

**797.** Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach  **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 9.$$

*Rozwiązanie:*

Niech  $q$  będzie ilorazem szeregu geometrycznego  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Wówczas dodatniość wyrazów i zbieżność szeregu pociągają nierówności  $a_1 > 0$  oraz  $0 < q < 1$ , a wyrazy szeregu wyrażają się wzorem  $a_n = a_1 q^{n-1}$ . Ponadto ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Ponieważ wyrazy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

wyrażają się wzorem

$$a_n^2 = a_1^2 \cdot (q^2)^{n-1},$$

szereg ten jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie  $a_1^2$  i ilorazie  $q^2$ . Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a_1^2}{1-q^2}.$$

Zatem warunki podane w treści zadania przyjmują postać

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1^2}{1-q^2} = 9,$$

co po przekształceniu prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a_1 = 9 \cdot (1-q) \\ a_1^2 = 9 \cdot (1-q) \cdot (1+q) \end{cases}$$

Podstawienie  $a_1 = 9 \cdot (1-q)$  do drugiego równania daje

$$81 \cdot (1-q)^2 = 9 \cdot (1-q) \cdot (1+q),$$

skąd po uwzględnieniu  $q \neq 1$  i podzieleniu obustronnie przez  $9 \cdot (1-q)$  otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} 9 - 9q &= q + 1, \\ q &= 4/5, \quad a_1 = 9/5. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Jedynym szeregiem geometrycznym spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9 \cdot 4^{n-1}}{5^n}.$$

**798.** Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach  **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 8.$$

*Rozwiązanie:*

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu założmy, że  $a_n = cq^{n-1}$ , pamiętając, aby  $c > 0$  oraz  $0 < q < 1$ . Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 (q^2)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2},$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{c}{1-q} = 4 \\ \frac{c^2}{1-q^2} = 8, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} c = 4(1-q) \\ c^2 = 8(1-q^2). \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$c = 2 + 2q,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania daje kolejno

$$2 + 2q = 4 - 4q,$$

$$6q = 2,$$

$$q = \frac{1}{3},$$

skąd

$$c = 2 + 2q = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Otrzymane rozwiązanie  $q = 1/3$ ,  $c = 8/3$  prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{8}{3^n}.$$

**Odpowiedź:** Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{3^n}.$$

**799.** Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach  **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1.$$

*Rozwiązanie:*

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu założymy, że  $a_n = aq^{n-1}$ , pamiętając, aby  $a > 0$  oraz  $0 < q < 1$ . Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a(-q)^{n-1} = \frac{a}{1+q},$$

co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a = 3(1-q) \\ a = 1+q \end{cases}$$

mającego rozwiązanie  $q = 1/2$ ,  $a = 3/2$ .

**Odpowiedź:** Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}.$$

**800.** Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach **dodatnich**, że

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^2 = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Dla podanego przykładu wyznaczyć wartości sum szeregów występujących w powyższym równaniu i sprawdzić, że jest ono spełnione.

*Rozwiązanie:*

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu założymy, że  $a_n = c \cdot q^{n-1}$ , pamiętając, aby  $c > 0$  oraz  $0 < q < 1$ . Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot q^{n-1} = \frac{c}{1-q},$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 \cdot (q^2)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2},$$

co w połączeniu z warunkiem podanym w treści zadania prowadzi do równania

$$\left( \frac{c}{1-q} \right)^2 = 2 \cdot \frac{c^2}{1-q^2},$$

czyli

$$\frac{c^2}{(1-q)^2} = \frac{2 \cdot c^2}{1-q^2}.$$

Przekształcanie powyższego równania prowadzi kolejno do:

$$\frac{c^2}{(1-q)^2} = \frac{2 \cdot c^2}{(1-q)(1+q)},$$

$$1+q = 2 \cdot (1-q),$$

$$1+q = 2 - 2q,$$

$$3q = 1,$$

$$q = 1/3.$$

Widzimy więc, że w przypadku szeregu geometrycznego, podany w zadaniu warunek jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz szeregu jest równy  $1/3$ .

