

Egzamin, **17.06.2026**, godz. 9:00–11:00Zadanie **1** (10 punktów)

Wyznacz zbiór wszystkich wartości rzeczywistych  **dodatnich**  parametru  $p$ , dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{4p} + x^{3p}}{\sqrt{x^8 + x^6}} dx$$

jest zbieżna.

*Rozwiązanie:*

Dzieliąc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{4p} + x^{3p}}{\sqrt{x^8 + x^6}} dx = \int_0^1 \frac{x^{4p} + x^{3p}}{\sqrt{x^8 + x^6}} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^{4p} + x^{3p}}{\sqrt{x^8 + x^6}} dx.$$

Zbadamy, dla których wartości parametru  $p$  całki występujące w powyższej sumie są zbieżne. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Po uwzględnieniu nierówności  $4p > 3p$  otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^{4p} + x^{3p}}{\sqrt{x^8 + x^6}} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{3p} + x^{3p}}{\sqrt{0 + x^6}} dx = 2 \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^{3-3p}} < +\infty,$$

o ile  $3 - 3p < 1$ , czyli  $p > 2/3$ .

Ponadto

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{4p} + x^{3p}}{\sqrt{x^8 + x^6}} dx \geq \int_1^{\infty} \frac{0 + x^{3p}}{\sqrt{x^6 + x^6}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3-3p}} = +\infty,$$

o ile  $3 - 3p \geq 1$ , czyli  $p \leq 2/3$ .

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{4p} + x^{3p}}{\sqrt{x^8 + x^6}} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{x^{4p} + x^{4p}}{\sqrt{x^8}} dx = 2 \cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{4-4p}} < +\infty,$$

o ile  $4 - 4p > 1$ , czyli  $p < 3/4$ .

Ponadto

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{4p} + x^{3p}}{\sqrt{x^8 + x^6}} dx \geq \int_1^{\infty} \frac{x^{4p} + 0}{\sqrt{x^8 + x^8}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{4-4p}} = +\infty,$$

o ile  $4 - 4p \leq 1$ , czyli  $p \geq 3/4$ .

Wniosek: Jeżeli  $2/3 < p < 3/4$ , to obydwie całki powstałe z podziału przedziału całkowania są zbieżne, a więc i wyjściowa całka jest zbieżna. W przeciwnym razie jedna z tych całek jest rozbieżna, a zatem wyjściowa całka jest rozbieżna.

**Odpowiedź:** Podana całka jest zbieżna dla  $p \in (2/3, 3/4)$ .

**Uwaga 1:** Świadomość konieczności wykonania wszystkich czterech oszacowań jest kluczowym elementem rozwiązania. Bez tego elementu zadanie nie może być uznanane za rozwiązane nawet przy poprawnej odpowiedzi i dwóch oszacowaniach, a rozwiązanie nie może być ocenione na więcej niż **4 punkty**.

**Uwaga 2:** Zadanie polega na udowodnieniu poprawności podanej odpowiedzi. Poprawną odpowiedź można odgadnąć stosując intuicyjne przymiarki w stylu: ten składnik jest dominujący, a pozostałe możemy zaniedbać. Takie postępowanie sprawdza się w zadaniu testowym, gdzie trzeba małym nakładem pracy odgadnąć poprawną odpowiedź bez podawania uzasadnienia. Jednak w przypadku zadania otwartego podanie samej tylko poprawnej odpowiedzi bez śladu oszacowań dowodzących jej poprawności nie stanowi rozwiązania zadania i w związku z tym nie może być ocenione na więcej niż **2 punkty**.

