

KOŁOKWIUM nr 6, 15.05.2026, godz. 8:15–9:45

Zadanie 9. (10 punktów)

Oblicz wartość całki niewłaściwej

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+6) \cdot (x+30)}.$$

Doprowadź wynik do postaci $w \cdot \ln p$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x \cdot (x+6) \cdot (x+30)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+6} + \frac{C}{x+30},$$

$$1 = A \cdot (x+6) \cdot (x+30) + B \cdot x \cdot (x+30) + C \cdot x \cdot (x+6).$$

Podstawiamy¹ za x wartości 0, -6 i -30 otrzymując odpowiednio

dla $x = 0$ $1 = 180 \cdot A$, skąd $A = 1/180$,

dla $x = -6$ $1 = -144 \cdot B$, skąd $B = -1/144$,

dla $x = -30$ $1 = 720 \cdot C$, skąd $C = 1/720$.

Wobec tego²

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+6) \cdot (x+30)} &= \int_2^{\infty} \frac{1/180}{x} - \frac{1/144}{x+6} + \frac{1/720}{x+30} dx = \\ &= \frac{1}{720} \cdot (4 \cdot \ln|x| - 5 \cdot \ln|x+6| + \ln|x+30|) \Big|_{x=2}^{\infty} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{720} \cdot (4 \cdot \ln|x| - 5 \cdot \ln|x+6| + \ln|x+30|) \right) \right) - \frac{1}{720} \cdot (4 \cdot \ln 2 - 5 \cdot \ln 8 + \ln 32) = \\ &= \frac{1}{720} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^4 \cdot (x+30)}{(x+6)^5} \right) - \frac{1}{720} \cdot (4 \cdot \ln 2 - 15 \cdot \ln 2 + 5 \cdot \ln 2) = \\ &= \frac{1}{720} \cdot \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{30}{x}}{\left(1 + \frac{6}{x}\right)^5} \right) + \frac{6}{720} \cdot \ln 2 = \frac{1}{720} \cdot \ln 1 + \frac{1}{120} \cdot \ln 2 = \frac{1}{120} \cdot \ln 2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\frac{1}{120} \cdot \ln 2$.

Uwaga: Całki $\int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx$, $\int_1^{\infty} \frac{2}{x+6} dx$, $\int_2^{\infty} \frac{1}{x+30} dx$ są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x+6), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x+30)$$

¹Można też wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A , B i C , porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x 'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

²Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

Poprawne wykonanie przejścia granicznego jest kluczowym elementem rozwiązania. Bez tego elementu zadanie nie może być uznanane za rozwiązane nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, a rozwiązanie nie może być ocenione na więcej niż **4 punkty**.

Zadanie 10. (10 punktów)

Wyznacz zbiór wszystkich wartości rzeczywistych **dodatnich** parametru p , dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n^p} - n \right)$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

W przypadku $p \geq 3$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n^p} - n \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n^3} - n \right) = \left(\sqrt[3]{2} - 1 \right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n = \infty,$$

szereg jest więc rozbieżny.

W dalszej części rozwiązania założymy, że $p < 3$, a więc w konsekwencji $n^p \leq n^3$.

Przepisujemy wyrazy danego szeregu korzystając ze wzoru na różnicę sześciątów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n^p} - n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n^3 + n^p)^{2/3} + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + n^p} + n^2}.$$

Szacujemy szereg od góry:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n^3 + n^p)^{2/3} + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + n^p} + n^2} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n^3 + 0)^{2/3} + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 0} + n^2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{3n^2} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-p}} < \infty, \end{aligned}$$

o ile $2 - p > 1$, czyli $p < 1$.

Stąd wnioskujemy, że dla $p < 1$ dany szereg jest zbieżny, natomiast powyższe szacowanie nic nie mówi o zbieżności szeregu dla $p \geq 1$.

Szacując szereg od dołu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n^3 + n^p)^{2/3} + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + n^p} + n^2} &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n^3 + 7n^3)^{2/3} + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 7n^3} + n^2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{7n^2} = \frac{1}{7} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-p}} = \infty, \end{aligned}$$

o ile $2 - p \leq 1$, czyli $p \geq 1$.