Możemy więc przyjąć

$$a_n = \frac{1}{3^n},$$

co prowadzi do

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} = \frac{1}{8}.$$

Wówczas podane w treści zadania równanie przyjmuje postać

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{8},$$

jest więc spełnione – każda z jego stron jest równa  $1/4$ .

**Odpowiedź:** Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}.$$

**801.** Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = 6.$$

*Rozwiązanie:*

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu założymy, że  $a_n = cq^{n-1}$ , pamiętając, aby  $c > 0$  oraz  $0 < q < 1$ . Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 q (q^2)^{n-1} = \frac{c^2 q}{1-q^2},$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{c}{1-q} = 6 \\ \frac{c^2 q}{1-q^2} = 6, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} c = 6(1-q) \\ c^2 q = 6(1-q^2). \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$cq = 1 + q,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania przemnożonego przez  $q$  daje kolejno

$$1 + q = 6q - 6q^2,$$

$$6q^2 - 5q + 1 = 0,$$

$$q = \frac{5 \pm 1}{12},$$

skąd

$$q = 1/3, \quad c = 4$$

lub

$$q = 1/2, \quad c = 3.$$

Otrzymane rozwiązania prowadzą odpowiednio do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{4}{3^{n-1}} \quad \text{oraz} \quad a_n = cq^{n-1} = \frac{3}{2^{n-1}}.$$

**Odpowiedź:** Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}}.$$

**802.** Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach  **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})^2 = \frac{4}{3}.$$

*Rozwiązanie:*

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu założmy, że  $a_n = cq^{n-1}$ , pamiętając, aby  $c > 0$  oraz  $0 < q < 1$ . Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2(1+q)^2 \cdot (q^2)^{n-1} = \frac{c^2 \cdot (1+q)^2}{1-q^2},$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{c}{1-q} = \frac{4}{3} \\ \frac{c^2 \cdot (1+q)^2}{1-q^2} = \frac{4}{3}, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} 3c = 4(1-q) \\ 3c^2 \cdot (1+q) = 4(1-q). \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$c \cdot (1+q) = 1,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania przemnożonego przez  $1+q$  daje kolejno

$$\begin{aligned} 3 &= 4 \cdot (1 - q^2), \\ 3/4 &= 1 - q^2, \\ q^2 &= 1/4, \end{aligned}$$

skąd

$$q = 1/2, \quad c = 1/(1+q) = 2/3.$$

Otrzymane rozwiązanie prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}}.$$

**Odpowiedź:** Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}}.$$

**803.** Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach  **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 15 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4.$$

*Rozwiązanie:*

Niech  $q$  będzie ilorazem szeregu geometrycznego  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Wówczas dodatniość wyrazów i zbieżność szeregu pociągają nierówności  $a_1 > 0$  oraz  $0 < q < 1$ , a wyrazy szeregu wyrażają się wzorem  $a_n = a_1 q^{n-1}$ . Ponadto ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Ponieważ wyrazy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$$

wyrażają się odpowiednio wzorami

$$a_n^2 = a_1^2 \cdot (q^2)^{n-1} \quad \text{oraz} \quad a_n^4 = a_1^4 \cdot (q^4)^{n-1},$$

szeregi te są szeregami geometrycznymi o ilorazach odpowiednio  $q^2$  oraz  $q^4$ . Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a_1^2}{1-q^2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{a_1^4}{1-q^4}.$$

Zatem warunek podany w treści zadania przyjmuje postać

$$\frac{a_1}{1-q} = 3 \cdot \frac{a_1^2}{1-q^2} = 15 \cdot \frac{a_1^4}{1-q^4},$$

co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 3 \cdot \frac{a_1^2}{1-q^2} \\ \frac{a_1^2}{1-q^2} = 5 \cdot \frac{a_1^4}{1-q^4} \end{cases}$$

równoważnego (po uproszczeniu) układowi

$$\begin{cases} 1+q = 3 \cdot a_1 \\ 1+q^2 = 5 \cdot a_1^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy  $q = 3a_1 - 1$ , co po podstawieniu do równania drugiego daje

