

Funkcje.

Rozpocniemy od opisania definicji, własności i podstawowych twierdzeń związanych z funkcjami.

Umawiamy się, że rozważamy funkcje jednej zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych, a dziedziną funkcji może być dowolny¹ podzbiór zbioru liczb rzeczywistych.

Najpierw wyjaśnijmy sobie, co to właściwie jest funkcja. Wprawdzie na co dzień nie będziemy się odwoływać do formalnej definicji funkcji, jednak przynajmniej raz wypadałoby sprecyzować jakież to obiekt matematyczny jest formalnie uważany² za funkcję.

Otóż funkcją³ będziemy nazywać każdy podzbiór f iloczynu kartezjańskiego⁴ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ spełniający warunek

$$\forall_{x,y_1,y_2 \in \mathbb{R}} \left((x,y_1), (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2 \right).$$

Innymi słowy, w różnych parach uporządkowanych należących do f pierwsze elementy tych par są różne. Graficzne przedstawienie funkcji na płaszczyźnie z wprowadzonym układem współrzędnych poprzez zaznaczenie punktów zbioru f jest niczym innym niż narysowaniem wykresu funkcji f .

Dziedziną funkcji f jest zbiór pierwszych elementów wszystkich par należących do f , a więc możemy zapisać:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists_{y \in \mathbb{R}} (x,y) \in f \right\}.$$

Jeżeli $x \in D_f$, to istnieje dokładnie jedno takie $y \in \mathbb{R}$, że $(x,y) \in f$. Wówczas piszemy $f(x) = y$ i liczbę y nazywamy wartością funkcji f w punkcie x .

Zapamiętaj: Napis $f(x)$ oznacza wartość funkcji f w punkcie x , czyli **liczbę rzeczywistą**. Natomiast f oznacza **funkcję**. Staraj się więc unikać sformułowań w stylu "funkcja $f(x)$ ".

Czasami korci, aby użyć sformułowania "funkcja x^2 ". Jeśli takiego sformułowania użyjemy, to raczej nie będzie ono prowadziło do nieporozumień⁵. Jednak lepiej jest powiedzieć "funkcja określona wzorem x^2 ". Natomiast wtedy, gdy funkcja ma swoją nazwę, używajmy tej właśnie nazwy bez przylepiania do niej argumentu. Mówmy więc "funkcja sinus", a nie "funkcja sinus x ".

Funkcję f określoną wzorem $f(x) = x^2$ możemy formalnie zapisać jako⁶

$$f = \left(x^2 : x \in \mathbb{R} \right) = \left(x^2 \right)_{x \in \mathbb{R}}.$$

Formalnie funkcja ta jest zbiorem

$$f = \left\{ \left(x, x^2 \right) : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

¹Wprawdzie dopuszczenie dowolnego zbioru jako dziedziny może być czasami kłopotliwe, ale ewentualne zastosowanie ograniczeń co do postaci dziedziny także prowadzi do kłopotów, tylko innego rodzaju.

²Bardziej skrupulatne używanie takiej definicji funkcji jest domeną teorii mnogości.

³Opis ten jest ograniczony do funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych.

⁴Czyli zbioru wszystkich par uporządkowanych liczb rzeczywistych.

⁵Podobnie jak nie ma obawy o nieporozumienie, gdy użyjemy słów *poszłem* czy *szejszet*. To jednak nie jest wystarczającym powodem, aby takich właśnie form używać.

⁶Zwróć uwagę na nawiasy okrągłe. Podobnie wyglądający napis $\{x^2 : x \in \mathbb{R}\}$ oznacza zbiór wartości opisywanej funkcji, czyli w tym wypadku przedział $[0, \infty)$.

Podstawowe własności funkcji.

Funkcja f jest **rosnąca**⁷ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x_1, x_2 \in D_f} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \right).$$

Funkcja f jest **niemalejąca**⁸ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x_1, x_2 \in D_f} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \right).$$

Funkcja f jest **malejąca**⁹ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x_1, x_2 \in D_f} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \right).$$

Funkcja f jest **nierosnąca**¹⁰ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x_1, x_2 \in D_f} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \right).$$

Funkcja f jest **monotoniczna**¹¹ wtedy i tylko wtedy, gdy jest niemalejąca lub nierosnąca.

Funkcja f jest **ściśle monotoniczna** wtedy i tylko wtedy, gdy jest rosnąca lub malejąca.

Funkcja f jest **różnowartościowa** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x_1, x_2 \in D_f} \left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \right).$$

Funkcja f jest **na** to nic nie znaczy¹².