Stąd wnioskujemy, że dla $p \geq 1$ dany szereg jest rozbieżny, natomiast szacowanie od dołu nic nie mówi o zbieżności szeregu dla $p < 1$.

Po uwzględnieniu założenia o dodatniości p otrzymujemy:

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny dla $p \in (0, 1)$.

Zadanie 11. (10 punktów)

Udowodnij zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 600}.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy udowodnić zbieżność danego szeregu korzystając z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Aby to udowodnić, musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne – oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 600} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{600}{n^2}} = \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{n}{n^2 + 600} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2 + 600}, \quad (*)$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$n \cdot (n^2 + 2n + 601) \geq (n+1) \cdot (n^2 + 600),$$

$$n^3 + 2n^2 + 601n \geq n^3 + n^2 + 600n + 600,$$

$$n^2 + n \geq 600,$$

$$n \cdot (n+1) \geq 24 \cdot 25,$$

skąd wynika, że nierówność (*) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n \geq 24$.

Zatem szereg $\sum_{n=24}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 600}$ spełnia warunki kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, wobec czego jest zbieżny.

Ponieważ zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu wyrazów, także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 600}$ jest zbieżny.

Zadanie **12.** (10 punktów)

Rozstrzygnij zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n^3} \cdot (n + \pi)^{n^4}}{n^{n^4}}$$

w zależności od parametru rzeczywistego **dodatniego** p . Dla jednej wartości p możesz nie udzielić odpowiedzi.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $a_n = \frac{(n + \pi)^{n^4}}{p^{n^3} \cdot n^{n^4}}$ i zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{p^{n^3} \cdot (n + \pi)^{n^4}}{n^{n^4}}} = \frac{p^{n^2} \cdot (n + \pi)^{n^3}}{n^{n^3}} = b_n.$$

Ponieważ nie umiemy od razu stwierdzić, do czego dąży b_n przy $n \rightarrow \infty$, stosujemy ponownie kryterium Cauchy'ego, tym razem do **ciągu** (b_n) . Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{p^{n^2} \cdot (n + \pi)^{n^3}}{n^{n^3}}} = \frac{p^n \cdot (n + \pi)^{n^2}}{n^{n^2}} = c_n.$$

Ponieważ nie umiemy od razu stwierdzić, do czego dąży c_n przy $n \rightarrow \infty$, stosujemy ponownie kryterium Cauchy'ego, tym razem do **ciągu** (c_n) . Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{c_n} = \sqrt[n]{\frac{p^n \cdot (n + \pi)^{n^2}}{n^{n^2}}} = \frac{p \cdot (n + \pi)^n}{n^n} = p \cdot \left(1 + \frac{\pi}{n}\right)^n \rightarrow p \cdot e^\pi \begin{cases} > 1 & \text{dla } p > \frac{1}{e^\pi} \\ < 1 & \text{dla } 0 < p < \frac{1}{e^\pi} \end{cases}$$

Z kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (c_n) wynika więc, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \begin{cases} +\infty & \text{dla } p > \frac{1}{e^\pi} \\ 0 & \text{dla } 0 < p < \frac{1}{e^\pi} \end{cases}$$

Analogicznie, z kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) wynika, że skoro

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \begin{cases} +\infty > 1 & \text{dla } p > \frac{1}{e^\pi} \\ 0 < 1 & \text{dla } 0 < p < \frac{1}{e^\pi} \end{cases}$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \begin{cases} +\infty & \text{dla } p > \frac{1}{e^\pi} \\ 0 & \text{dla } 0 < p < \frac{1}{e^\pi} \end{cases}$$

Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \begin{cases} +\infty > 1 & \text{dla } p > \frac{1}{e^\pi} \\ 0 < 1 & \text{dla } 0 < p < \frac{1}{e^\pi} \end{cases}$$

skąd na podstawie kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wnioskujemy, że szereg

ten jest rozbieżny dla $p > \frac{1}{e^\pi}$ oraz zbieżny dla $0 < p < \frac{1}{e^\pi}$. Dla $p = \frac{1}{e^\pi}$, zgodnie z warunkami zadania, nawet nie próbujemy rozstrzygać zbieżności szeregu.

