Wstawić znak "<" albo ">" i udowodnić powstałą nierówność:

718. $e^x > 1+x$ dla $x>0$ **719.** $e^x < 1+2x$ dla $0<x<1$

720. $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$ **721.** $e^x < 1+x+x^2$ dla $0<x<1$

722. $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$

723. $\ln(x+1) < x$ dla $x>0$ **724.** $\ln(x+1) > x-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

725. $\ln(x+1) < x$ dla $-1<x<0$ **726.** $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}$ dla $-1<x<0$

727. $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $x>0$

728. $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $-1<x<0$

729. $\ln(x+1) > \frac{x}{2}$ dla $0<x<2$

730. $\operatorname{arctg} x < x$ dla $x>0$ **731.** $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi x}{4}$ dla $0<x<1$

732. $\sin x < x$ dla $x>0$ **733.** $\cos x > 1-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

734. $\sin x > x-\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$ **735.** $\cos x < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ dla $x>0$

736. $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{2}$ **737.** $\sin x > \frac{3x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{6}$

W każdym z kolejnych 10 zadań zapisz w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości trzech pochodnych funkcji w podanym punkcie.

738. $f_1(x)=\sqrt{x}$ $f_1'(25)=\mathbf{1/10}$, $f_1''(25)=\mathbf{-1/500}$, $f_1'''(25)=\mathbf{3/25000}$

739. $f_2(x)=x\cdot\sqrt{x}$ $f_2'(1/4)=\mathbf{3/4}$, $f_2''(1/4)=\mathbf{3/2}$, $f_2'''(1/4)=\mathbf{-3}$

740. $f_3(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$ $f_3'(4)=\mathbf{20}$, $f_3''(4)=\mathbf{15/2}$, $f_3'''(4)=\mathbf{15/16}$

741. $f_4(x)=\sqrt[3]{x}$ $f_4'(1)=\mathbf{1/3}$, $f_4''(1)=\mathbf{-2/9}$, $f_4'''(1)=\mathbf{10/27}$

742. $f_5(x)=x\cdot\sqrt[3]{x}$ $f_5'(1/27)=\mathbf{4/9}$, $f_5''(1/27)=\mathbf{4}$, $f_5'''(1/27)=\mathbf{-72}$

743. $f_6(x)=\ln x$ $f_6'(2)=\mathbf{1/2}$, $f_6''(2)=\mathbf{-1/4}$, $f_6'''(2)=\mathbf{1/4}$

744. $f_7(x)=x\cdot\ln x$ $f_7'(1)=\mathbf{1}$, $f_7''(1)=\mathbf{1}$, $f_7'''(1)=\mathbf{-1}$

745. $f_8(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_8'(1)=\mathbf{1/2}$, $f_8''(1)=\mathbf{-1/2}$, $f_8'''(1)=\mathbf{1/2}$

746. $f_9(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_9'(2)=\mathbf{1/5}$, $f_9''(2)=\mathbf{-4/25}$, $f_9'''(2)=\mathbf{22/125}$

747. $f_{10}(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_{10}'(3)=\mathbf{1/10}$, $f_{10}''(3)=\mathbf{-3/50}$, $f_{10}'''(3)=\mathbf{13/250}$

W każdym z kolejnych 4 zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

748. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$ $f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$ $f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

749. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$ $f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$ $f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

750. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$ $f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$ $f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

751. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$ $f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$ $f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

752. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2019 funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x)=e^x\cdot\sin x\,.$$

Otrzymany wzór powienien mieć prostą postać, bez znaku "$\sum$", z co najwyżej dwoma znakami "+" i co najwyżej dwoma znakami "−".

Rozwiązanie:

Obliczając kolejne pochodne funkcji f otrzymujemy

$$f'(x)=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x\,,$$

$$f''(x)=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x+e^x\cdot\cos x-e^x\cdot\sin x=2\cdot e^x\cdot\cos x\,,$$

$$f'''(x)=2\cdot e^x\cdot\cos x-2\cdot e^x\cdot\sin x\,,$$

$$f^{(4)}(x)=2\cdot e^x\cdot\cos x-2\cdot e^x\cdot\sin x-2\cdot e^x\cdot\sin x-2\cdot e^x\cdot\cos x=-4\cdot e^x\cdot\sin x=-4\cdot f(x)\,,$$

skąd wynika, że czterokrotne zróżniczkowanie funkcji f jest równoważne z pomnożeniem jej przez -4.