**Zadanie 2 (10 punktów)**

Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+8)}.$$

*Rozwiązanie:*Szukamy takich liczb  $A$  i  $B$ , że

$$\frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+8)} = \frac{A}{3n-1} + \frac{B}{3n+8}.$$

Po wymnożeniu powyższej równości stronami przez  $(3n-1) \cdot (3n+8)$  otrzymujemy

$$1 = A(3n+8) + B(3n-1). \quad (*)$$

Dla  $n = 1/3$  otrzymujemy  $A = 1/9$ , natomiast przyjęcie  $n = -8/3$  daje  $B = -1/9$ .*Inny sposób: porównując w równaniu (\*) współczynniki przy  $n$  oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.*Zatem  $N$ -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+8)} = \frac{1}{9} \cdot \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+8} \right) = \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{14} \right) + \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{17} \right) + \left( \frac{1}{11} - \frac{1}{20} \right) + \left( \frac{1}{14} - \frac{1}{23} \right) + \dots \right. \\ &\dots + \left. \left( \frac{1}{3N-10} - \frac{1}{3N-1} \right) + \left( \frac{1}{3N-7} - \frac{1}{3N+2} \right) + \left( \frac{1}{3N-4} - \frac{1}{3N+5} \right) + \left( \frac{1}{3N-1} - \frac{1}{3N+8} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3N+2} - \frac{1}{3N+5} - \frac{1}{3N+8} \right), \end{aligned}$$

co przy  $N$  dążącym do  $+\infty$  zbiega do

$$\frac{1}{9} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{20+8+5}{40} = \frac{1}{9} \cdot \frac{33}{40} = \frac{11}{120}.$$

**Odpowiedź:** Dany w zadaniu szereg ma sumę równą  $11/120$ .**Uwaga:** Kluczowym elementem rozwiązania jest poprawne wykonanie przejścia granicznego, co można uzyskać tylko przez rozważanie sum częściowych. Bez tego elementu zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet przy poprawnej odpowiedzi, a rozwiązanie nie może być ocenione na więcej niż **4 punkty**.

Zadanie **3** (10 punktów)

Wyznacz zbiór wszystkich wartości rzeczywistych  **dodatnich**  parametru  $p$ , dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[8]{n^8 + n^p} - n)$$

jest zbieżny.

*Rozwiązanie:*

W przypadku  $p \geq 8$  mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[8]{n^8 + n^p} - n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[8]{n^8 + n^8} - n) = (\sqrt[8]{2} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n = \infty,$$

szereg jest więc rozbieżny.

W dalszej części rozwiązania założymy, że  $p < 8$ , a więc w konsekwencji  $n^p \leq n^8$ .

Przepisujemy wyrazy danego szeregu korzystając ze wzoru na różnicę ósmych potęg (trzykrotne zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[8]{n^8 + n^p} - n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(\sqrt{n^8 + n^p} + n^4) \cdot (\sqrt[4]{n^8 + n^p} + n^2) \cdot (\sqrt[8]{n^8 + n^p} + n)}.$$

Szacujemy szereg od góry:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(\sqrt{n^8 + n^p} + n^4) \cdot (\sqrt[4]{n^8 + n^p} + n^2) \cdot (\sqrt[8]{n^8 + n^p} + n)} &\leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(\sqrt{n^8 + 0} + n^4) \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 0} + n^2) \cdot (\sqrt[8]{n^8 + 0} + n)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{8n^7} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7-p}} < \infty, \end{aligned}$$

o ile  $7 - p > 1$ , czyli  $p < 6$ .

Stąd wnioskujemy, że dla  $p < 6$  dany szereg jest zbieżny, natomiast powyższe szacowanie nic nie mówi o zbieżności szeregu dla  $p \geq 6$ .

Szacując szereg od dołu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(\sqrt{n^8 + n^p} + n^4) \cdot (\sqrt[4]{n^8 + n^p} + n^2) \cdot (\sqrt[8]{n^8 + n^p} + n)} &\geq \\ \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(\sqrt{n^8 + 3n^8} + n^4) \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 15n^8} + n^2) \cdot (\sqrt[8]{n^8 + 255n^8} + n)} &= \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{27n^7} = \frac{1}{27} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7-p}} = \infty, \end{aligned}$$

o ile  $7 - p \leq 1$ , czyli  $p \geq 6$ .

Stąd wnioskujemy, że dla  $p \geq 6$  dany szereg jest rozbieżny, natomiast szacowanie od dołu nic nie mówi o zbieżności szeregu dla  $p < 6$ .

