

ANALIZA 2, KOŁOKWIUM nr **10**, **12.06.2026**, godz. 8:15–9:45

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Przydatne wzorki:

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad |z| \leq 1, z \neq 1$$

$$\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z \quad \arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Zadanie **14.**

Oblicz sumę szeregu o wyrazach zespolonych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n \cdot 2^n}.$$

Zadanie **15.**

Wiedząc, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(6n+1)^4} + \frac{1}{(6n+5)^4} \right).$$

Zadanie **16.**

Wiedząc, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

oblicz wartości całek niewłaściwych

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx \quad \text{oraz} \quad \int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x} dx.$$

Zadanie **17.**

Oblicz sumę szeregu o wyrazach zespolonych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 2in - 1}.$$

18. Niech $I(n) = \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt[n]{x}}$. Wówczas:

a) $I(16) = \dots\dots\dots$

b) $I(32) = \dots\dots\dots$

c) $I(25) = \dots\dots\dots$

d) $I(27) = \dots\dots\dots$

19. Wiedząc, że $\int_0^\infty \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{\pi}{3}$ podaj wartość całki

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^6 + 64} = \dots\dots\dots$

b) $\int_0^\infty \frac{dx}{4x^6 + 1} = \dots\dots\dots$

c) $\int_0^\infty \frac{dx}{64x^6 + 1} = \dots\dots\dots$

d) $\int_0^\infty \frac{dx}{8x^6 + 1} = \dots\dots\dots$

20. Niech $f_n(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\sin kx}{k+n}$ oraz $C(m, n) = \int_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x) dx$. Wówczas:

a) $C(0, 1) = \dots\dots\dots$

b) $C(0, 4) = \dots\dots\dots$

c) $C(0, 2) = \dots\dots\dots$

d) $C(0, 3) = \dots\dots\dots$

Przydatne wzorki:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$g(x) = c_0 + \sum_{n=1}^\infty (c_n \cos nx + d_n \sin nx)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx = 2\pi \cdot a_0 \cdot c_0 + \pi \cdot \sum_{n=1}^\infty (a_n \cdot c_n + b_n \cdot d_n)$$