$$1 + (3a_1 - 1)^2 = 5a_1^2,$$

czyli kolejno

$$1 + 9a_1^2 - 6a_1 + 1 = 5a_1^2,$$

$$4a_1^2 - 6a_1 + 2 = 0,$$

$$2a_1^2 - 3a_1 + 1 = 0,$$

co jest spełnione przez  $a_1 = 1$  oraz  $a_1 = 1/2$ , prowadzące odpowiednio do  $q = 2$  oraz  $q = 1/2$ . Pierwsze z tych rozwiązań odrzucamy, gdyż nie spełnia ono nierówności  $q < 1$ .

**Odpowiedź:** Jedynym szeregiem geometrycznym spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

**804.** Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach  **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 20, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 5.$$

*Rozwiązanie:*

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu założmy, że  $a_n = c \cdot q^{n-1}$ , pamiętając, aby  $c > 0$  oraz  $0 < q < 1$ . Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot q^{n-1} = \frac{c}{1-q},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{q}{2}\right)^{n-1} = \frac{c/2}{1-q/2} = \frac{c}{2-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{3} \cdot \left(\frac{q}{3}\right)^{n-1} = \frac{c/3}{1-q/3} = \frac{c}{3-q},$$

co w połączeniu z warunkami podanymi w treści zadania prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{c}{1-q} = 20 \\ \frac{c}{2-q} = 8 \\ \frac{c}{3-q} = 5 \end{cases}$$

Po przemnożeniu równań przez mianowniki występujące po lewej stronie otrzymujemy

$$\begin{cases} c = 20 - 20q \\ c = 16 - 8q \\ c = 15 - 5q \end{cases}$$

Odjęcie stronami od pierwszych dwóch równań trzeciego równania daje

$$\begin{cases} 0 = 5 - 15q \\ 0 = 1 - 3q \\ c = 15 - 5q \end{cases}$$

Stąd dostajemy rozwiązanie  $q = 1/3$ ,  $c = 40/3$ .

**Odpowiedź:** Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{3^n}.$$

**805.** Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach rzeczywistych, że szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  oraz  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$  są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4.$$

*Rozwiązanie:*

*Sposób I (dla miłośników bezmyślnych rachunków)*

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu rozważmy szereg geometryczny o pierwszym wyrazie  $c \neq 0$  i ilorazie  $q \neq 0$ , pamiętając, aby  $|q| < 1$ . Wówczas  $a_n = cq^{n-1}$ , a ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} c^2 (q^2)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2} \end{aligned}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \sum_{n=1}^{\infty} c^4 (q^4)^{n-1} = \frac{c^4}{1-q^4},$$



co po uwzględnieniu warunków zadania prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{c}{1-q} = 5 \\ \frac{c^2}{1-q^2} = \frac{c^4}{1-q^4}, \end{cases}$$

co kolejno prowadzi do:

$$\begin{cases} c = 5 - 5q \\ \frac{c^2}{1-q^2} = \frac{c^2 \cdot c^2}{(1-q^2) \cdot (1+q^2)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 5 - 5q \\ 1 = \frac{c^2}{1+q^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 5 - 5q \\ 1 + q^2 = c^2, \end{cases}$$

Pierwsze równanie daje zależność  $c$  od  $q$ . Podstawiając tę zależność do drugiego równania otrzymujemy kolejno:

$$q^2 + 1 = 25q^2 - 50q + 25,$$

$$24q^2 - 50q + 24 = 0,$$

$$12q^2 - 25q + 12 = 0,$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 12 \cdot 12}}{24} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 24^2}}{24} = \frac{25 \pm \sqrt{(25-24) \cdot (25+24)}}{24} = \\ &= \frac{25 \pm \sqrt{49}}{24} = \frac{25 \pm 7}{24}. \end{aligned}$$

Uwzględniając nierówność  $|q| < 1$  odrzucamy rozwiązanie  $q = 32/24 = 4/3 > 1$  i rozpatrujemy  $q = 18/24 = 3/4$ . Ostatecznie

$$q = 3/4, \quad c = 5/4.$$

Otrzymane rozwiązanie prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{5 \cdot 3^{n-1}}{4^n}.$$

**Odpowiedź:** Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^{n-1}}{4^n}.$$

*Sposób II (dla myślących i uważnie czytających założenia)*

Przyjmijmy  $a_n = 1$  dla  $n \leq 5$  oraz  $a_n = 0$  dla  $n \geq 6$ . Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej  $k$  otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k = 5,$$

skąd wynika, że podany szereg spełnia warunki zadania.

