KOLOKWIUM nr 4, 10.04.2026, godz. 8:15–9:45

Zadanie **5. (10 punktów)**

Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x+10}{x\cdot(x+7)\cdot(x+13)\cdot(x+20)}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (normalny):

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{x+10}{x\cdot(x+7)\cdot(x+13)\cdot(x+20)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{D}{x+2}+\frac{E}{x+3}\,,$$

$$\begin{aligned} x+10 &= A\cdot(x+7)\cdot(x+13)\cdot(x+20) + B\cdot x\cdot(x+13)\cdot(x+20) + \\ &+ D\cdot x\cdot(x+7)\cdot(x+20) + E\cdot x\cdot(x+7)\cdot(x+13)\,. \end{aligned} \qquad (*)$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (*), układaniem układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy[1] do równości (*) kolejno[2] $x=0,\ -7,\ -13,\ -20$. Otrzymujemy:

dla $x=0$ $\qquad 10=7\cdot 13\cdot 20\cdot A$, skąd $A=1/182$,

dla $x=-7$ $\qquad 3=-7\cdot 6\cdot 13\cdot B$, skąd $B=-1/182$,

dla $x=-13$ $\qquad -3=-13\cdot(-6)\cdot 7\cdot D$, skąd $D=-1/182$,

dla $x=-20$ $\qquad -10=-20\cdot(-13)\cdot(-7)\cdot E$, skąd $E=1/182$.

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\int \frac{x+10}{x\cdot(x+7)\cdot(x+13)\cdot(x+20)}\,dx=\frac{1}{182}\cdot\int \frac{1}{x}-\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+13}+\frac{1}{x+20}\,dx=$$

$$=\frac{1}{182}\cdot\left(\ln|x|-\ln|x+7|-\ln|x+13|+\ln|x+20|\right)+C\,.$$

Sposób II (trikowy):

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\int \frac{x+10}{x\cdot(x+7)\cdot(x+13)\cdot(x+20)}\,dx=\int \frac{x+10}{\big(x\cdot(x+20)\big)\cdot\big((x+7)\cdot(x+13)\big)}\,dx=$$

$$=\int \frac{x+10}{(x^2+20x)\cdot(x^2+20x+91)}\,dx\,,$$

a następnie podstawiamy $t=x^2+20x$ i formalnie $\frac{dt}{2}=(x+10)\,dx$. Otrzymujemy

$$\int \frac{x+10}{(x^2+20x)\cdot(x^2+20x+91)}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int \frac{dt}{t\cdot(t+91)}\,.$$

[1] Taka metoda jest o wiele szybsza, zwłaszcza przy wysokim stopniu mianownika, jednak można ją wydajnie zastosować tylko w przypadku mianownika będącego iloczynem różnych czynników liniowych.

[2] To są wartości x, przy których czynniki liniowe się zerują.

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t\cdot(t+91)}=\frac{1/91}{t}-\frac{1/91}{t+91}\,,$$

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{t\cdot(t+91)}=\frac{1}{182}\cdot\int\frac{1}{t}-\frac{1}{t+91}\,dt=\frac{1}{182}\cdot\Big(\ln|t|-\ln|t+91|\Big)+C=$$

$$=\frac{1}{182}\cdot\Big(\ln\left|x^2+20x\right|-\ln\left|x^2+20x+91\right|\Big)+C=\frac{1}{182}\cdot\Big(\ln|x\cdot(x+20)|-\ln|(x+7)\cdot(x+13)|\Big)+C=$$

$$=\frac{1}{182}\cdot\ln\left|\frac{x\cdot(x+20)}{(x+7)\cdot(x+13)}\right|+C\,.$$

