frac{\pm 2 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot \left((\pm\sqrt{6})^2 + 2\right)^{2/3}} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot 8^{2/3}} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot 4} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Stąd wynika, że funkcja f' przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/\sqrt{6}$ i $1/\sqrt{6}$, a zatem $C = 1/\sqrt{6}$.

708. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (2, 4)$ zachodzi nierówność

$$\log_2 x > \frac{x}{2}.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $f(x) = \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$ oraz $g(x) = \frac{x}{2}$. Wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 2}.$$

Zatem funkcja f' jest malejąca w przedziale $(0, \infty)$, skąd wynika, że funkcja f jest funkcją ściśle wklęsłą.

Ponieważ $f(2) = g(2) = 1$ oraz $f(4) = g(4) = 2$, prosta będąca wykresem funkcji liniowej g jest sieczną wykresu funkcji f wyznaczoną przez punkty odpowiadające $x = 2$ i $x = 4$. Odcinek tej prostej zawarty między tymi punktami jest więc cięciwą wykresu funkcji f , a skoro f jest ściśle wklęsła, to leży on poniżej wykresu.

Zatem $f(x) > g(x)$ dla $x \in (2, 4)$, co należało udowodnić.

709. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (3, 5)$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[7]{x^3 + 3} < \frac{x + 7}{6}.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy

$$f(x) = \sqrt[7]{x^3 + 3}.$$

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{3x^2}{7 \cdot (x^3 + 3)^{6/7}}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{6x}{7 \cdot (x^3 + 3)^{6/7}} - \frac{54x^4}{49 \cdot (x^3 + 3)^{13/7}} = \frac{42x \cdot (x^3 + 3)}{49 \cdot (x^3 + 3)^{13/7}} - \frac{54x^4}{49 \cdot (x^3 + 3)^{13/7}} = \\ &= \frac{42x^4 + 126x - 54x^4}{49 \cdot (x^3 + 3)^{13/7}} = \frac{-12x^4 + 126x}{49 \cdot (x^3 + 3)^{13/7}} = \frac{6x \cdot (-2x^3 + 21)}{49 \cdot (x^3 + 3)^{13/7}} < 0 \end{aligned}$$

dla $x > \sqrt[3]{\frac{21}{2}} < 3$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt[3]{\frac{21}{2}}, \infty\right)$ zawierającym interesujący nas przedział $(3, 5)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x \in (3, 5)$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 5. Ponieważ $f(5) = 2$ oraz $f'(5) = \frac{75}{448} > \frac{75}{450} = \frac{1}{6}$, dla $x \in (3, 5)$ zachodzą nierówności⁷

$$\sqrt[7]{x^3 + 3} = f(x) < f(5) + (x - 5) \cdot f'(5) = 2 + (x - 5) \cdot \frac{75}{448} < 2 + (x - 5) \cdot \frac{1}{6} = \frac{12 + (x - 5)}{6} = \frac{x + 7}{6},$$

co kończy rozwiązanie zadania.

⁷Po drodze należy uwzględnić, że liczba $x - 5$ jest ujemna.