Po uwzględnieniu założenia o dodatniości  $p$  otrzymujemy:

**Odpowiedź:** Podany szereg jest zbieżny dla  $p \in (0, 6)$ .

**Zadanie 4 (10 punktów)**

Oblicz wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \sin 2x \cdot \cos 3x \cdot \sin 5x \, dx .$$

Doprowadź wynik do postaci  $w \cdot \pi$ , gdzie  $w$  liczbą wymierną.*Rozwiązanie:*

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy  $z = \cos x + i \sin x$ , co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \quad \sin nx = \frac{z^n - z^{-n}}{2i} .$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sin 2x \cdot \cos 3x \cdot \sin 5x &= \frac{z^2 - z^{-2}}{2i} \cdot \frac{z^3 + z^{-3}}{2} \cdot \frac{z^5 - z^{-5}}{2i} = \frac{(z^2 - z^{-2}) \cdot (z^3 + z^{-3}) \cdot (z^5 - z^{-5})}{-8} = \\ &= \frac{(z^5 - z + z^{-1} - z^{-5}) \cdot (z^5 - z^{-5})}{-8} = \frac{z^{10} - z^6 + z^4 - 2 + z^{-4} - z^{-6} + z^{-10}}{-8} = \\ &= -\frac{\cos 10x}{4} + \frac{\cos 6x}{4} - \frac{\cos 4x}{4} + \frac{1}{4} . \end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^{2\pi} \sin 2x \cdot \cos 3x \cdot \sin 5x \, dx = \int_0^{2\pi} -\frac{\cos 10x}{4} + \frac{\cos 6x}{4} - \frac{\cos 4x}{4} + \frac{1}{4} \, dx = \frac{\pi}{2} .$$

**Odpowiedź:** Podana całka oznaczona ma wartość  $\pi/2$ .

**Zadanie 5 (10 punktów)**

Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int x \cdot (x + \pi)^\pi dx.$$

*Rozwiązanie:**Sposób I*

Wykonamy całkowanie przez części różniczkując pierwszy czynnik i całkując drugi. Otrzymujemy

$$\int x \cdot (x + \pi)^\pi dx = x \cdot \frac{(x + \pi)^{\pi+1}}{\pi + 1} - \int 1 \cdot \frac{(x + \pi)^{\pi+1}}{\pi + 1} dx = x \cdot \frac{(x + \pi)^{\pi+1}}{\pi + 1} - \frac{(x + \pi)^{\pi+2}}{(\pi + 1) \cdot (\pi + 2)} + C.$$

*Sposób II*

Wykonamy podstawienie  $t = x + \pi$  i formalnie  $dx = dt$ . Otrzymujemy

$$\int x \cdot (x + \pi)^\pi dx = \int (t - \pi) \cdot t^\pi dt = \int t^{\pi+1} - \pi \cdot t^\pi dt = \frac{t^{\pi+2}}{\pi + 2} - \frac{\pi \cdot t^{\pi+1}}{\pi + 1} + C = \frac{(x + \pi)^{\pi+2}}{\pi + 2} - \frac{\pi \cdot (x + \pi)^{\pi+1}}{\pi + 1} + C.$$

**Uwaga:** Pozornie oba sposoby prowadzą do różnych odpowiedzi. Jednak w rzeczywistości jest to ta sama funkcja, tylko zapisana w innej postaci.

**Zadanie 6 (10 punktów)**

Wyznacz obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot z^{8n}}{n^2 + 88}.$$

*Rozwiązanie:*

Dla  $z = 0$  szereg jest oczywiście zbieżny, zatem w dalszej części rozwiązania założymy, że  $z \neq 0$ .

Stosując kryterium d'Alemberta do danego szeregu otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot z^{8n+8} \cdot (n^2 + 88)}{((n+1)^2 + 88) \cdot n \cdot z^{8n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^8 \cdot \frac{n^2 + 88}{(n+1)^2 + 88} \cdot \frac{n+1}{n} = |z|^8.$$

Stąd wynika, że przy  $|z|^8 < 1$ , czyli  $|z| < 1$  szereg jest zbieżny, natomiast przy  $|z|^8 > 1$ , czyli  $|z| > 1$  szereg jest rozbieżny.

Pozostaje rozstrzygnąć zbieżność szeregu w przypadku  $|z| = 1$ .