Zadanie **6. (10 punktów)**

Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+8x+25}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia $y=x+4$ oraz $t=y/3$:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+8x+25}=\int \frac{x\,dx}{(x+4)^2+9}=\int \frac{(y-4)\,dy}{y^2+9}=\int \frac{(y-4)\,dy}{9\cdot(y/3)^2+9}=\int \frac{(3t-4)\cdot 3\,dt}{9t^2+9}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\int \frac{(3t-4)\,dt}{t^2+1}=\frac{\ln\left(t^2+1\right)}{2}-\frac{4\cdot\operatorname{arctg} t}{3}+C=\frac{\ln\left(\left(\frac{y}{3}\right)^2+1\right)}{2}-\frac{4\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{3}}{3}+C=$$

$$=\frac{\ln\left(\left(\frac{x+4}{3}\right)^2+1\right)}{2}-\frac{4\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+4}{3}}{3}+C=\frac{\ln\left(\frac{x^2+8x+25}{3}\right)}{2}-\frac{4\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+4}{3}}{3}+C=$$

$$=\frac{\ln\left(x^2+8x+25\right)}{2}-\frac{\ln 3}{2}-\frac{4\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+4}{3}}{3}+C=\frac{\ln\left(x^2+8x+25\right)}{2}-\frac{4\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+4}{3}}{3}+C_1\,.$$

Zadanie **7. (2x10=20 punktów)**

a) Rozstrzygnij, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_3^5 \log_2\left(x^2+7\right)\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 9.

b) Rozstrzygnij, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_3^7 \log_2\left(x^2+7\right)\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 20.

Rozwiązanie:

Zbadamy wypukłość funkcji podcałkowej

$$f(x)=\log_2\left(x^2+7\right)=\log_2 e\cdot\log_e\left(x^2+7\right)=\log_2 e\cdot\ln\left(x^2+7\right).$$

Różniczkując otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2x}{x^2+7}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2\cdot(x^2+7)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+7\right)^2}=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2\cdot(-x^2+7)}{\left(x^2+7\right)^2}.$$

Stąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale $\left[\sqrt{7},\infty\right)$, ponieważ $f''(x)<0$ dla $x>\sqrt{7}$. Przedział ten zawiera interesujące nas przedziały całkowania $[3,5]$ oraz $[3,7]$.

Zauważmy ponadto, że $f(3)=4$ oraz $f(5)=5$. Z wklęsłości funkcji f na przedziale $[3,5]$ wynika, że wykres funkcji f leży powyżej siecznej na tym przedziale. Na rysunku 1 musisz powiększyć odpowiedni fragment, aby zobaczyć wyraźnie, że wykres funkcji (czarny) nie pokrywa się z sieczną (czerwona). Zatem pole pod wykresem funkcji na tym przedziale jest większe od pola pod sieczną. Ponieważ pod sieczną znajduje się trapez o polu 9, otrzymujemy nierówność[3]

$$\int_3^5 \log_2\left(x^2+7\right)\,dx>9.$$

Pole trapezu (kontur czerwony) wyliczamy geometrycznie (pionowe podstawy 4 i 5 oraz pozioma wysokość 2).

Z kolei styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(5,5)$ leży nad[4] wykresem funkcji f na przedziale $[3,7]$, co pokazano na rysunku 2. Zatem pole pod wykresem funkcji na tym przedziale jest mniejsze od pola pod styczną. Ponieważ pod styczną znajduje się trapez o polu 20, otrzymujemy nierówność[5]