Wobec tego

$$f^{(2019)}(x)=\frac{d^3}{dx^3}f^{(2016)}(x)=\frac{d^3}{dx^3}f^{(4\cdot 504)}(x)=\frac{d^3}{dx^3}(-4)^{504}f(x)=2^{1008}\cdot f'''(x)=$$
$$=2^{1008}\cdot(2\cdot e^x\cdot\cos x-2\cdot e^x\cdot\sin x)=2^{1009}\cdot e^x\cdot(\cos x-\sin x)\,.$$

Zbadać, czy funkcja f określona podanym wzorem ma ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne) w podanym punkcie x_0.

776. $f(x)=e^x-x-\frac{x^2}{2}$, $x_0=0$ **NIE**

777. $f(x)=e^x-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$, $x_0=0$ **MIN**

778. $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$, $x_0=0$ **MIN**

779. $f(x)=2\cos x+\ln\left(1+x^2\right)$, $x_0=0$ **MAX**

780. $f(x)=\mathrm{arctg} x-x$, $x_0=0$ **NIE**

781. $f(x)=\mathrm{arctg} x-\frac{x}{2}$, $x_0=1$ **MAX**

782. Funkcja $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ ma w przedziale $D_f=[a,\,b]$ ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie (na końcach przedziału ma pochodne jednostronne równe odpowiednim granicom jednostronnym odpowiednich pochodnych).

a) Czy funkcja f ma w punkcie a ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(i) $f'(a^+)>0$ **MIN**

(ii) $f'(a^+)<0$ **MAX**

(iii) $f'(a^+)=0$, $f''(a^+)>0$ **MIN**

(iv) $f'(a^+)=0$, $f''(a^+)<0$ **MAX**

(v) $f'(a^+)=f''(a^+)=0$, $f'''(a^+)>0$ **MIN**

(vi) $f'(a^+)=f''(a^+)=0$, $f'''(a^+)<0$ **MAX**

b) Czy funkcja f ma w punkcie b ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(vii) $f'(b^-)>0$ **MAX**

(viii) $f'(b^-)<0$ **MIN**

(ix) $f'(b^-)=0$, $f''(b^-)>0$ **MIN**

(x) $f'(b^-)=0$, $f''(b^-)<0$ **MAX**

(xi) $f'(b^-)=f''(b^-)=0$, $f'''(b^-)>0$ **MAX**

(xii) $f'(b^-)=f''(b^-)=0$, $f'''(b^-)<0$ **MIN**

786. W zadaniach **786.1–786.10** funkcja f_k jest określona wzorem

$$f_k(x)=x^k\cdot\ln(1+x)\,.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartość pochodnej wskazanego rzędu w zerze.

786.1. $f_1''(0)=\mathbf{2}$

786.2. $f_1'''(0)=\mathbf{-3}$

786.3. $f_1^{(4)}(0)=\mathbf{8}$

786.4. $f_1^{(5)}(0)=\mathbf{-30}$

786.5. $f_2'''(0)=\mathbf{6}$

786.6. $f_2^{(4)}(0)=\mathbf{-12}$

786.7. $f_2^{(5)}(0)=\mathbf{40}$

786.8. $f_3^{(4)}(0)=\mathbf{24}$

786.9. $f_3^{(5)}(0)=\mathbf{-60}$

786.10. $f_4^{(5)}(0)=\mathbf{120}$

787. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=x^2\cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0)=\mathbf{110}$ **b)** $f^{(10)}(0)=\mathbf{90}$

c) $f^{(9)}(0)=\mathbf{72}$ **d)** $f^{(8)}(0)=\mathbf{56}$

788. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=x^3\cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0)=\mathbf{24}$ **b)** $f^{(6)}(0)=\mathbf{120}$

