Egzamin (część II) Wersja testu **A** 17 czerwca 2026 r.

ANALIZA 2 17 czerwca 2026 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **13 i 14** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.
Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery, cyfry i NAWIASY NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Przydatne wzorki:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$g(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$$

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi}f(x)\cdot g(x)\,dx=2\pi\cdot a_0\cdot c_0+\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot c_n+b_n\cdot d_n)$$

Egzamin (część II) Wersja testu **A** 17 czerwca 2026 r.

1. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k^3}{n^5}}=\mathbf{\frac{2}{5}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[4]{\frac{k^3}{n^7}}=\mathbf{\frac{4}{7}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k^5}{n^7}}=\mathbf{\frac{2}{7}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[4]{\frac{k^5}{n^9}}=\mathbf{\frac{4}{9}}$

2. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{n^5}{k^9}}=\mathbf{\frac{31}{40}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{4n}\sqrt{\frac{n^5}{k^7}}=\mathbf{\frac{31}{80}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{n^3}{k^7}}=\mathbf{\frac{7}{6}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{4n}\sqrt{\frac{n^3}{k^5}}=\mathbf{\frac{7}{12}}$

3. Podaj wartość granicy. Wskazówka rachunkowa: $512=2^9$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{128n}\sqrt[7]{\frac{1}{k^2n^5}}=\mathbf{\frac{217}{5}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{32n}\sqrt[5]{\frac{1}{k^2n^3}}=\mathbf{\frac{35}{3}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{512n}\sqrt[9]{\frac{1}{k^4n^5}}=\mathbf{\frac{279}{5}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{128n}\sqrt[7]{\frac{1}{k^4n^3}}=\mathbf{\frac{49}{3}}$

4. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{11}+x^7}}\,dx$, $(\mathbf{5/4,\ 3/2})$ b) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{8}+x^4}}\,dx$, $(\mathbf{1/2,\ 1})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{9}+x^5}}\,dx$, $(\mathbf{3/4,\ 7/6})$ d) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{10}+x^6}}\,dx$, $(\mathbf{1,\ 4/3})$

5. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=\ln\left(1+x^5\right)+\ln\left(1+x^6\right).$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(60)}(0)=-\mathbf{\frac{60!}{12}}-\mathbf{\frac{60!}{10}}=\mathbf{-11\cdot 59!}$ b) $f^{(66)}(0)=\mathbf{\frac{66!}{11}}=\mathbf{6\cdot 65!}$

c) $f^{(65)}(0)=\mathbf{\frac{65!}{13}}=\mathbf{5\cdot 64!}$ d) $f^{(90)}(0)=-\mathbf{\frac{90!}{18}}+\mathbf{\frac{90!}{15}}=\mathbf{89!}$

6. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot(8n)!\cdot x^n}{n^{12n}}$, $\quad R=\dfrac{\mathbf{e^{12}}}{\mathbf{4^4\cdot 8^8}}=\boxed{\dfrac{\mathbf{e^{12}}}{\mathbf{2^{32}}}\ \text{+1 punkt}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{12n}\cdot x^{2n}}{(4n)!\cdot(8n)!}$, $\quad R=\dfrac{\mathbf{4^2\cdot 8^4}}{\mathbf{e^6}}=\boxed{\dfrac{\mathbf{2^{16}}}{\mathbf{e^6}}\ \text{+1 punkt}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{12n}\cdot x^{4n}}{(4n)!\cdot(8n)!}$, $\quad R=\dfrac{\mathbf{256}}{\mathbf{e^3}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot(8n)!\cdot x^{8n}}{n^{12n}}$, $\quad R=\dfrac{\mathbf{e^{3/2}}}{\mathbf{16}}=\dfrac{\mathbf{e\cdot\sqrt{e}}}{\mathbf{16}}$

7. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8^p-3)^n}{n^2}$, $\left[\mathbf{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}}\right]$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4^p-3)^n}{n}$, $\left[\mathbf{\dfrac{1}{2},1}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^p-3)^n}{\sqrt[n]{n}}$, $(\mathbf{1,2})$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2^p-1)^n$, $(\mathbf{-\infty,1})$

8. Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+25}$, $\quad \|f\|=\mathbf{1/21}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+25}$, $\quad \|f\|=\mathbf{1/24}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-8x+25}$, $\quad \|f\|=\mathbf{1/9}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+6x+25}$, $\quad \|f\|=\mathbf{1/16}$

9. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że

$$3\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)=\operatorname{arctg} w\,.$$

a) $n=5,\quad w=\mathbf{37/55}$

b) $n=2,\quad w=\mathbf{11/2}$

c) $n=3,\quad w=\mathbf{13/9}$

d) $n=4,\quad w=\mathbf{47/52}$

10. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3^k\cdot\sin kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wtedy:

a) $C(4,7)=\boldsymbol{9\pi/19}$

b) $C(4,8)=\boldsymbol{9\pi/23}$

c) $C(4,10)=\boldsymbol{9\pi/31}$

d) $C(4,11)=\boldsymbol{9\pi/35}$

11. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{\sin kx}{\sqrt{3^k}}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(4,2)=\boldsymbol{\pi/54}$

b) $C(3,2)=\boldsymbol{\pi/18}$

c) $C(2,1)=\boldsymbol{\pi/6}$

d) $C(1,1)=\boldsymbol{\pi/2}$

12. Podaj w postaci kartezjańskiej sumę szeregu o wyrazach zespolonych.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(5i)^n}=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{29}}-\frac{\mathbf{10\cdot i}}{\mathbf{29}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3i)^n}=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{13}}-\frac{\mathbf{6\cdot i}}{\mathbf{13}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(11i)^n}=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{125}}-\frac{\mathbf{22\cdot i}}{\mathbf{125}}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(7i)^n}=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{53}}-\frac{\mathbf{14\cdot i}}{\mathbf{53}}$

13. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k+n}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(4,6)=\boldsymbol{11\pi/60}$

b) $C(1,3)=\boldsymbol{5\pi/12}$

c) $C(2,4)=\boldsymbol{7\pi/24}$

d) $C(3,5)=\boldsymbol{9\pi/40}$

14. Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[5]{k^4}}\right]$, gdzie $[\,.\,]$ to część całkowita. Wówczas:

a) $S(100\,000)=\mathbf{45}$

b) $S\left(10^{10}\right)=\mathbf{495}$

c) $S(3\,200\,000)=\mathbf{95}$

d) $S\left(10^{15}\right)=\mathbf{4995}$

Egzamin (część II) Wersja testu **B** 17 czerwca 2026 r.

ANALIZA 2 17 czerwca 2026 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **13 i 14** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.
Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery, cyfry i NAWIASY NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Przydatne wzorki:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$g(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$$

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi}f(x)\cdot g(x)\,dx=2\pi\cdot a_0\cdot c_0+\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot c_n+b_n\cdot d_n)$$

1. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k^5}{n^7}}=\mathbf{\frac{2}{7}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[4]{\frac{k^3}{n^7}}=\mathbf{\frac{4}{7}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k^3}{n^5}}=\mathbf{\frac{2}{5}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[4]{\frac{k^5}{n^9}}=\mathbf{\frac{4}{9}}$

2. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{4n}\sqrt{\frac{n^3}{k^5}}=\mathbf{\frac{7}{12}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{n^3}{k^7}}=\mathbf{\frac{7}{6}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{n^5}{k^9}}=\mathbf{\frac{31}{40}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{4n}\sqrt{\frac{n^5}{k^7}}=\mathbf{\frac{31}{80}}$

3. Podaj wartość granicy. Wskazówka rachunkowa: $512=2^9$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{512n}\sqrt[9]{\frac{1}{k^4n^5}}=\mathbf{\frac{279}{5}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{128n}\sqrt[7]{\frac{1}{k^2n^5}}=\mathbf{\frac{217}{5}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{32n}\sqrt[5]{\frac{1}{k^2n^3}}=\mathbf{\frac{35}{3}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{128n}\sqrt[7]{\frac{1}{k^4n^3}}=\mathbf{\frac{49}{3}}$

4. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{11}+x^7}}\,dx$, $(\mathbf{5/4,\ 3/2})$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{10}+x^6}}\,dx$, $(\mathbf{1,\ 4/3})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{9}+x^5}}\,dx$, $(\mathbf{3/4,\ 7/6})$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{8}+x^4}}\,dx$, $(\mathbf{1/2,\ 1})$

5. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=\ln\left(1+x^5\right)+\ln\left(1+x^6\right).$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(90)}(0)=-\mathbf{\frac{90!}{18}}+\mathbf{\frac{90!}{15}}=\mathbf{89!}$

b) $f^{(66)}(0)=\mathbf{\frac{66!}{11}}=\mathbf{6\cdot 65!}$

c) $f^{(65)}(0)=\mathbf{\frac{65!}{13}}=\mathbf{5\cdot 64!}$

d) $f^{(60)}(0)=-\mathbf{\frac{60!}{12}}-\mathbf{\frac{60!}{10}}=\mathbf{-11\cdot 59!}$

6. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{12n}\cdot x^{4n}}{(4n)!\cdot(8n)!}$, $\quad R=\mathbf{\dfrac{256}{e^3}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{12n}\cdot x^{2n}}{(4n)!\cdot(8n)!}$, $\quad R=\mathbf{\dfrac{4^2\cdot 8^4}{e^6}}=\boxed{\mathbf{\dfrac{2^{16}}{e^6}}\ \text{+1 punkt}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot(8n)!\cdot x^{n}}{n^{12n}}$, $\quad R=\mathbf{\dfrac{e^{12}}{4^4\cdot 8^8}}=\boxed{\mathbf{\dfrac{e^{12}}{2^{32}}}\ \text{+1 punkt}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot(8n)!\cdot x^{8n}}{n^{12n}}$, $\quad R=\mathbf{\dfrac{e^{3/2}}{16}}=\mathbf{\dfrac{e\cdot\sqrt{e}}{16}}$

7. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2^p-1)^n$, $(\mathbf{-\infty, 1})$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^p-3)^n}{\sqrt[n]{n}}$, $(\mathbf{1, 2})$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8^p-3)^n}{n^2}$, $\left[\mathbf{\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}}\right]$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4^p-3)^n}{n}$, $\left[\mathbf{\dfrac{1}{2}, 1}\right)$

8. Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-8x+25}$, $\quad \|f\|=\mathbf{1/9}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+25}$, $\quad \|f\|=\mathbf{1/21}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+25}$, $\quad \|f\|=\mathbf{1/24}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+6x+25}$, $\quad \|f\|=\mathbf{1/16}$

9. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że

$$3\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)=\operatorname{arctg}w\,.$$

a) $n=5$, $\ w=\mathbf{37/55}$

b) $n=4$, $\ w=\mathbf{47/52}$

c) $n=3$, $\ w=\mathbf{13/9}$

d) $n=2$, $\ w=\mathbf{11/2}$

10. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3^k\cdot\sin kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi}f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wtedy:

a) $C(4,10)=\boldsymbol{9\pi/31}$

b) $C(4,8)=\boldsymbol{9\pi/23}$

c) $C(4,7)=\boldsymbol{9\pi/19}$

d) $C(4,11)=\boldsymbol{9\pi/35}$

11. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{\sin kx}{\sqrt{3^k}}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi}f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(1,1)=\boldsymbol{\pi/2}$

b) $C(2,1)=\boldsymbol{\pi/6}$

c) $C(4,2)=\boldsymbol{\pi/54}$

d) $C(3,2)=\boldsymbol{\pi/18}$

12. Podaj w postaci kartezjańskiej sumę szeregu o wyrazach zespolonych.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(11i)^n}=\boldsymbol{-\frac{4}{125}-\frac{22\cdot i}{125}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(5i)^n}=\boldsymbol{-\frac{4}{29}-\frac{10\cdot i}{29}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3i)^n}=\boldsymbol{-\frac{4}{13}-\frac{6\cdot i}{13}}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(7i)^n}=\boldsymbol{-\frac{4}{53}-\frac{14\cdot i}{53}}$

13. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k+n}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi}f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(4,6)=\boldsymbol{11\pi/60}$

b) $C(3,5)=\boldsymbol{9\pi/40}$

c) $C(2,4)=\boldsymbol{7\pi/24}$

d) $C(1,3)=\boldsymbol{5\pi/12}$

14. Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[5]{k^4}}\right]$, gdzie $[\,.\,]$ to część całkowita. Wówczas:

a) $S\left(10^{15}\right)=\mathbf{4995}$

b) $S\left(10^{10}\right)=\mathbf{495}$

c) $S(3\,200\,000)=\mathbf{95}$

d) $S(100\,000)=\mathbf{45}$

Egzamin (część II) Wersja testu **C** 17 czerwca 2026 r.