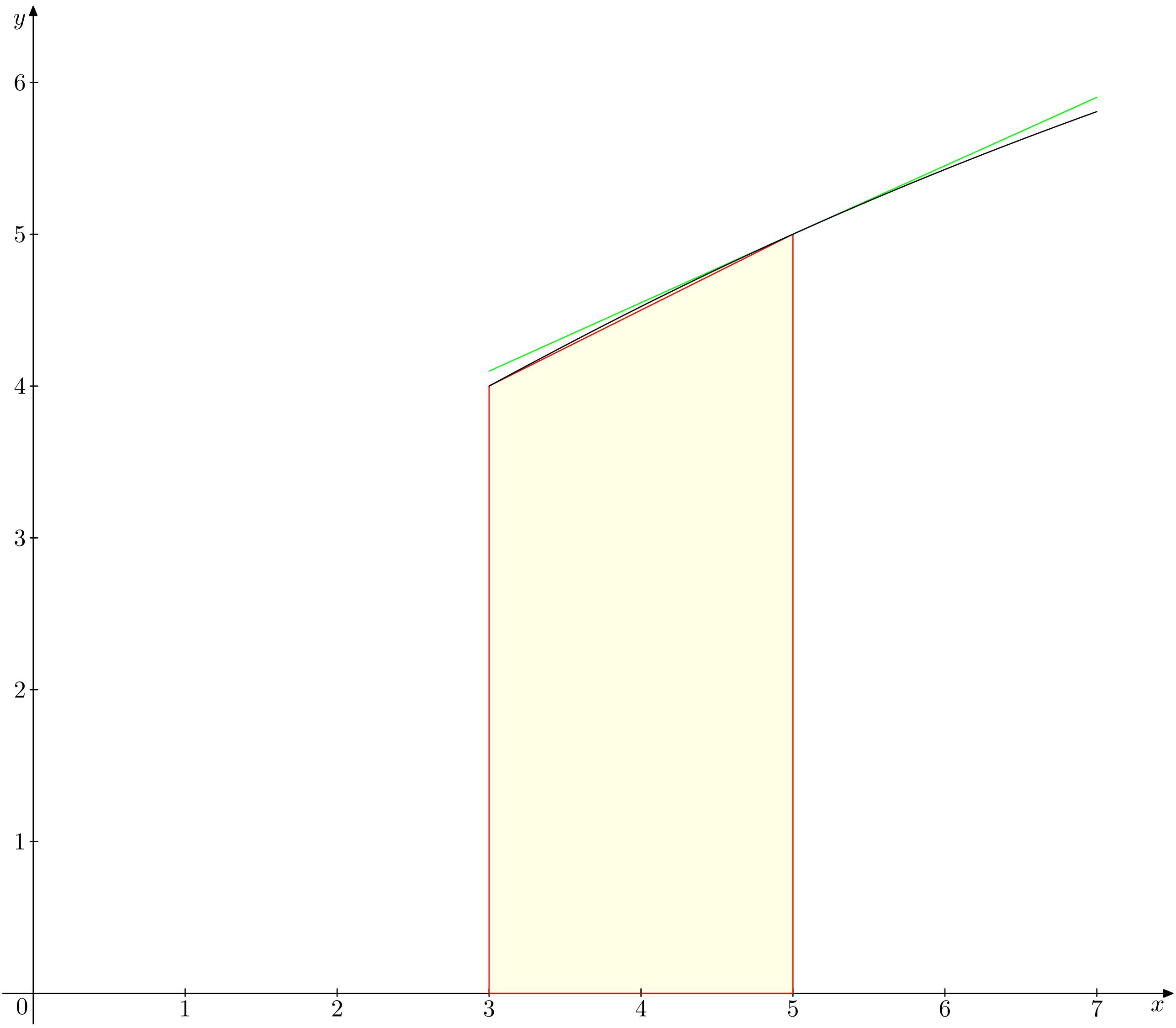
$$\int_3^7 \log_2\left(x^2+7\right)\,dx<20.$$

Pole trapezu (kontur zielony) wyliczamy geometrycznie (pionowy odcinek – zielony przerywany – łączący środki ramion ma długość 5, a pozioma wysokość 4).