Jeżeli  $z^8 = 1$ , to dany szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 88} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 88n^2} = \frac{1}{89} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

jest więc rozbieżny na mocy kryterium porównawczego oraz rozbieżności szeregu harmonicznego.

W przypadku, gdy  $|z| = 1$ , ale  $z^8 \neq 1$ , dany szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} w^n \cdot \frac{n}{n^2 + 88},$$

gdzie  $w = z^8$  jest liczbą zespoloną o module 1 różną od 1.

Udowodnimy zbieżność tego szeregu korzystając z uogólnienia kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych. Jedyńm kłopotliwym założeniem tego kryterium jest monotoniczność ciągu modułów wyrazów, czyli nierówność

$$\frac{n}{n^2 + 88} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2 + 88}, \quad (*)$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$n \cdot (n^2 + 2n + 89) \geq (n+1) \cdot (n^2 + 88),$$

$$n^3 + 2n^2 + 241n \geq n^3 + n^2 + 88n + 88,$$

$$n^2 + n \geq 88,$$

$$n \cdot (n+1) \geq 9 \cdot 10 - 2,$$

skąd wynika, że nierówność (\*) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 9$ .

Zatem szereg  $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{w^n \cdot n}{n^2 + 88}$  spełnia warunki uogólnienia kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, wobec czego jest zbieżny.

Ponieważ zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu wyrazów, także szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n \cdot n}{n^2 + 88}$  jest zbieżny.

**Odpowiedź:** Szereg jest zbieżny w kole o środku w zerze i promieniu 1 wraz z brzegiem, ale bez 8 punktów na brzegu. Tymi punktami są pierwiastki 8-go stopnia z 1:  $\pm 1, \pm i, \frac{\pm\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i}{2}$ .

**Zadanie 7 (ZADANIE DODATKOWE)**

Oblicz wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 \sqrt{x^4+4} + \sqrt[4]{125x^2-100} dx.$$

*Rozwiązanie:*Wyciągając przed całkę czynnik  $\sqrt{5}$  otrzymujemy

$$\int_1^2 \sqrt{x^4+4} + \sqrt[4]{125x^2-100} dx = \sqrt{5} \cdot \int_1^2 \sqrt{\frac{x^4+4}{5}} + \sqrt[4]{5x^2-4} dx.$$

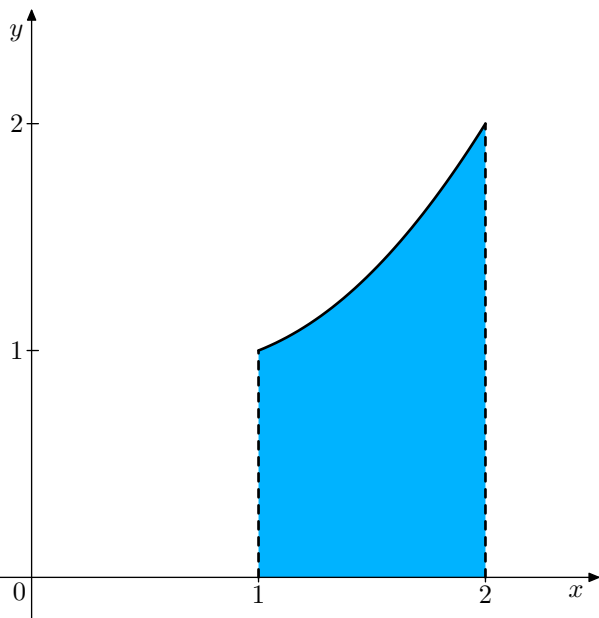
Niech  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją określoną wzorem<sup>1</sup>