c) $f^{(10)}(0)=\mathbf{720}$ **d)** $f^{(11)}(0)=\mathbf{990}$

789. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=x^{100}\cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(100)}(0)=\mathbf{100!}$ **b)** $f^{(101)}(0)=\mathbf{101!}$

c) $f^{(102)}(0)=\mathbf{102!/2}$ **d)** $f^{(103)}(0)=\mathbf{103!/6}$

790. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\sin^2 x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0)=\mathbf{-8}$ **b)** $f^{(5)}(0)=\mathbf{0}$

c) $f^{(6)}(0)=\mathbf{32}$ **d)** $f^{(8)}(0)=\mathbf{-128}$

791. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\frac{x\cdot\ln(1+x)}{12!}\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0)=\mathbf{-1/120}$ **b)** $f^{(12)}(0)=\mathbf{1/11}$

c) $f^{(13)}(0)=\mathbf{-13/12}$ **d)** $f^{(14)}(0)=\mathbf{14}$

792. Niech $f(x)=e^{x^5}$. Obliczyć $f^{(2020)}(0)$ i $f^{(2021)}(0)$.

Rozwiązanie:

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takiej funkcji gładkiej g, że

$$e^x=\sum_{k=0}^{404}\frac{x^k}{k!}+x^{405}\cdot g(x)\,.$$

Wobec tego
$$f(x)=e^{x^5}=\sum_{k=0}^{404}\frac{x^{5k}}{k!}+x^{2025}\cdot g\left(x^5\right)$$
i w konsekwencji
$$f^{(2020)}(x)=\frac{2020!}{404!}+\frac{d^{2020}}{dx^{2020}}\left(x^{2025}\cdot g\left(x^5\right)\right)\,.$$
Zatem
$$f^{(2020)}(0)=\frac{2020!}{404!}\,.$$
Analogicznie
$$f^{(2021)}(x)=\frac{d^{2021}}{dx^{2021}}\left(x^{2025}\cdot g\left(x^5\right)\right)\,,$$
skąd
$$f^{(2021)}(0)=0\,.$$

793. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\ln(1+x)+e^{-x}+ax^3$$
spełniała warunek
$$f'''(0)=0\,.$$
Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

Rozwiązanie:

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takich funkcji gładkich g i h, że
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+x^5\cdot g(x)$$
oraz
$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+x^5\cdot h(x)\,.$$
Zatem
$$\ln(1+x)+e^{-x}=1+\frac{x^3}{6}-\frac{5\cdot x^4}{24}+x^5\cdot(g(x)+h(x))\,.$$
Stąd wynika, że warunki zadania spełnia $a=-1/6$ i wówczas
$$f(x)=1-\frac{5\cdot x^4}{24}+x^5\cdot(g(x)+h(x))=1+\left(\frac{-5}{24}+x\cdot(g(x)+h(x))\right)\cdot x^4$$
ma w zerze lokalne maksimum, gdyż
$$\frac{-5}{24}+x\cdot(g(x)+h(x))<0$$
dla x bliskich 0.

794. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\sin\left(x^3\right)+a\cdot\sin\left(x^5\right)$$
spełniała warunek
$$f^{(15)}(0)=0\,.$$

Rozwiązanie:

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takiej funkcji gładkiej g, że

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^7 \cdot g(x)\,.$$

Zatem

$$f(x) = \sin\left(x^3\right) + a\cdot\sin\left(x^5\right) = x^3 - \frac{x^9}{6} + \frac{x^{15}}{120} + x^{21}\cdot g\left(x^3\right) + a\cdot x^5 - \frac{a\cdot x^{15}}{6} + \frac{a\cdot x^{25}}{120} + a\cdot x^{35}\cdot g\left(x^5\right) =$$

$$= x^3 + a\cdot x^5 - \frac{x^9}{6} + \frac{(1-20\cdot a)\cdot x^{15}}{120} + x^{21}\cdot\left(g\left(x^3\right) + \frac{a\cdot x^4}{120} + a\cdot x^{14}\cdot g\left(x^5\right)\right)\,.$$

Warunek $f^{(15)}(0)=0$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy współczynnik przy x^{15} jest równy 0, czyli dla $a=1/20$.