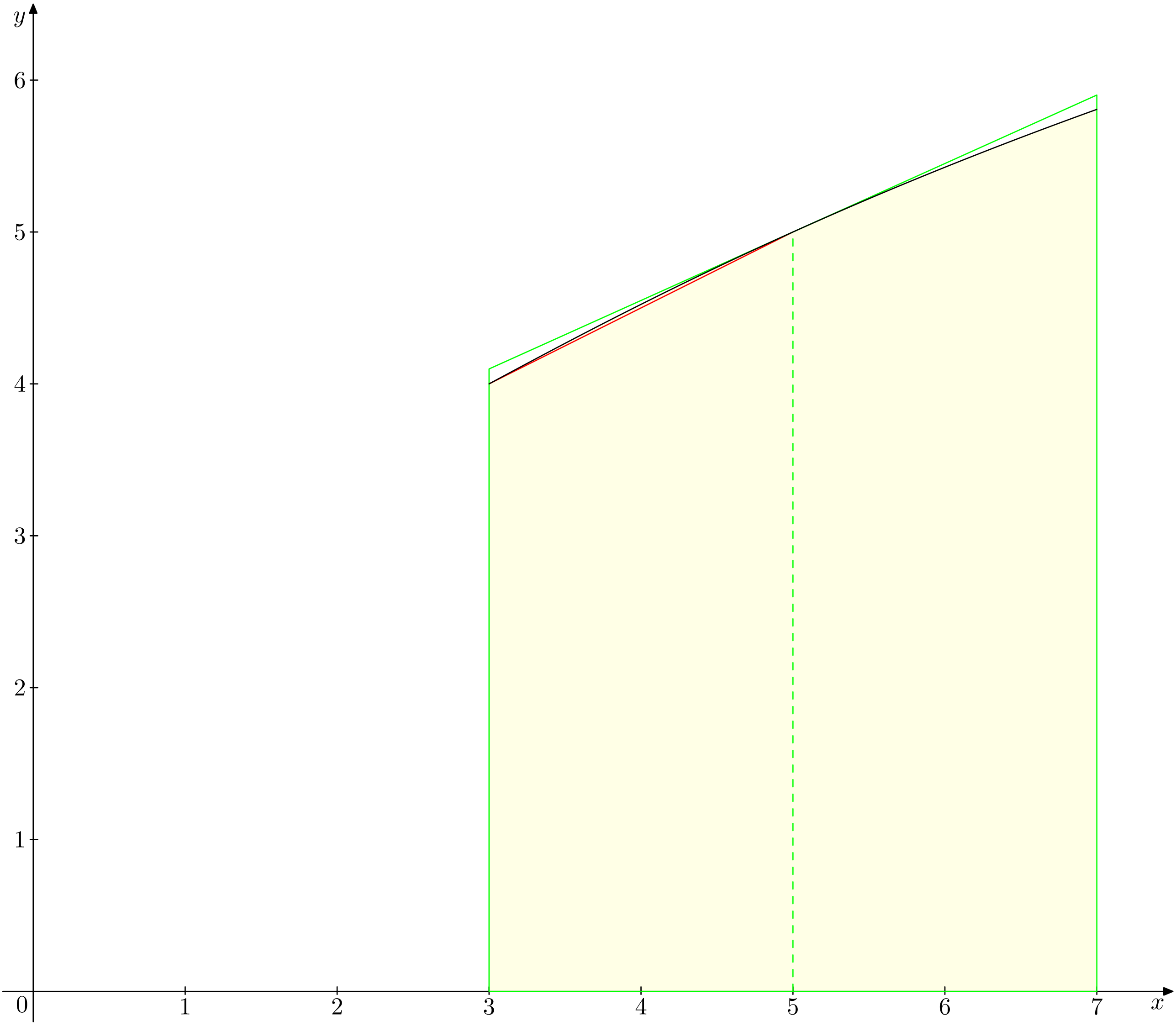
[3] Przy użyciu komputera można stwierdzić, że całka ma w przybliżeniu wartość 9,03115.

[4] Za wyjątkiem puktu styczności, który leży **na** wykresie. No bo gdzie miałby leżeć?

[5] Przy użyciu komputera można stwierdzić, że całka ma w przybliżeniu wartość 19,8686.



rys. 1



rys. 2

Zauważ, że do dokładnego opisu trapezu musimy znać wartość $f'(5)$, ale nie jest ona potrzebna do wyliczenia pola trapezu.

Zadanie **8. (DODATKOWE za 20 punktów)**

Za rozważania, które nie prowadzą do rozwiązania, otrzymasz ZERO punktów.

Oblicz wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \sqrt{x^4+9}+\sqrt[4]{1000x^2-900}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Wyciągając przed całkę czynnik $\sqrt{10}$ otrzymujemy

$$\int_1^3 \sqrt{x^4+9}+\sqrt[4]{1000x^2-900}\,dx=\sqrt{10}\cdot\int_1^3 \sqrt{\frac{x^4+9}{10}}+\sqrt[4]{10x^2-9}\,dx\,.$$