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4+4}{5}}.$$

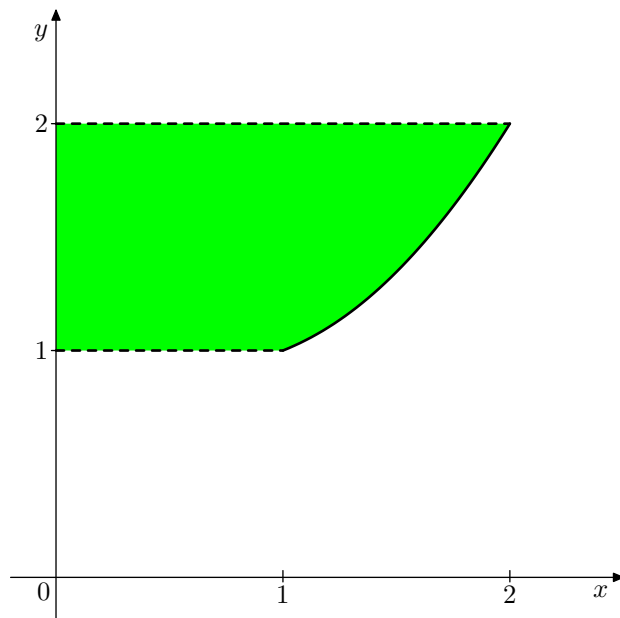
Zauważmy, że  $f(1) = 1$  oraz  $f(2) = 2$ , a ponadto przekształcanie równania  $y = f(x)$  prowadzi kolejno do

$$y = \sqrt{\frac{x^4+4}{5}}, \quad y^2 = \frac{x^4+4}{5}, \quad 5y^2 = x^4+4,$$

$$5y^2 - 4 = x^4, \quad \sqrt[4]{5y^2-4} = x.$$



rys. 1



rys. 2

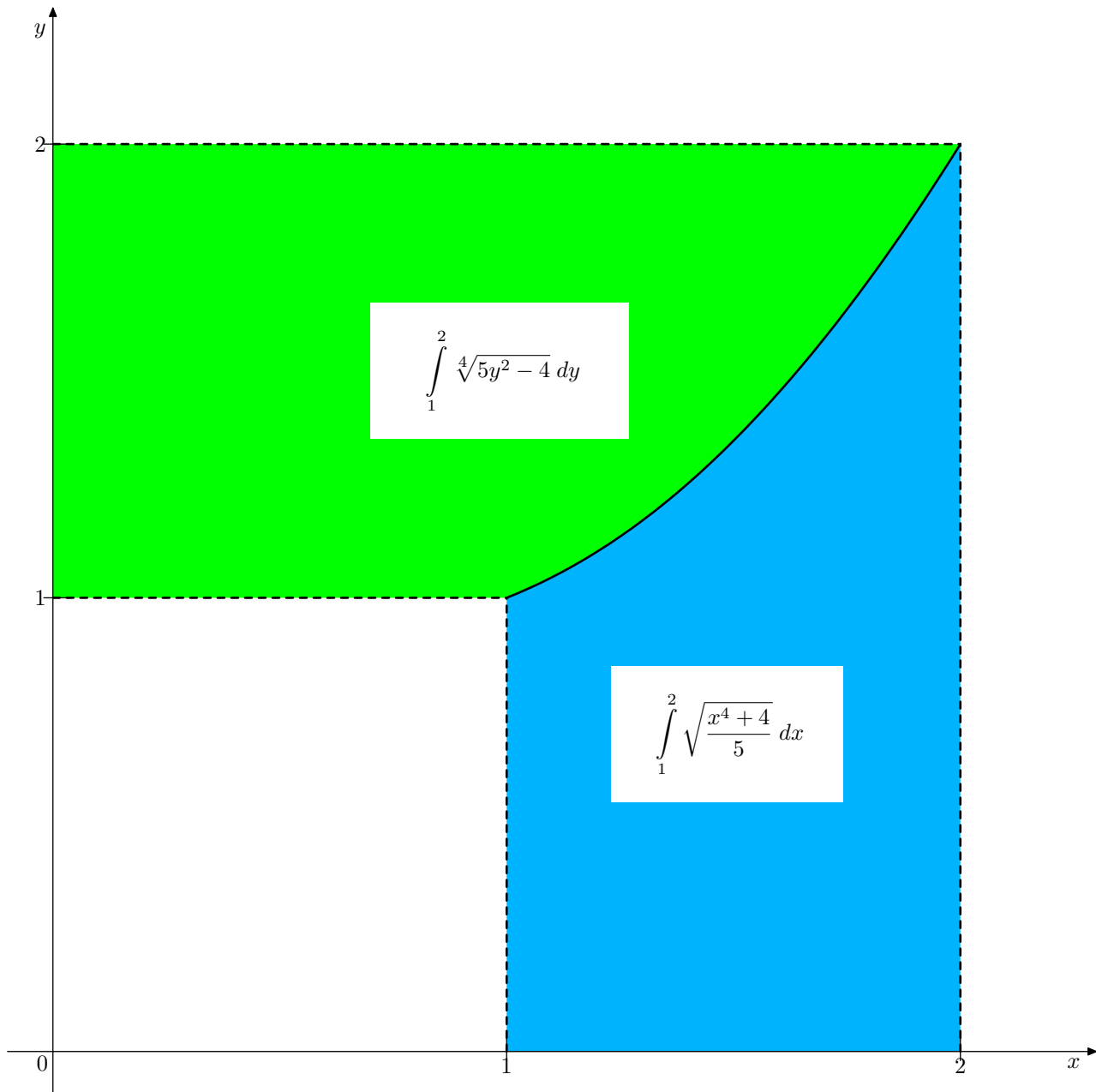
Oznacza to, że dana w zadaniu całka ma postać