Zadanie **13.** (DODATKOWE za 20 punktów)

Za rozważania, które nie prowadzą do rozwiązania, otrzymasz ZERO punktów.

Oblicz

$$\left[\sum_{n=32}^{100\,000} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \right] = \left[\frac{1}{\sqrt[5]{32}} + \frac{1}{\sqrt[5]{33}} + \frac{1}{\sqrt[5]{34}} + \frac{1}{\sqrt[5]{35}} + \frac{1}{\sqrt[5]{36}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[5]{99\,998}} + \frac{1}{\sqrt[5]{99\,999}} + \frac{1}{\sqrt[5]{100\,000}} \right],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\sum_{n=33}^{100\,000} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} < \int_{32}^{100\,000} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} < \sum_{n=32}^{100\,000-1} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}.$$

Lewa nierówność wynika z porównania pól zielonego i żółtego przedstawionych odpowiednio na rysunkach 1 i 2.

Prawa nierówność wynika z porównania pól żółtego i czerwonego przedstawionych odpowiednio na rysunkach 2 i 3.

Z powyższego oraz z równości

$$\int_{32}^{100\,000} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = \frac{5 \cdot x^{4/5}}{4} \Big|_{x=32}^{100\,000} = 12\,500 - 20 = 12\,480$$

wynikają nierówności

$$\sum_{n=33}^{100\,000} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} < 12\,480 < \sum_{n=32}^{100\,000-1} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}.$$

Zatem

$$\sum_{n=32}^{100\,000} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} = \frac{1}{2} + \sum_{n=33}^{100\,000} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} < 1 + 12\,480 = 12\,481$$

oraz

$$\sum_{n=32}^{100\,000} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} > \sum_{n=32}^{100\,000-1} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} > 12\,480.$$

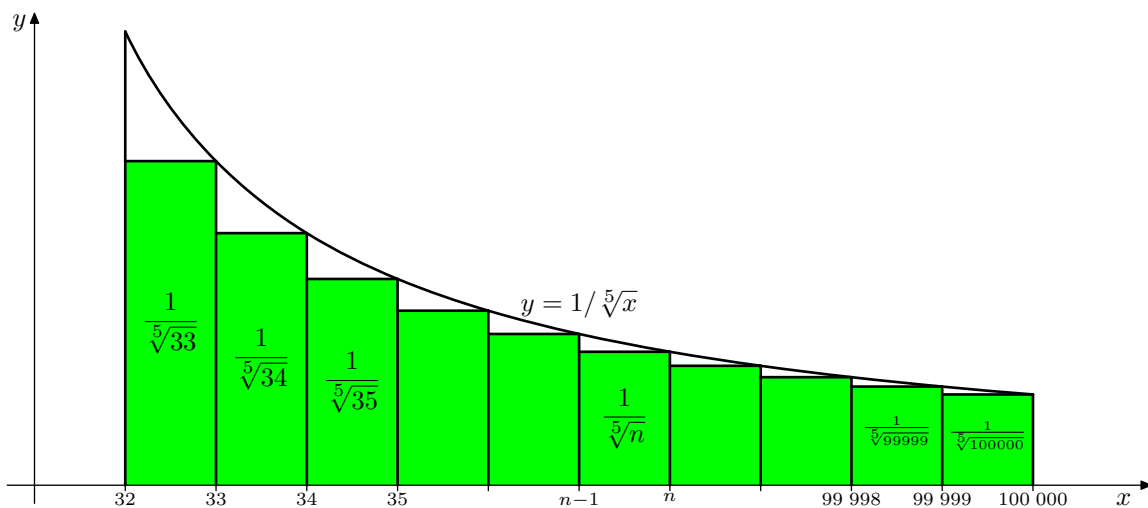
Ponieważ

$$12\,480 < \sum_{n=32}^{100\,000} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} < 12\,481,$$

