ANALIZA 2 17 czerwca 2026 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **13 i 14** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.
Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery, cyfry i NAWIASY NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Przydatne wzorki:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$g(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$$

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx=2\pi\cdot a_0\cdot c_0+\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot c_n+b_n\cdot d_n)$$

Egzamin (część II) Wersja testu **A** 17 czerwca 2026 r.

1. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k^3}{n^5}}=$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[4]{\frac{k^3}{n^7}}=$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k^5}{n^7}}=$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[4]{\frac{k^5}{n^9}}=$ ....

2. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{n^5}{k^9}}=$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{4n}\sqrt{\frac{n^5}{k^7}}=$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{n^3}{k^7}}=$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{4n}\sqrt{\frac{n^3}{k^5}}=$ ....

3. Podaj wartość granicy. Wskazówka rachunkowa: $512=2^9$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{128n}\sqrt[7]{\frac{1}{k^2n^5}}=$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{32n}\sqrt[5]{\frac{1}{k^2n^3}}=$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{512n}\sqrt[9]{\frac{1}{k^4n^5}}=$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{128n}\sqrt[7]{\frac{1}{k^4n^3}}=$ ....

4. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{11}+x^7}}\,dx,$ ....

b) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{8}+x^4}}\,dx,$ ....

c) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{9}+x^5}}\,dx,$ ....

d) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{\sqrt{x^{10}+x^6}}\,dx,$ ....

5. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=\ln\left(1+x^5\right)+\ln\left(1+x^6\right).$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(60)}(0)=$ ....

b) $f^{(66)}(0)=$ ....

c) $f^{(65)}(0)=$ ....

d) $f^{(90)}(0)=$ ....

6. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot(8n)!\cdot x^n}{n^{12n}}$, $R=$ ....

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{12n}\cdot x^{2n}}{(4n)!\cdot(8n)!}$, $R=$ ....

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{12n}\cdot x^{4n}}{(4n)!\cdot(8n)!}$, $R=$ ....

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot(8n)!\cdot x^{8n}}{n^{12n}}$, $R=$ ....

7. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8^p-3)^n}{n^2}$, ...

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4^p-3)^n}{n}$, ...

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^p-3)^n}{\sqrt[n]{n}}$, ...

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2^p-1)^n$, ...

8. Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+25}$, $\|f\|=$ ....

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+25}$, $\|f\|=$ ....

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-8x+25}$, $\|f\|=$ ....

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+6x+25}$, $\|f\|=$ ....

9. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że

$$3\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)=\operatorname{arctg}w\,.$$

a) $n=5$, $w=$ ....

b) $n=2$, $w=$ ....

c) $n=3$, $w=$ ....

d) $n=4$, $w=$ ....

10. Niech $f_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k\cdot\sin kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int_0^{2\pi}f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wtedy:

a) $C(4,7)=$ ....

b) $C(4,8)=$ ....

c) $C(4,10)=$ ....

d) $C(4,11)=$ ....

11. Niech $f_n(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\sin kx}{\sqrt{3^k}}$ oraz $C(m,n)=\int_0^{2\pi}f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(4,2)=$ ....

b) $C(3,2)=$ ....

c) $C(2,1)=$ ....

d) $C(1,1)=$ ....

12. Podaj w postaci kartezjańskiej sumę szeregu o wyrazach zespolonych.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(5i)^n}=$ ....

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3i)^n}=$ ....

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(11i)^n}=$ ....

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(7i)^n}=$ ....

13. Niech $f_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k+n}$ oraz $C(m,n)=\int_0^{2\pi}f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(4,6)=$ ....

b) $C(1,3)=$ ....

c) $C(2,4)=$ ....

d) $C(3,5)=$ ....

14. Niech $S(n)=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[5]{k^4}}\right]$, gdzie $[\,.\,]$ to część całkowita. Wówczas:

a) $S(100\,000)=$ ....

b) $S\left(10^{10}\right)=$ ....

c) $S(3\,200\,000)=$ ....

d) $S\left(10^{15}\right)=$ ....