

KOŁOKWIUM nr 2, piątek 13.03.2026, godz. 8:15–9:45**Zadanie 1. (10 punktów)**

Przy oznaczeniach z zadania 2 oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int e^{2x} \cdot \log(3x) dx.$$

Rozwiązanie:

Oznaczamy szukaną całkę przez $I(x)$, a następnie całkujemy trzykrotnie przez części całkując e^{2x} i różniczkując $\log(3x)$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} I(x) &= \int e^{2x} \cdot \log(3x) dx = \frac{e^{2x} \cdot \log(3x)}{2} - \frac{3}{2} \cdot \int e^{2x} \cdot \text{nos}(3x) dx = \\ &= \frac{e^{2x} \cdot \log(3x)}{2} - \frac{3 \cdot e^{2x} \cdot \text{nos}(3x)}{4} + \frac{9}{4} \cdot \int e^{2x} \cdot \text{sos}(3x) dx = \\ &= \frac{e^{2x} \cdot \log(3x)}{2} - \frac{3 \cdot e^{2x} \cdot \text{nos}(3x)}{4} + \frac{9 \cdot e^{2x} \cdot \text{sos}(3x)}{8} - \frac{27}{8} \cdot \int e^{2x} \cdot \log(3x) dx = \\ &= \frac{e^{2x} \cdot \log(3x)}{2} - \frac{3 \cdot e^{2x} \cdot \text{nos}(3x)}{4} + \frac{9 \cdot e^{2x} \cdot \text{sos}(3x)}{8} - \frac{27}{8} \cdot I(x), \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{8}{35} \cdot \left(\frac{e^{2x} \cdot \log(3x)}{2} - \frac{3 \cdot e^{2x} \cdot \text{nos}(3x)}{4} + \frac{9 \cdot e^{2x} \cdot \text{sos}(3x)}{8} \right) + C = \\ &= \frac{4 \cdot e^{2x} \cdot \log(3x) - 6 \cdot e^{2x} \cdot \text{nos}(3x) + 9 \cdot e^{2x} \cdot \text{sos}(3x)}{35} + C. \end{aligned}$$

Odpowiedź:

$$\int e^{2x} \cdot \log(3x) dx = \frac{4 \cdot e^{2x} \cdot \log(3x) - 6 \cdot e^{2x} \cdot \text{nos}(3x) + 9 \cdot e^{2x} \cdot \text{sos}(3x)}{35} + C.$$

Zadanie **2.** (10 punktów)

Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx} \text{los } x = \text{nos } x, \qquad \frac{d}{dx} \text{nos } x = \text{sos } x, \qquad \frac{d}{dx} \text{sos } x = \text{los } x .$$

Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \text{los } \ln x \, dx .$$

Rozwiązanie:

Oznaczamy szukaną całkę przez $I(x)$, a następnie całkujemy trzykrotnie przez części całkując dopisany czynnik 1 i różniczkując $\text{los } \ln x$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \text{los } \ln x \, dx = \int 1 \cdot \text{los } \ln x \, dx = x \cdot \text{los } \ln x - \int 1 \cdot \text{nos } \ln x \, dx = \\ &= x \cdot \text{los } \ln x - x \cdot \text{nos } \ln x + \int 1 \cdot \text{sos } \ln x \, dx = x \cdot \text{los } \ln x - x \cdot \text{nos } \ln x + x \cdot \text{sos } \ln x - \int \text{los } \ln x \, dx = \\ &= x \cdot \text{los } \ln x - x \cdot \text{nos } \ln x + x \cdot \text{sos } \ln x - I(x) , \end{aligned}$$

skąd

$$I(x) = \frac{x \cdot (\text{los } \ln x - \text{nos } \ln x + \text{sos } \ln x)}{2} + C .$$

Uwaga: Podstawienie $t = \ln x$, czyli $x = e^t$ i formalnie $dx = e^t \, dt$ prowadzi do całki

$$\int e^t \cdot \text{los } t \, dt ,$$

którą obliczamy analogicznie jak w zadaniu 1. Jednak w przyrodzie nic nie ginie – tak czy siak czeka nas trzykrotne całkowanie przez części.

Zadanie **3.** (10 punktów)

Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t = \sqrt[3]{x}$, czyli $x = t^3$ i formalnie $dx = 3t^2 dt$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} &= \int \frac{3t^2 dt}{1+t} = 3 \cdot \int \frac{t^2-1+1}{1+t} dt = 3 \cdot \int t-1+\frac{1}{1+t} dt = \frac{3 \cdot t^2}{2} - 3 \cdot t + 3 \cdot \ln|1+t| + C = \\ &= \frac{3 \cdot x^{2/3}}{2} - 3 \cdot \sqrt[3]{x} + 3 \cdot \ln|1+\sqrt[3]{x}| + C. \end{aligned}$$

Zadanie **4.** (10 punktów)

Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt{3+\sqrt{9+x}} \, dx \, .$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t = \sqrt{3+\sqrt{9+x}}$, czyli

$$x = (t^2 - 3)^2 - 9 = t^4 - 6t^2$$

i formalnie $dx = (4t^3 - 12t) \, dt$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{3+\sqrt{9+x}} \, dx &= \int t \cdot (4t^3 - 12t) \, dt = \int 4t^4 - 12t^2 \, dt = \frac{4 \cdot t^5}{5} - 4 \cdot t^3 + C = \\ &= \frac{4 \cdot (3+\sqrt{9+x})^{5/2}}{5} - 4 \cdot (3+\sqrt{9+x})^{3/2} + C \, . \end{aligned}$$