**806.** Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 9}.$$

*Rozwiązanie:*

Szukamy takich liczb  $A$  i  $B$ , że

$$\frac{1}{4n^2 - 9} = \frac{1}{(2n-3)(2n+3)} = \frac{A}{2n-3} + \frac{B}{2n+3}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez  $(2n-3)(2n+3)$  otrzymujemy

$$1 = A(2n+3) + B(2n-3). \quad (*)$$

Dla  $n = 3/2$  otrzymujemy  $A = 1/6$ , natomiast przyjęcie  $n = -3/2$  daje  $B = -1/6$ .

*Inny sposób: porównując w równaniu (\*) współczynniki przy  $n$  oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.*

Zatem  $N$ -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{4n^2 - 9} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3} \right) = \\ &= \frac{1}{6} \left( \left( \frac{1}{-1} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{7} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{11} \right) + \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right) + \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{15} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left( \frac{1}{2N-7} - \frac{1}{2N-1} \right) + \left( \frac{1}{2N-5} - \frac{1}{2N+1} \right) + \left( \frac{1}{2N-3} - \frac{1}{2N+3} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{6} \left( \frac{1}{-1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+3} \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+3} \right), \end{aligned}$$

co przy  $N$  dążącym do  $+\infty$  zbiega do  $1/18$ .

**Odpowiedź:** Dany w zadaniu szereg ma sumę równą  $1/18$ .

**807.** Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}.$$

*Rozwiązanie:*

Szukamy takich liczb  $A$  i  $B$ , że

$$\frac{1}{n^2 + 3n} = \frac{1}{n \cdot (n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez  $n \cdot (n+3)$  otrzymujemy

$$1 = A(n+3) + Bn.$$

Dla  $n = 0$  otrzymujemy  $A = 1/3$ , natomiast przyjęcie  $n = -3$  daje  $B = -1/3$ .

Zatem  $N$ -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2 + 3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \left( \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \dots \right. \\
&\dots + \left. \left( \frac{1}{N-3} - \frac{1}{N} \right) + \left( \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N+1} \right) + \left( \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+2} \right) + \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{N+3} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} \right),
\end{aligned}$$

co przy  $N$  dążącym do  $+\infty$  zbiega do  $11/18$ .

**Odpowiedź:** Dany w zadaniu szereg ma sumę równą  $11/18$ .

**808.** Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2}.$$

*Rozwiązanie:*

Szukamy takich liczb  $A$  i  $B$ , że

$$\frac{1}{9n^2 + 3n - 2} = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{A}{3n-1} + \frac{B}{3n+2}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez  $(3n-1)(3n+2)$  otrzymujemy

$$1 = A(3n+2) + B(3n-1).$$

Dla  $n = 1/3$  otrzymujemy  $A = 1/3$ , natomiast przyjęcie  $n = -2/3$  daje  $B = -1/3$ .

Zatem  $N$ -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{9n^2 + 3n - 2} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) + \dots + \left( \frac{1}{3N-7} - \frac{1}{3N-4} \right) + \right. \\
&\left. + \left( \frac{1}{3N-4} - \frac{1}{3N-1} \right) + \left( \frac{1}{3N-1} - \frac{1}{3N+2} \right) \right) = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3N+2} \right),
\end{aligned}$$

co przy  $N$  dążącym do  $+\infty$  zbiega do  $1/6$ .