ANALIZA 2 17 czerwca 2026 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **13 i 14** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.
Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery, cyfry i NAWIASY NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Przydatne wzorki:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$g(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$$

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi}f(x)\cdot g(x)\,dx=2\pi\cdot a_0\cdot c_0+\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot c_n+b_n\cdot d_n)$$

1. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k^5}{n^7}}=\mathbf{\frac{2}{7}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k^3}{n^5}}=\mathbf{\frac{2}{5}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[4]{\frac{k^5}{n^9}}=\mathbf{\frac{4}{9}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[4]{\frac{k^3}{n^7}}=\mathbf{\frac{4}{7}}$

2. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{n^5}{k^9}}=\mathbf{\frac{31}{40}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{n^3}{k^7}}=\mathbf{\frac{7}{6}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{4n}\sqrt{\frac{n^3}{k^5}}=\mathbf{\frac{7}{12}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{4n}\sqrt{\frac{n^5}{k^7}}=\mathbf{\frac{31}{80}}$

3. Podaj wartość granicy. Wskazówka rachunkowa: $512=2^9$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{32n}\sqrt[5]{\frac{1}{k^2n^3}}=\mathbf{\frac{35}{3}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{128n}\sqrt[7]{\frac{1}{k^2n^5}}=\mathbf{\frac{217}{5}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{512n}\sqrt[9]{\frac{1}{k^4n^5}}=\mathbf{\frac{279}{5}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{128n}\sqrt[7]{\frac{1}{k^4n^3}}=\mathbf{\frac{49}{3}}$

4. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{11}+x^7}}\,dx$, $\mathbf{(5/4,\,3/2)}$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{9}+x^5}}\,dx$, $\mathbf{(3/4,\,7/6)}$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{10}+x^6}}\,dx$, $\mathbf{(1,\,4/3)}$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{8}+x^4}}\,dx$, $\mathbf{(1/2,\,1)}$

5. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=\ln\left(1+x^5\right)+\ln\left(1+x^6\right).$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(65)}(0)=\mathbf{\frac{65!}{13}}=\mathbf{5\cdot 64!}$

b) $f^{(60)}(0)=\mathbf{-\frac{60!}{12}-\frac{60!}{10}}=\mathbf{-11\cdot 59!}$

c) $f^{(90)}(0)=\mathbf{-\frac{90!}{18}+\frac{90!}{15}}=\mathbf{89!}$

d) $f^{(66)}(0)=\mathbf{\frac{66!}{11}}=\mathbf{6\cdot 65!}$

6. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{12n}\cdot x^{4n}}{(4n)!\cdot(8n)!}$, $\quad R=\mathbf{\dfrac{256}{e^3}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot(8n)!\cdot x^{n}}{n^{12n}}$, $\quad R=\mathbf{\dfrac{e^{12}}{4^4\cdot 8^8}}=\boxed{\mathbf{\dfrac{e^{12}}{2^{32}}}\ \text{+1 punkt}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot(8n)!\cdot x^{8n}}{n^{12n}}$, $\quad R=\mathbf{\dfrac{e^{3/2}}{16}}=\mathbf{\dfrac{e\cdot\sqrt{e}}{16}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{12n}\cdot x^{2n}}{(4n)!\cdot(8n)!}$, $\quad R=\mathbf{\dfrac{4^2\cdot 8^4}{e^6}}=\boxed{\mathbf{\dfrac{2^{16}}{e^{6}}}\ \text{+1 punkt}}$

7. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8^p-3)^n}{n^2}$, $\mathbf{\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^p-3)^n}{\sqrt[n]{n}}$, $\mathbf{(1,2)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2^p-1)^n$, $\mathbf{(-\infty,1)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4^p-3)^n}{n}$, $\mathbf{\left[\dfrac{1}{2},1\right)}$

8. Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+25}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/24}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+25}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/21}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-8x+25}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/9}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+6x+25}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/16}$

9. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że

$$3\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)=\operatorname{arctg}w\,.$$

a) $n=5,\quad w=\mathbf{37/55}$

b) $n=3,\quad w=\mathbf{13/9}$

c) $n=4,\quad w=\mathbf{47/52}$

d) $n=2,\quad w=\mathbf{11/2}$

10. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3^k\cdot\sin kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wtedy:

a) $C(4,10)=\boldsymbol{9\pi/31}$

b) $C(4,7)=\boldsymbol{9\pi/19}$

c) $C(4,11)=\boldsymbol{9\pi/35}$

d) $C(4,8)=\boldsymbol{9\pi/23}$

11. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{\sin kx}{\sqrt{3^k}}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(4,2)=\boldsymbol{\pi/54}$

b) $C(2,1)=\boldsymbol{\pi/6}$

c) $C(1,1)=\boldsymbol{\pi/2}$

d) $C(3,2)=\boldsymbol{\pi/18}$

12. Podaj w postaci kartezjańskiej sumę szeregu o wyrazach zespolonych.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3i)^n}=\boldsymbol{-\frac{4}{13}-\frac{6\cdot i}{13}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(5i)^n}=\boldsymbol{-\frac{4}{29}-\frac{10\cdot i}{29}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(11i)^n}=\boldsymbol{-\frac{4}{125}-\frac{22\cdot i}{125}}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(7i)^n}=\boldsymbol{-\frac{4}{53}-\frac{14\cdot i}{53}}$

13. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k+n}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(4,6)=\boldsymbol{11\pi/60}$

b) $C(2,4)=\boldsymbol{7\pi/24}$

c) $C(3,5)=\boldsymbol{9\pi/40}$

d) $C(1,3)=\boldsymbol{5\pi/12}$

14. Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[5]{k^4}}\right]$, gdzie $[\,.\,]$ to część całkowita. Wówczas:

a) $S(3\,200\,000)=\mathbf{95}$

b) $S(100\,000)=\mathbf{45}$

c) $S\left(10^{15}\right)=\mathbf{4995}$

d) $S\left(10^{10}\right)=\mathbf{495}$

Egzamin (część II) Wersja testu **D** 17 czerwca 2026 r.

ANALIZA 2 17 czerwca 2026 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **13 i 14** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.
Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery, cyfry i NAWIASY NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Przydatne wzorki:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$g(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$$

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx=2\pi\cdot a_0\cdot c_0+\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot c_n+b_n\cdot d_n)$$

Egzamin (część II) Wersja testu **D** 17 czerwca 2026 r.

1. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k^3}{n^5}}=\mathbf{\frac{2}{5}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[4]{\frac{k^5}{n^9}}=\mathbf{\frac{4}{9}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[4]{\frac{k^3}{n^7}}=\mathbf{\frac{4}{7}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k^5}{n^7}}=\mathbf{\frac{2}{7}}$

2. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{n^5}{k^9}}=\mathbf{\frac{31}{40}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{4n}\sqrt{\frac{n^3}{k^5}}=\mathbf{\frac{7}{12}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{4n}\sqrt{\frac{n^5}{k^7}}=\mathbf{\frac{31}{80}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{n^3}{k^7}}=\mathbf{\frac{7}{6}}$

3. Podaj wartość granicy. Wskazówka rachunkowa: $512=2^9$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{512n}\sqrt[9]{\frac{1}{k^4n^5}}=\mathbf{\frac{279}{5}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{128n}\sqrt[7]{\frac{1}{k^2n^5}}=\mathbf{\frac{217}{5}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{128n}\sqrt[7]{\frac{1}{k^4n^3}}=\mathbf{\frac{49}{3}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{32n}\sqrt[5]{\frac{1}{k^2n^3}}=\mathbf{\frac{35}{3}}$

4. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty\frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{11}+x^7}}\,dx$, $\mathbf{(5/4,\ 3/2)}$

b) $\int\limits_0^\infty\frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{10}+x^6}}\,dx$, $\mathbf{(1,\ 4/3)}$

c) $\int\limits_0^\infty\frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{8}+x^4}}\,dx$, $\mathbf{(1/2,\ 1)}$

d) $\int\limits_0^\infty\frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{9}+x^5}}\,dx$, $\mathbf{(3/4,\ 7/6)}$

5. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=\ln\left(1+x^5\right)+\ln\left(1+x^6\right).$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(65)}(0)=\mathbf{\frac{65!}{13}}=\mathbf{5\cdot 64!}$

b) $f^{(60)}(0)=\mathbf{-\frac{60!}{12}-\frac{60!}{10}}=\mathbf{-11\cdot 59!}$

c) $f^{(66)}(0)=\mathbf{\frac{66!}{11}}=\mathbf{6\cdot 65!}$

d) $f^{(90)}(0)=\mathbf{-\frac{90!}{18}+\frac{90!}{15}}=\mathbf{89!}$

6. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot(8n)!\cdot x^n}{n^{12n}}$, $\quad R=\dfrac{\mathbf{e^{12}}}{\mathbf{4^4\cdot 8^8}}=\boxed{\dfrac{\mathbf{e^{12}}}{\mathbf{2^{32}}}\ \text{+1 punkt}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot(8n)!\cdot x^{8n}}{n^{12n}}$, $\quad R=\dfrac{\mathbf{e^{3/2}}}{\mathbf{16}}=\dfrac{\mathbf{e\cdot\sqrt{e}}}{\mathbf{16}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{12n}\cdot x^{2n}}{(4n)!\cdot(8n)!}$, $\quad R=\dfrac{\mathbf{4^2\cdot 8^4}}{\mathbf{e^6}}=\boxed{\dfrac{\mathbf{2^{16}}}{\mathbf{e^6}}\ \text{+1 punkt}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{12n}\cdot x^{4n}}{(4n)!\cdot(8n)!}$, $\quad R=\dfrac{\mathbf{256}}{\mathbf{e^3}}$

7. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8^p-3)^n}{n^2}$, $\left[\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right]$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2^p-1)^n$, $\mathbf{(-\infty,1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4^p-3)^n}{n}$, $\left[\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\mathbf{1}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^p-3)^n}{\sqrt[n]{n}}$, $\mathbf{(1,2)}$

8. Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-8x+25}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/9}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+25}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/21}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+6x+25}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/16}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+25}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/24}$

9. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że

$$3\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)=\operatorname{arctg}w\,.$$

a) $n=5,\ \ w=\mathbf{37/55}$

b) $n=4,\ \ w=\mathbf{47/52}$

c) $n=2,\ \ w=\mathbf{11/2}$

d) $n=3,\ \ w=\mathbf{13/9}$

10. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3^k\cdot\sin kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wtedy:

a) $C(4,7)=\boldsymbol{9\pi/19}$

b) $C(4,11)=\boldsymbol{9\pi/35}$

c) $C(4,8)=\boldsymbol{9\pi/23}$

d) $C(4,10)=\boldsymbol{9\pi/31}$

11. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{\sin kx}{\sqrt{3^k}}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(4,2)=\boldsymbol{\pi/54}$

b) $C(1,1)=\boldsymbol{\pi/2}$

c) $C(3,2)=\boldsymbol{\pi/18}$

d) $C(2,1)=\boldsymbol{\pi/6}$

12. Podaj w postaci kartezjańskiej sumę szeregu o wyrazach zespolonych.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(11i)^n}=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{125}}-\frac{\mathbf{22\cdot i}}{\mathbf{125}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(5i)^n}=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{29}}-\frac{\mathbf{10\cdot i}}{\mathbf{29}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(7i)^n}=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{53}}-\frac{\mathbf{14\cdot i}}{\mathbf{53}}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3i)^n}=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{13}}-\frac{\mathbf{6\cdot i}}{\mathbf{13}}$

13. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k+n}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(4,6)=\boldsymbol{11\pi/60}$

b) $C(3,5)=\boldsymbol{9\pi/40}$

c) $C(1,3)=\boldsymbol{5\pi/12}$

d) $C(2,4)=\boldsymbol{7\pi/24}$

14. Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[5]{k^4}}\right]$, gdzie $[\,.\,]$ to część całkowita. Wówczas:

a) $S(3\,200\,000)=\mathbf{95}$

b) $S(100\,000)=\mathbf{45}$

c) $S\left(10^{10}\right)=\mathbf{495}$

d) $S\left(10^{15}\right)=\mathbf{4995}$