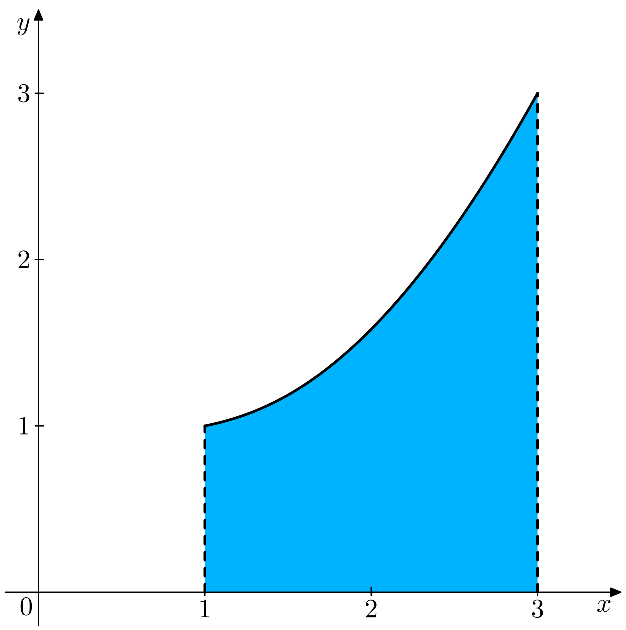
Niech $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem[6]

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^4+9}{10}}\,.$$

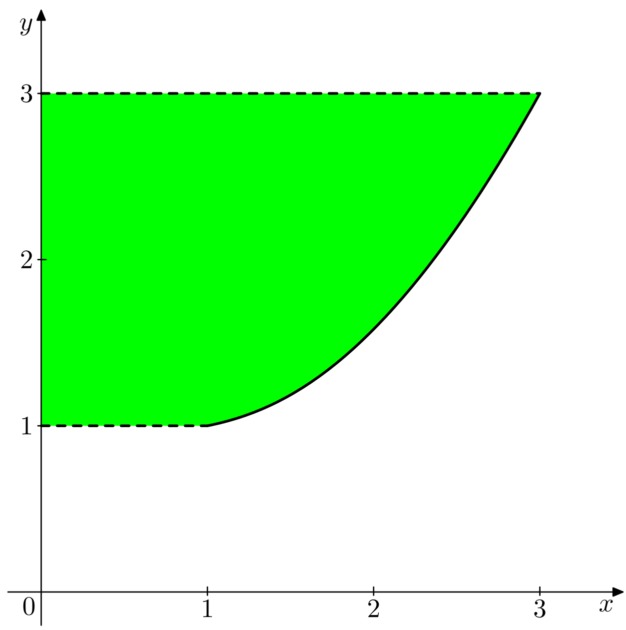
Zauważmy, że $f(1)=1$ oraz $f(3)=3$, a ponadto przekształcanie równania $y=f(x)$ prowadzi kolejno do

$$y=\sqrt{\frac{x^4+9}{10}}\,,\qquad y^2=\frac{x^4+9}{10}\,,\qquad 10y^2=x^4+9\,,$$