**Odpowiedź:** Dany w zadaniu szereg ma sumę równą  $1/6$ .

**809.** Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4}.$$

*Rozwiązanie:*

Szukamy takich liczb  $A$  i  $B$ , że

$$\frac{1}{n^2 - 4} = \frac{1}{(n-2)(n+2)} = \frac{A}{n-2} + \frac{B}{n+2}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez  $(n-2)(n+2)$  otrzymujemy

$$1 = A(n+2) + B(n-2).$$

Dla  $n = 2$  otrzymujemy  $A = 1/4$ , natomiast przyjęcie  $n = -2$  daje  $B = -1/4$ .

Zatem  $N$ -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=3}^N \frac{1}{n^2-4} = \frac{1}{4} \sum_{n=3}^N \left( \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left( \frac{1}{N-6} - \frac{1}{N-2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{N-5} - \frac{1}{N-1} \right) + \left( \frac{1}{N-4} - \frac{1}{N} \right) + \left( \frac{1}{N-3} - \frac{1}{N+1} \right) + \left( \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N+2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right), \end{aligned}$$

co przy  $N$  dążącym do  $+\infty$  zbiega do  $25/48$ .

**Odpowiedź:** Dany w zadaniu szereg ma sumę równą  $25/48$ .

**810.** Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+2) \cdot (n+3)}.$$

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy wyrażenie pod znakiem sumy na ułamki proste, czyli szukamy takich liczb  $A$ ,  $B$  i  $C$ , że

$$\frac{1}{n \cdot (n+2) \cdot (n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3}. \quad (1)$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez  $n \cdot (n+2) \cdot (n+3)$  otrzymujemy

$$1 = A \cdot (n+2) \cdot (n+3) + B \cdot n \cdot (n+3) + C \cdot n \cdot (n+2).$$

Dla  $n=0$  otrzymujemy  $A=1/6$ , dla  $n=-2$  dostajemy  $B=-1/2$ , natomiast przyjęcie  $n=-3$  daje  $C=1/3$ . Można też ułożyć układ równań na współczynniki i go rozwiązać.

Zatem  $N$ -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n \cdot (n+2) \cdot (n+3)} = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1/6}{n} - \frac{1/2}{n+2} + \frac{1/3}{n+3} \right) = \\ &= \left( \frac{1/6}{1} - \frac{1/2}{3} + \frac{1/3}{4} \right) + \left( \frac{1/6}{2} - \frac{1/2}{4} + \frac{1/3}{5} \right) + \left( \frac{1/6}{3} - \frac{1/2}{5} + \frac{1/3}{6} \right) + \left( \frac{1/6}{4} - \frac{1/2}{6} + \frac{1/3}{7} \right) + \dots \\ &\quad \dots + \left( \frac{1/6}{N-2} - \frac{1/2}{N} + \frac{1/3}{N+1} \right) + \left( \frac{1/6}{N-1} - \frac{1/2}{N+1} + \frac{1/3}{N+2} \right) + \left( \frac{1/6}{N} - \frac{1/2}{N+2} + \frac{1/3}{N+3} \right) = \\ &= \frac{1/6}{1} + \frac{1/6}{2} - \frac{1/3}{3} - \frac{1/6}{N+1} - \frac{1/6}{N+2} + \frac{1/3}{N+3} = \frac{5}{36} - \frac{1/6}{N+1} - \frac{1/6}{N+2} + \frac{1/3}{N+3}, \end{aligned}$$

co przy  $N$  dążącym do  $+\infty$  zbiega do  $5/36$ .

**Odpowiedź:** Dany w zadaniu szereg ma sumę równą  $5/36$ .

**811.** Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n}.$$

*Rozwiązanie:*

Szukamy takich liczb  $A$  i  $B$ , że

$$\frac{1}{n^2+5n} = \frac{1}{n \cdot (n+5)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+5}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez  $n \cdot (n+5)$  otrzymujemy

$$1 = A(n+5) + Bn.$$

Dla  $n=0$  otrzymujemy  $A=1/5$ , natomiast przyjęcie  $n=-5$  daje  $B=-1/5$ .

