KOLOKWIUM nr 10, 12.06.2026, godz. 8:15–9:45

Zadanie **14.**

Oblicz sumę szeregu o wyrazach zespolonych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n \cdot 2^n}.$$

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad |z| \leqslant 1,\ z \neq 1$$

dla $z = \frac{1+i}{2}$ otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n \cdot 2^n} = -\ln\left(1 - \frac{1+i}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1-i}{2}\right).$$

Zastosowanie wzoru

$$\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z \qquad \arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

pozwala na dalsze przekształcenia:

$$-\ln\left(\frac{1-i}{2}\right) = -\left(\ln\left|\frac{1-i}{2}\right| + i \cdot \arg\left(\frac{1-i}{2}\right)\right) = -\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi \cdot i}{4}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę $\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi \cdot i}{4}$.

Zadanie **15.**
Wiedząc, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(6n+1)^4}+\frac{1}{(6n+5)^4}\right).$$

Rozwiązanie:
Skorzystamy z następujących równości:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(6n+1)^4}+\frac{1}{(6n+5)^4}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n)^4}=\left(1-\frac{1}{16}-\frac{1}{81}+\frac{1}{6^4}\right)\cdot\frac{\pi^4}{90}=$$

$$=\frac{1296-81-16+1}{1296}\cdot\frac{\pi^4}{90}=\frac{1200}{1296}\cdot\frac{\pi^4}{90}=\frac{100}{108}\cdot\frac{\pi^4}{90}=\frac{10}{108}\cdot\frac{\pi^4}{9}=\frac{5}{54}\cdot\frac{\pi^4}{9}=\frac{5\cdot\pi^4}{486}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę $\frac{5\cdot\pi^4}{486}$.

Zadanie **16.**
Wiedząc, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

oblicz wartości całek niewłaściwych

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx \qquad \text{oraz} \qquad \int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Niech

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}\,.$$

Wówczas ze wzoru

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{dla } x \in [-1,\,1)$$

otrzymujemy

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}\,. \qquad \text{dla } x \in [-1,\,1)$$

Całkując powyższy szereg wyraz za wyrazem otrzymujemy funkcję pierwotną funkcji f:

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,. \qquad \text{dla } x \in [-1,\,1]$$

Ponieważ

$$F(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n^2} = 0\,,$$

$$F(1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

oraz

$$F(-1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12}\,,$$

otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = F(1)-F(0) = -\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{oraz} \qquad \int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = F(0)-F(-1) = -\frac{\pi^2}{12}\,.$$

Zadanie **17.**

Oblicz sumę szeregu o wyrazach zespolonych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+2in-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$2n^2+2in-1=\frac{(2n+1+i)\cdot(2n-1+i)}{2}\,,$$

co prowadzi do rozkładu na ułamki proste

$$\frac{1}{2n^2+2in-1}=\frac{1}{2n-1+i}-\frac{1}{2n+1+i}\,.$$

Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+2in-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1+i}-\frac{1}{2n+1+i}\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1+i}-\frac{1}{2n+1+i}\right)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{1+i}-\frac{1}{2N+1+i}\right)=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}\,.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę $\frac{1-i}{2}$.

18. Niech $I(n)=\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt[n]{x}}$. Wówczas:

a) $I(16)=\mathbf{\frac{16\cdot\ln2}{15}}$

b) $I(32)=\mathbf{\frac{32\cdot\ln2}{31}}$

c) $I(25)=\mathbf{\frac{25\cdot\ln2}{24}}$

d) $I(27)=\mathbf{\frac{27\cdot\ln2}{26}}$

19. Wiedząc, że $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^6+1}=\frac{\pi}{3}$ podaj wartość całki

a) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^6+64}=\boldsymbol{\frac{\pi}{96}}$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{4x^6+1}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3\cdot\sqrt[3]{2}}}$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{64x^6+1}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{8x^6+1}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3\cdot\sqrt{2}}}$

20. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k+n}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(0,1)=\boldsymbol{\pi}$

b) $C(0,4)=\boldsymbol{25\pi/48}$

c) $C(0,2)=\boldsymbol{3\pi/4}$

d) $C(0,3)=\boldsymbol{11\pi/18}$

Przydatne wzorki:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$g(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$$

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx=2\pi\cdot a_0\cdot c_0+\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot c_n+b_n\cdot d_n)$$