$$10y^2-9=x^4\,,\qquad \sqrt[4]{10y^2-9}=x\,.$$



rys. 3



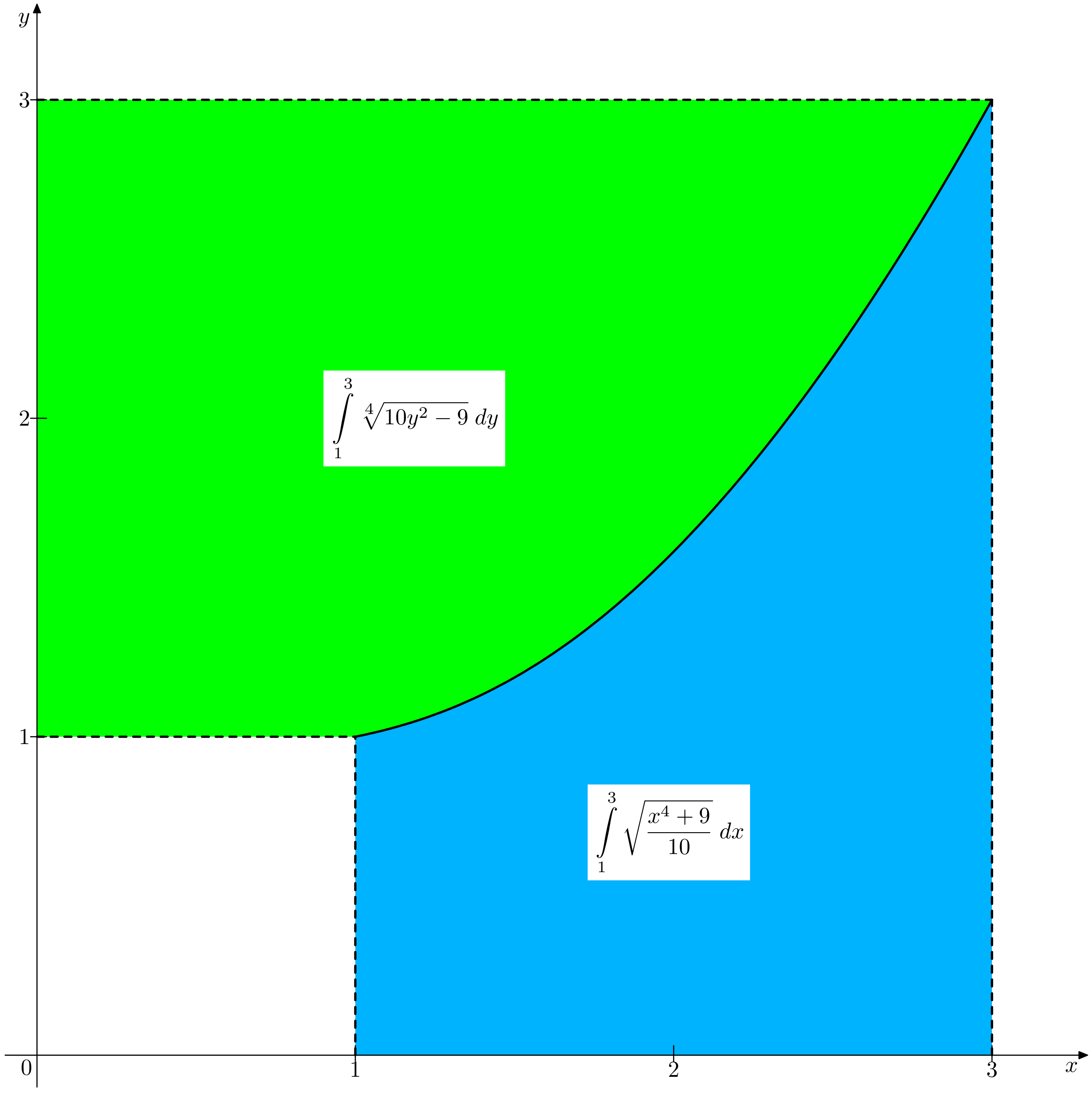
rys. 4

Oznacza to, że dana w zadaniu całka ma postać

$$\sqrt{10}\cdot\int_1^3 f(x)+f^{-1}(x)\,dx\,,$$

[6]Zauważmy, że jest to funkcja rosnąca.

gdzie $f^{-1}:[1,3]\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f określoną wzorem
$$f^{-1}(x)=\sqrt[4]{10x^2-9}\,.$$



rys. 5

Całka
$$\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3 \sqrt{\frac{x^4+9}{10}}\,dx$$
jest polem figury
$$\{(x,y):\ 1\leqslant x\leqslant 3\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}=\left\{(x,y):\ 1\leqslant x\leqslant 3\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{\frac{x^4+9}{10}}\right\}$$

zamalowanej na rysunkach 3 i 5 kolorem niebieskim.

Z kolei na rysunkach 4 i 5 kolorem zielonym zamalowana jest figura

$$\left\{(x,y):\ 1\leqslant y\leqslant 3\ \wedge\ 0\leqslant x\leqslant f^{-1}(y)\right\}=\left\{(x,y):\ 1\leqslant y\leqslant 3\ \wedge\ 0\leqslant x\leqslant \sqrt[4]{10y^2-9}\right\},$$

której pole jest równe

$$\int\limits_1^3 f^{-1}(y)\,dy=\int\limits_1^3 \sqrt[4]{10y^2-9}\,dy=\int\limits_1^3 \sqrt[4]{10x^2-9}\,dx\,.$$

Dana w treści zadania całka podzielona przez $\sqrt{10}$, czyli

$$\int\limits_1^3 \sqrt{\frac{x^4+9}{10}}+\sqrt[4]{10x^2-9}\,dx$$

ma więc wartość równą polu figury zamalowanej na rysunku 5. Ponieważ zamalowana figura jest różnicą kwadratów o bokach 3 i 1, jej pole jest równe 8.

Odpowiedź:

$$\int\limits_1^3 \sqrt{x^4+9}+\sqrt[4]{1000x^2-900}\,dx=8\cdot\sqrt{10}\,.$$