Zatem  $N$ -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2+5n} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+5} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left( \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{6} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{10} \right) + \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{11} \right) + \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{12} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left( \frac{1}{N-3} - \frac{1}{N+2} \right) + \left( \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N+3} \right) + \left( \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+4} \right) + \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{N+5} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4} - \frac{1}{N+5} \right), \end{aligned}$$

co przy  $N$  dążącym do  $+\infty$  zbiega do

$$\frac{1}{5} \cdot \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{60+30+20+15+12}{60} = \frac{137}{300}.$$

**Odpowiedź:** Dany w zadaniu szereg ma sumę równą  $137/300$ .

**812.** Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3-4n}.$$

*Rozwiązanie:*

Szukamy takich liczb  $A$ ,  $B$  i  $C$  że

$$\frac{1}{n^3-4n} = \frac{1}{(n-2) \cdot n \cdot (n+2)} = \frac{A}{n-2} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+2}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez  $(n-2) \cdot n \cdot (n+2)$  otrzymujemy

$$1 = A \cdot n \cdot (n+2) + B \cdot (n-2) \cdot (n+2) + C \cdot (n-2) \cdot n.$$

Dla  $n=2$  otrzymujemy  $A=1/8$ , dla  $n=0$  dostajemy  $B=-1/4$ , natomiast przyjęcie  $n=-2$  daje  $C=1/8$ .

Zatem  $N$ -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=3}^N \frac{1}{n^3-4n} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=3}^N \left( \frac{1}{n-2} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+2} \right) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left( \left( \frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{6} + \frac{1}{8} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left( \frac{1}{N-6} - \frac{2}{N-4} + \frac{1}{N-2} \right) + \left( \frac{1}{N-5} - \frac{2}{N-3} + \frac{1}{N-1} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{N-4} - \frac{2}{N-2} + \frac{1}{N} \right) + \left( \frac{1}{N-3} - \frac{2}{N-1} + \frac{1}{N+1} \right) + \left( \frac{1}{N-2} - \frac{2}{N} + \frac{1}{N+2} \right) = \\
& = \frac{1}{8} \cdot \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right),
\end{aligned}$$

co przy  $N$  dążącym do  $+\infty$  zbiega do

$$\frac{1}{8} \cdot \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{12+6-4-3}{12} = \frac{11}{96}.$$

**Odpowiedź:** Dany w zadaniu szereg ma sumę równą  $11/96$ .

*Uwaga:* Nieco prostsze rachunkowo rozwiązanie może być oparte na tożsamości

$$\frac{1}{(n-2) \cdot n \cdot (n+2)} = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{(n-2) \cdot n} - \frac{1}{n \cdot (n+2)} \right),$$

pod warunkiem, że na nią jakoś wpadniemy.

**813.** Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+4)}.$$

*Rozwiązanie:*

Rozłóżmy na ułamki proste wyraz ogólny szeregu:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+4)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+4}, \\
1 &= A \cdot (n+1) \cdot (n+4) + B \cdot n \cdot (n+4) + C \cdot n \cdot (n+1), \\
\text{dla } n=0: \quad &1 = 4A, \quad A = 1/4, \\
\text{dla } n=-1: \quad &1 = -3B, \quad B = -1/3, \\
\text{dla } n=-4: \quad &1 = 12C, \quad C = 1/12.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+4)} = \frac{1/4}{n} - \frac{1/3}{n+1} + \frac{1/12}{n+4}.$$