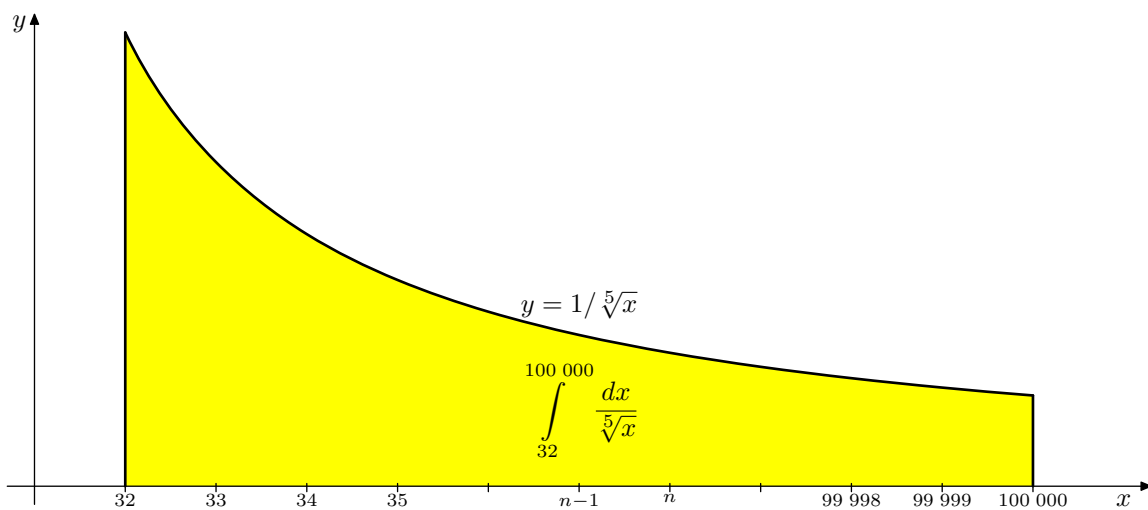
otrzymujemy

$$\left[\sum_{n=32}^{100\,000} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \right] = 12\,480.$$

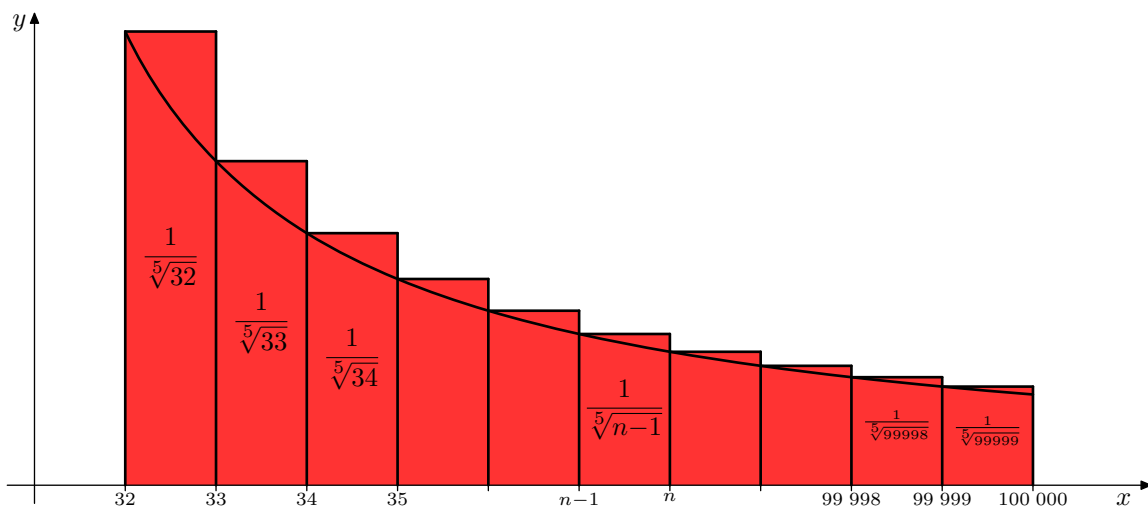
Odpowiedź: Dana w treści zadania liczba jest równa 12 480.



rys. 1



rys. 2



rys. 3