Zadania do omówienia[1] na wykładzie w środę 28.01.2026 i czwartek 29.01.2026.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami !!!

Szeregi liczbowe.

797. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 9\,.$$

798. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 8\,.$$

799. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1\,.$$

800. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2 = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,.$$

Dla podanego przykładu wyznaczyć wartości sum szeregów występujących w powyższym równaniu i sprawdzić, że jest ono spełnione.

801. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = 6\,.$$

802. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})^2 = \frac{4}{3}\,.$$

803. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 15 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4\,.$$

[1]Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

804. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 20, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 5\,.$$

805. Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4\,.$$

806. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-9}\,.$$

807. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}\,.$$

808. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+3n-2}\,.$$

809. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4}\,.$$

810. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+2)\cdot(n+3)}\,.$$

811. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n}\,.$$

812. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3-4n}\,.$$

813. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)}\,.$$

Niech

$$a_n=\frac{120}{n(n+1)(n+2)} \qquad \text{dla} \qquad n\in\mathbb{N}\,.$$

Wiadomo, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 30.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

814. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=$ ....

815. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=$ ....

816. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_1\cdot a_n)=$ ....

817. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_2\cdot a_n)=$ ....

818. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+1}^2\right)=$ ....

819. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+2}^2\right)=$ ....

820. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+3}^2\right)=$ ....

821. $\sum_{\mathbf{n=2}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

822. $\sum_{\mathbf{n=3}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

823. $\sum_{\mathbf{n=4}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

Niech
$$a_n = \frac{60}{n(n+1)} \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$
Wiadomo, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 60.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

824. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) =$ ....

825. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) =$ ....

826. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) =$ ....

827. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_2 \cdot a_n) =$ ....

828. $\sum_{\mathbf{n=3}}^{\infty} a_n =$ ....

829. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^3 - a_{n+1}^3\right) =$ ....

830. $\sum_{n=1}^{\infty} \Big((a_n - a_{n+1}) \cdot (a_n + a_{n+1})\Big) =$ ....

831. $\sum_{\mathbf{n=3}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ ....

832. $\sum_{\mathbf{n=4}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ ....

833. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_n^2 + 1600} - \sqrt{a_{n+1}^2 + 1600}\right) =$ ....

W każdym z poniższych 5 zadań podaj w postaci uproszczonej sumę szeregu.

834. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)=$ ....

835. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+2]{n+2}\right)=$ ....

836. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+3]{n+3}\right)=$ ....

837. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)=$ ....

838. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+2]{n+2}\right)=$ ....

Niech $a_n=\frac{120}{n(n+2)}$ dla $n\in\mathbb{N}$. Wiadomo, że wówczas szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 90.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

839. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=$ ....

840. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=$ ....

841. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+1}^2\right)=$ ....

842. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+2}^2\right)=$ ....

843. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+3}^2\right)=$ ....

844. $\sum\limits_{\mathbf{n=4}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

845. $\sum\limits_{\mathbf{n=6}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

846. $\sum\limits_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

847. $\sum\limits_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(3^{a_n}-3^{a_{n+1}}\right)=$ ....

848. $\sum\limits_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(4^{a_n}-4^{a_{n+1}}\right)=$ ....