W konsekwencji sumy częściowe danego szeregu wyrażają się wzorem

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+4)} = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1/4}{n} - \frac{1/3}{n+1} + \frac{1/12}{n+4} \right) = \\
& = \left( \frac{1/4}{1} - \frac{1/3}{2} + \frac{1/12}{5} \right) + \left( \frac{1/4}{2} - \frac{1/3}{3} + \frac{1/12}{6} \right) + \left( \frac{1/4}{3} - \frac{1/3}{4} + \frac{1/12}{7} \right) + \\
& \quad + \left( \frac{1/4}{4} - \frac{1/3}{5} + \frac{1/12}{8} \right) + \dots + \left( \frac{1/4}{N-3} - \frac{1/3}{N-2} + \frac{1/12}{N+1} \right) + \\
& + \left( \frac{1/4}{N-2} - \frac{1/3}{N-1} + \frac{1/12}{N+2} \right) + \left( \frac{1/4}{N-1} - \frac{1/3}{N} + \frac{1/12}{N+3} \right) + \left( \frac{1/4}{N} - \frac{1/3}{N+1} + \frac{1/12}{N+4} \right) = \\
& = \frac{1/4}{1} - \frac{1/12}{2} - \frac{1/12}{3} - \frac{1/12}{4} - \frac{1/4}{N+1} + \frac{1/12}{N+2} + \frac{1/12}{N+3} + \frac{1/12}{N+4} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{23}{144} - \frac{1/4}{N+1} + \frac{1/12}{N+2} + \frac{1/12}{N+3} + \frac{1/12}{N+4} \rightarrow \frac{23}{144}$$

przy  $N \rightarrow \infty$ .

*Odpowiedź:* Suma danego szeregu jest równa  $23/144$ .

Niech

$$a_n = \frac{120}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wiadomo, że wówczas szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, a jego suma jest równa 30.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

$$814. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = 40$$

$$815. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = 20$$

$$816. \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) = 600$$

$$817. \sum_{n=1}^{\infty} (a_2 \cdot a_n) = 150$$

$$818. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = 400$$

$$819. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = 425$$

$$820. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+3}^2) = 429$$

$$821. \sum_{n=2}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = 31$$

$$822. \sum_{n=3}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = 3$$

$$823. \sum_{n=4}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = 1$$

Niech

$$a_n = \frac{60}{n(n+1)} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wiadomo, że wówczas szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, a jego suma jest równa 60.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

$$824. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = 90$$

$$825. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = 30$$

$$826. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) = 1800$$

$$827. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_2 \cdot a_n) = 600$$

$$828. \quad \sum_{n=3}^{\infty} a_n = 20$$

$$829. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^3 - a_{n+1}^3) = 27000$$

$$830. \quad \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - a_{n+1}) \cdot (a_n + a_{n+1})) = 900$$

$$831. \quad \sum_{n=3}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = 31$$

$$832. \quad \sum_{n=4}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = 7$$

$$833. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{a_n^2 + 1600} - \sqrt{a_{n+1}^2 + 1600} \right) = 10$$



W każdym z poniższych 5 zadań podaj w postaci uproszczonej sumę szeregu.

$$834. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{n} - {}^{n+1}\sqrt{n+1} \right) = \mathbf{0}$$

$$835. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{n} - {}^{n+2}\sqrt{n+2} \right) = \sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1}$$

$$836. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{n} - {}^{n+3}\sqrt{n+3} \right) = \sqrt{\mathbf{2}} + \sqrt[3]{\mathbf{3}} - \mathbf{2}$$

$$837. \sum_{n=2}^{\infty} \left( \sqrt[n]{n} - {}^{n+1}\sqrt{n+1} \right) = \sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1}$$

$$838. \sum_{n=2}^{\infty} \left( \sqrt[n]{n} - {}^{n+2}\sqrt{n+2} \right) = \sqrt{\mathbf{2}} + \sqrt[3]{\mathbf{3}} - \mathbf{2}$$

Niech  $a_n = \frac{120}{n(n+2)}$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Wiadomo, że wówczas szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, a jego suma jest równa 90.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

$$839. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \mathbf{140}$$

$$840. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \mathbf{40}$$

$$841. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \mathbf{1600}$$

$$842. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = \mathbf{1825}$$

$$843. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+3}^2) = \mathbf{1889}$$

$$844. \sum_{n=4}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \mathbf{31}$$

$$845. \sum_{n=6}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = 4\sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1}$$

$$846. \sum_{n=10}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \mathbf{1}$$

$$847. \sum_{n=10}^{\infty} (3^{a_n} - 3^{a_{n+1}}) = \mathbf{2}$$

$$848. \sum_{n=10}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}) = \mathbf{3}$$