

**Zadania do omówienia¹ na ćwiczeniach w czwartek 22.01.2026,
piątek 23.01.2026 i czwartek 29.01.2026.**

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Wstawić znak ”<” albo ”>” i udowodnić powstałą nierówność:

- 718.** e^x $1+x$ dla $x > 0$

719. e^x $1+2x$ dla $0 < x < 1$
- 720.** e^x $1+x+\frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$

721. e^x $1+x+x^2$ dla $0 < x < 1$
- 722.** e^x $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ dla $x > 0$
- 723.** $\ln(x+1)$ x dla $x > 0$

724. $\ln(x+1)$ $x-\frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$
- 725.** $\ln(x+1)$ x dla $-1 < x < 0$

726. $\ln(x+1)$ $x-\frac{x^2}{2}$ dla $-1 < x < 0$
- 727.** $\ln(x+1)$ $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $x > 0$
- 728.** $\ln(x+1)$ $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $-1 < x < 0$
- 729.** $\ln(x+1)$ $\frac{x}{2}$ dla $0 < x < 2$
- 730.** $\arctg x$ x dla $x > 0$

731. $\arctg x$ $\frac{\pi x}{4}$ dla $0 < x < 1$
- 732.** $\sin x$ x dla $x > 0$

733. $\cos x$ $1-\frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$
- 734.** $\sin x$ $x-\frac{x^3}{6}$ dla $x > 0$

735. $\cos x$ $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ dla $x > 0$
- 736.** $\sin x$ $\frac{2x}{\pi}$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$

737. $\sin x$ $\frac{3x}{\pi}$ dla $0 < x < \frac{\pi}{6}$

¹Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

Pochodne wyższych rzędów.

Operacja różniczkowania przypisuje funkcji f jej pochodną f' . Jeżeli dziedzina pochodnej nie jest zbyt zdegenerowana², możemy do pochodnej ponownie zastosować operację różniczkowania otrzymując pochodną pochodnej funkcji f . Tak otrzymaną funkcję nazywamy drugą pochodną lub pochodną drugiego rzędu funkcji f i oznaczamy przez f'' . Taką zabawę można kontynuować dalej różniczkując funkcję f'' i otrzymując trzecią pochodną³ f''' .

Możemy więc napisać

$$(f')' = f'' \qquad \text{oraz} \qquad (f'')' = f'''$$

lub

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}.$$

Na przykład dla funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^{10}$ mamy

$$f'(x) = 10x^9, \qquad f''(x) = 90x^8 \qquad \text{oraz} \qquad f'''(x) = 720x^7.$$

W podobny sposób możemy zdefiniować⁴ pochodną dowolnego rzędu⁵ naturalnego n jako efekt n -krotnego różniczkowania funkcji. Przy tym pochodne rzędu wyższego niż trzeci lub pochodne o rzędzie, który nie jest konkretną liczbą, zapisujemy w postaci $f^{(n)}$. Tak więc czwartą pochodną funkcji f zapiszemy⁶ jako $f^{(4)}$.

Możemy więc przyjąć następującą definicję rekurencyjną

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

lub w innym zapisie

$$\frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right).$$

W uzupełnieniu do tej definicji przyjmujemy, że funkcja jest swoją pochodną zerowego rzędu. Oczywiście pisanie $f^{(0)}$ zamiast f nie ma praktycznego sensu, ale użycie zapisu $f^{(n)}$ w kontekście n mogącego przyjmować wartość 0 będzie przez nas w przyszłości stosowane.

²Formalnie rzecz biorąc, to różniczkować możemy nawet funkcję, która w żadnym punkcie nie jest różniczkowalna – po prostu jej pochodna jest funkcją o pustej dziedzinie i owa pochodna ma kolejną pochodną o pustej dziedzinie. Jednak chodzi nam tutaj nie o formalistyczne niuanse, a o różniczkowanie, które prowadzi do czegoś interesującego.

³Przypominam, że f' czytamy jako "ef prim". Z kolei f'' czytamy jako "ef bis", a f''' jako "ef ter".

⁴To, że je sobie zdefiniujemy, nie oznacza jeszcze, że dla każdej funkcji będą istniały.

⁵Możemy też powiedzieć: n -ta pochodna.