Funkcja f przekształca D_f **na** zbiór $Y \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left(\forall_{x \in D_f} f(x) \in Y \right) \wedge \left(\forall_{y \in Y} \exists_{x \in D_f} f(x) = y \right).$$

Funkcja f jest **parzysta** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in D_f} \left(-x \in D_f \wedge f(-x) = f(x) \right).$$

Funkcja f jest **nieparzysta** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in D_f} \left(-x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x) \right).$$

Funkcja f jest **okresowa** o okresie $T > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in D_f} \left(x - T, x + T \in D_f \wedge f(x + T) = f(x) \right).$$

⁷Inaczej: ściśle rosnąca. Takiej formy użyjemy dla podkreślenia, że chodzi nam o ostrą nierówność w następniku implikacji.

⁸Inaczej: słabo rosnąca.

⁹Inaczej: ściśle malejąca. Takiej formy użyjemy dla podkreślenia, że chodzi nam o ostrą nierówność w następniku implikacji.

¹⁰Inaczej: słabo malejąca.

¹¹Inaczej: słabo monotoniczna.

¹²Czy funkcja sinus jest "na"? Zależy na jaki zbiór. Na przedział $[-1, 1]$ – TAK. Na $\mathbb{R}$ – NIE.

Operacje na funkcjach.

Suma funkcji f i g to funkcja $f + g$ określona wzorem

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

o dziedzinie

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g .$$

Różnica funkcji f i g to funkcja $f - g$ określona wzorem

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

o dziedzinie

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g .$$

Iloczyn funkcji f i g to funkcja $f \cdot g$ (lub fg) określona wzorem

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

o dziedzinie

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g .$$

Iloraz funkcji f i g to funkcja f/g określona wzorem

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

o dziedzinie

$$D_{f/g} = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\} .$$

Złożenie¹³ **funkcji** f i g to funkcja $f \circ g$ określona wzorem

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

o dziedzinie

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} .$$

Funkcja odwrotna do funkcji **różnowartościowej** f to funkcja¹⁴

$$f^{-1} = \{(f(x), x) : x \in D_f\} .$$

Innymi słowy jest to taka funkcja f^{-1} o dziedzinie

$$D_{f^{-1}} = \{f(x) : x \in D_f\} ,$$

że dla każdego $x \in D_f$ zachodzi równość

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

lub równoważnie: dla każdego $y \in D_{f^{-1}}$ zachodzi równość

$$f(f^{-1}(y)) = y .$$

¹³Inaczej: superpozycja.

¹⁴Pamiętaj, że

$$f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\} .$$

Przykłady funkcji.

Funkcją wielomianową jest każda funkcja f określona wzorem postaci¹⁵

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

gdzie liczby rzeczywiste $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ są nazywane współczynnikami wielomianu. Dziedziną funkcji wielomianowej jest $\mathbb{R}$.

Funkcja wymierna to iloraz dwóch funkcji wielomianowych¹⁶. Dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem miejsc zerowych mianownika.

Funkcje potęgowe to funkcje określone wzorem x^a . Dziedzina zależy od liczby $a \neq 0$:

- $\mathbb{R}$, gdy a jest dodatnią liczbą wymierną o nieparzystym mianowniku¹⁷.
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, gdy a jest ujemną liczbą wymierną o nieparzystym mianowniku.
- $[0, \infty)$, gdy a jest dodatnią liczbą wymierną o parzystym mianowniku lub dodatnią liczbą niewymierną.
- $(0, \infty)$, gdy a jest ujemną liczbą wymierną o parzystym mianowniku lub ujemną liczbą niewymierną.

Funkcja wykładnicza to funkcja f określona wzorem

$$f(x) = a^x,$$

gdzie $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Dziedziną funkcji wykładniczej jest $\mathbb{R}$.

Funkcja logarytmiczna to funkcja odwrotna do odpowiedniej funkcji wykładniczej:

$$f(x) = \log_a x,$$

gdzie $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Dziedziną funkcji logarytmicznej jest $(0, \infty)$.

Funkcje trygonometryczne:

- **sinus**: o dziedzinie $\mathbb{R}$, okresowa o okresie 2π .
- **cosinus**: o dziedzinie $\mathbb{R}$, okresowa o okresie 2π .
- **tangens**: o dziedzinie $\mathbb{R} \setminus \left\{n\pi + \frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$, okresowa o okresie π .

Funkcje odwrotne do trygonometrycznych:

- **arcsin**: o dziedzinie $[-1, 1]$, odwrotna do sinusa ograniczonego do przedziału $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- **arccos**: o dziedzinie $[-1, 1]$, odwrotna do cosinusa ograniczonego do przedziału $[0, \pi]$.
- **arctg**: o dziedzinie $\mathbb{R}$, odwrotna do tangensa ograniczonego do przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

¹⁵Umawiamy się, że $x^0 = 1$ i nie czepiamy się tego, że dla $x = 0$ dostalibyśmy wyrażenie 0^0 .

¹⁶Zakładamy, że mianownik nie jest funkcją stałą równą 0.

¹⁷Po zapisaniu liczby w postaci ułamka nieskracalnego.