$$\sqrt{5} \cdot \int_1^2 f(x) + f^{-1}(x) dx,$$

<sup>1</sup>Zauważmy, że jest to funkcja rosnąca.

gdzie  $f^{-1}: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją odwrotną do  $f$  określoną wzorem

$$f^{-1}(x) = \sqrt[4]{5x^2 - 4}.$$



rys. 3

Całka

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{x^4 + 4}{5}} dx$$

jest polem figury

$$\{(x, y) : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq f(x)\} = \left\{ (x, y) : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{x^4 + 4}{5}} \right\}$$

zamalowanej na rysunkach 1 i 3 kolorem niebieskim.

Z kolei na rysunkach 2 i 3 kolorem zielonym zamalowana jest figura

$$\{(x, y) : 1 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq x \leq f^{-1}(y)\} = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq x \leq \sqrt[4]{5y^2 - 4}\},$$

której pole jest równe

$$\int_1^2 f^{-1}(y) dy = \int_1^2 \sqrt[4]{5y^2 - 4} dy = \int_1^2 \sqrt[4]{5x^2 - 4} dx.$$

Dana w treści zadania całka podzielona przez  $\sqrt{5}$ , czyli

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x^4 + 4}{5}} + \sqrt[4]{5x^2 - 4} dx$$

ma więc wartość równą polu figury zamalowanej na rysunku 3. Ponieważ zamalowana figura jest różnicą kwadratów o bokach 2 i 1, jej pole jest równe 3.

**Odpowiedź:**

$$\int_1^2 \sqrt{x^4 + 4} + \sqrt[4]{125x^2 - 100} dx = 3 \cdot \sqrt{5}.$$

Zadanie **8** (ZADANIE DODATKOWE)

Oblicz sumę szeregu o wyrazach zespolonych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{n \cdot 3^n}.$$

Przydatne wzorki:

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad |z| \leq 1, z \neq 1$$

$$\ln z = \ln |z| + i \cdot \arg z \quad \arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

*Rozwiązanie:*

Korzystając ze wzoru

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad |z| \leq 1, z \neq 1$$

dla  $z = \frac{2+i}{3}$  otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{n \cdot 3^n} = -\ln\left(1 - \frac{2+i}{3}\right) = -\ln\left(\frac{1-i}{3}\right).$$

Zastosowanie wzoru

$$\ln z = \ln |z| + i \cdot \arg z \quad \arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

pozwala na dalsze przekształcenia:

$$-\ln\left(\frac{1-i}{3}\right) = -\left(\ln\left|\frac{1-i}{3}\right| + i \cdot \arg\left(\frac{1-i}{3}\right)\right) = -\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) + i \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \ln 3 - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi \cdot i}{4}.$$

**Odpowiedź:** Dany w zadaniu szereg ma sumę  $\ln 3 - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi \cdot i}{4}$ .