⁶Jeśli ktoś bardzo mocno chce zapisać takie pochodne w notacji prim-bis-ter, to nie zapisujemy tych pochodnych dodając kolejne primy, ale imitując zapis rzymski z małymi literami. Nie napiszemy więc f'''' , ale f^{iv} , przy czym zapis taki jest na tyle rzadko stosowany, że nie ma ustalonych reguł co do ewentualnego stawiania kropki nad "i".

W każdym z kolejnych 10 zadań zapisz w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości trzech pochodnych funkcji w podanym punkcie.

738. $f_1(x) = \sqrt{x}$ $f_1'(25) = \dots\dots\dots$, $f_1''(25) = \dots\dots\dots$, $f_1'''(25) = \dots\dots\dots$
739. $f_2(x) = x \cdot \sqrt{x}$ $f_2'(1/4) = \dots\dots\dots$, $f_2''(1/4) = \dots\dots\dots$, $f_2'''(1/4) = \dots\dots\dots$
740. $f_3(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$ $f_3'(4) = \dots\dots\dots$, $f_3''(4) = \dots\dots\dots$, $f_3'''(4) = \dots\dots\dots$
741. $f_4(x) = \sqrt[3]{x}$ $f_4'(1) = \dots\dots\dots$, $f_4''(1) = \dots\dots\dots$, $f_4'''(1) = \dots\dots\dots$
742. $f_5(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$ $f_5'(1/27) = \dots\dots\dots$, $f_5''(1/27) = \dots\dots\dots$, $f_5'''(1/27) = \dots\dots\dots$
743. $f_6(x) = \ln x$ $f_6'(2) = \dots\dots\dots$, $f_6''(2) = \dots\dots\dots$, $f_6'''(2) = \dots\dots\dots$
744. $f_7(x) = x \cdot \ln x$ $f_7'(1) = \dots\dots\dots$, $f_7''(1) = \dots\dots\dots$, $f_7'''(1) = \dots\dots\dots$
745. $f_8(x) = \arctg x$ $f_8'(1) = \dots\dots\dots$, $f_8''(1) = \dots\dots\dots$, $f_8'''(1) = \dots\dots\dots$
746. $f_9(x) = \arctg x$ $f_9'(2) = \dots\dots\dots$, $f_9''(2) = \dots\dots\dots$, $f_9'''(2) = \dots\dots\dots$
747. $f_{10}(x) = \arctg x$ $f_{10}'(3) = \dots\dots\dots$, $f_{10}''(3) = \dots\dots\dots$, $f_{10}'''(3) = \dots\dots\dots$

W każdym z kolejnych 4 zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

748. $f_1(x) = \ln x$
 $f_1^{(4)}(1) = \dots\dots\dots$ $f_1^{(4)}(2) = \dots\dots\dots$ $f_1^{(4)}(3) = \dots\dots\dots$
749. $f_2(x) = \sin x \cdot \cos x$
 $f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dots\dots\dots$ $f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dots\dots\dots$ $f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$
750. $f_3(x) = (2x + 1)^{5/2}$
 $f_3^{(4)}(0) = \dots\dots\dots$ $f_3^{(4)}(4) = \dots\dots\dots$ $f_3^{(4)}(12) = \dots\dots\dots$
751. $f_4(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$
 $f_4^{(4)}(0) = \dots\dots\dots$ $f_4^{(4)}(3) = \dots\dots\dots$ $f_4^{(4)}(8) = \dots\dots\dots$

752. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2019 funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x) = e^x \cdot \sin x .$$

Otrzymany wzór powinien mieć prostą postać, bez znaku "Σ", z co najwyżej dwoma znakami "+" i co najwyżej dwoma znakami "-".

753. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb rzeczywistych (a, b) , że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = e^{ax} \cdot \cos(bx)$$

jest równa swojej pochodnej trzeciego rzędu.

754. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2022 funkcji

$$f(x) = e^x \sin \left(x \sqrt{3} \right) .$$

Otrzymany wzór powinien mieć prostą postać, nie zawierającą żadnego ze znaków "Σ", "+", "-".

755. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2022 funkcji

$$f(x) = e^x \sin \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) .$$

Otrzymany wzór powinien mieć prostą postać, nie zawierającą żadnego ze znaków "Σ", "+", "-".

Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu n funkcji zmiennej x danej wzorem⁷:

- 756.** $\ln(x^{10})$
- 757.** $\sqrt{x}$
- 758.** $\sqrt[3]{x}$
- 759.** e^{4x}
- 760.** xe^x
- 761.** $\sin 5x$
- 762.** $\cos^2 x$
- 763.** $x^2 \ln x$
- 764.** $\ln \left(x^2 - 1 \right)$
- 765.** $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$
- 766.** $\frac{1}{x+a}$
- 767.** $\frac{1}{(x+a)^2}$
- 768.** $\frac{1}{(x+2025)^{2025}}$
- 769.** $\frac{1}{x^2+x}$
- 770.** $\frac{1}{x^2-1}$
- 771.** $\frac{1}{x^3-x}$
- 772.** $\frac{1}{x^5-5x^3+4x}$
- 773.** $\frac{1}{x^4+2x^3+x^2}$

774. Dowieść, że

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{x^2} = W_n(x) \cdot e^{x^2} ,$$

gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem stopnia n . Wyprowadzić wzór na $W_{n+1}(x)$ w zależności od $W_n(x)$.

775. Dowieść, że

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{x^7} = W_n(x) \cdot e^{x^7} ,$$

gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem stopnia $6n$. Wyprowadzić wzór na $W_{n+1}(x)$ w zależności od $W_n(x)$. Dowieść, że $W_n(x)$ ma postać $V_n \left(x^7 \right) \cdot x^{k_n}$, gdzie $k_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

⁷Wskazówka do niektórych zadań: rozłożyć funkcję na sumę wyrażeń postaci $\frac{c}{x+a}$ lub $\frac{c}{(x+a)^2}$.

Wzór Taylora.

Przypominam wzór Taylora w zerze z użyteczną dla niektórych zadań postacią reszty:

$$f(x)=\sum_{i=0}^n\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i+x^{n+1}\cdot g(x)\,,$$

gdzie g jest funkcją gładką, czyli C^∞ , czyli mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów w otoczeniu zera. Oczywiście musimy założyć, że funkcja f jest gładka w otoczeniu zera, ale to na ogół jest prawdą w przykładach, które spotykamy na swojej drodze.

Ogólna, nieco bardziej sformalizowana, wersja wzoru Taylora w tej postaci wygląda następująco:

Niech f będzie funkcją gładką w otoczeniu punktu x_0 . Wówczas dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka funkcja g_n gładka w otoczeniu x_0 , że dla każdego x odpowiednio bliskiego⁸ x_0 zachodzi równość

$$f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot (x-x_0)^k+(x-x_0)^{n+1}\cdot g_n(x)\,.$$

Do tego trzeba dodać następujące spostrzeżenia⁹:

Po pierwsze:

$$\frac{d^n}{dx^n}x^n=n!$$

Po drugie, dla $k>n$:

$$\frac{d^k}{dx^k}x^n=0$$

I wreszcie po trzecie:

Wobec równości

$$\frac{d}{dx}(x^n\cdot h(x))=x^{n-1}\cdot (n\cdot h(x)+x\cdot h'(x))$$

przez indukcję możemy udowodnić, że dla $k<n$ istnieje taka funkcja h_k , że

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^n\cdot h(x))=x^{n-k}\cdot h_k(x)\,,$$

a to ma w zerze wartość zero. Stąd wniosek, że dla gładkiej funkcji h oraz $k<n$ zachodzi

$$\left.\frac{d^k}{dx^k}(x^n\cdot h(x))\right|_{x=0}=0\,,$$

gdzie przez $F(x)\Big|_{x=a}$ rozumiemy $F(a)$.

⁸Sformułowanie "Dla każdego x odpowiednio bliskiego x_0 ..." można sformalizować jako: Istnieje takie $\delta>0$, że dla każdego $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$...

⁹Dla uproszczenia te spostrzeżenia są sformułowane dla $x_0=0$.

Zbadać, czy funkcja f określona podanym wzorem ma ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne) w podanym punkcie x_0 .

776. $f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2}, \quad x_0 = 0$

777. $f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}, \quad x_0 = 0$

778. $f(x) = \sin x - \ln(1+x), \quad x_0 = 0$

779. $f(x) = 2\cos x + \ln(1+x^2), \quad x_0 = 0$

780. $f(x) = \arctg x - x, \quad x_0 = 0$

781. $f(x) = \arctg x - \frac{x}{2}, \quad x_0 = 1$

782. Funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma w przedziale $D_f = [a, b]$ ciągle pochodne do rzędu trzeciego włącznie (na końcach przedziału ma pochodne jednostronne równe odpowiednim granicom jednostronnym odpowiednich pochodnych).

a) Czy funkcja f ma w punkcie a ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

- (i) $f'(a^+) > 0$
- (ii) $f'(a^+) < 0$
- (iii) $f'(a^+) = 0, \quad f''(a^+) > 0$
- (iv) $f'(a^+) = 0, \quad f''(a^+) < 0$
- (v) $f'(a^+) = f''(a^+) = 0, \quad f'''(a^+) > 0$
- (vi) $f'(a^+) = f''(a^+) = 0, \quad f'''(a^+) < 0$

b) Czy funkcja f ma w punkcie b ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

- (vii) $f'(b^-) > 0$
- (viii) $f'(b^-) < 0$
- (ix) $f'(b^-) = 0, \quad f''(b^-) > 0$
- (x) $f'(b^-) = 0, \quad f''(b^-) < 0$
- (xi) $f'(b^-) = f''(b^-) = 0, \quad f'''(b^-) > 0$
- (xii) $f'(b^-) = f''(b^-) = 0, \quad f'''(b^-) < 0$

783. Dobrać takie liczby rzeczywiste a, b, c , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{1+x} + ax + bx^2 + cx^3$$

spełniała warunek

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

784. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \ln(1+x) + e^{-x} + ax^3$$

spełniała warunek

$$f'''(0) = 0.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

785. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \ln(1+x) + a \cdot e^x$$

miała w zerze (lokalne) ekstremum. Jakie to ekstremum?

786. W zadaniach **786.1–786.10** funkcja f_k jest określona wzorem

$$f_k(x) = x^k \cdot \ln(1+x).$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartość pochodnej wskazanego rzędu w zerze.

- 786.1.** $f_1''(0) = \dots\dots\dots$

786.2. $f_1'''(0) = \dots\dots\dots$
- 786.3.** $f_1^{(4)}(0) = \dots\dots\dots$

786.4. $f_1^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$
- 786.5.** $f_2'''(0) = \dots\dots\dots$

786.6. $f_2^{(4)}(0) = \dots\dots\dots$
- 786.7.** $f_2^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$

786.8. $f_3^{(4)}(0) = \dots\dots\dots$
- 786.9.** $f_3^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$

786.10. $f_4^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$

787. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^2 \cdot e^x.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0) = \dots\dots$

b) $f^{(10)}(0) = \dots\dots$

c) $f^{(9)}(0) = \dots\dots$

d) $f^{(8)}(0) = \dots\dots$

788. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^3 \cdot e^x.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0) = \dots\dots$

b) $f^{(6)}(0) = \dots\dots$

c) $f^{(10)}(0) = \dots\dots$

d) $f^{(11)}(0) = \dots\dots$

789. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^{100} \cdot e^x.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(100)}(0) = \dots\dots$

b) $f^{(101)}(0) = \dots\dots$

c) $f^{(102)}(0) = \dots\dots$

d) $f^{(103)}(0) = \dots\dots$

790. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \sin^2 x.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0) = \dots\dots$ **b)** $f^{(5)}(0) = \dots\dots$ **c)** $f^{(6)}(0) = \dots\dots$ **d)** $f^{(8)}(0) = \dots\dots$

791. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln(1+x)}{12!}.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0) = \dots\dots$ **b)** $f^{(12)}(0) = \dots\dots$ **c)** $f^{(13)}(0) = \dots\dots$ **d)** $f^{(14)}(0) = \dots\dots$

792. Niech $f(x) = e^{x^5}$. Obliczyć $f^{(2020)}(0)$ i $f^{(2021)}(0)$.

793. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \ln(1+x) + e^{-x} + ax^3$$

spełniała warunek

$$f'''(0) = 0.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

794. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sin(x^3) + a \cdot \sin(x^5)$$

spełniała warunek

$$f^{(15)}(0) = 0.$$

795. Przy okazji reguły de l’Hospitála rozwiązywaliśmy takie oto zadanko:
Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - e^{2x} - \ln(1+x)}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .
Rozwiązać powyższe zadanie korzystając ze wzoru Taylora i przy okazji obliczyć $f''(0)$, $f'''(0)$ oraz $f^{(4)}(0)$.

796. Przy okazji reguły de l’Hospitála rozwiązywaliśmy takie oto zadanko:
Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2xe^{-x} - \ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .
Rozwiązać powyższe zadanie korzystając ze wzoru Taylora i przy okazji obliczyć $f''(0)$, $f'''(0)$ oraz $f^{(4)}(0)$.