**Kolokwium 7** Wersja testu **A** 22 maja 2026 r.

**ANALIZA 2** 22 maja 2026 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

**W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.**

Zadania **11, 12 i 13** to zadania dodatkowe.

## Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

**Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.**
**Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:**
**np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.**

## Pisz czytelnie, nieczytelne litery, cyfry i NAWIASY NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

## Wzorki dla miłośników zadań dodatkowych:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

**1.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+4k^2}=\frac{\mathbf{ln5}}{\mathbf{8}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+4k^2}=\frac{\mathbf{ln17}}{\mathbf{8}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+5k^2}=\frac{\mathbf{ln6}}{\mathbf{10}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+5k^2}=\frac{\mathbf{ln21}}{\mathbf{10}}$

**2.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{n^3+5k^3}=\frac{\mathbf{ln41}}{\mathbf{15}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+5k^3}=\frac{\mathbf{ln6}}{\mathbf{15}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{n^3+4k^3}=\frac{\mathbf{ln33}}{\mathbf{12}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+4k^3}=\frac{\mathbf{ln5}}{\mathbf{12}}$

**3.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{10}n^{11}}{k^{22}+n^{22}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{44}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{9}n^{10}}{k^{20}+n^{20}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{40}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{12}n^{13}}{k^{26}+n^{26}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{52}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{11}n^{12}}{k^{24}+n^{24}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{48}}$

**4.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{12}}{k^{13}+n^{13}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{13}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{9}}{k^{10}+n^{10}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{10}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{10}}{k^{11}+n^{11}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{11}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{11}}{k^{12}+n^{12}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{12}}$

**5.** Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru $p$, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^6+x^2}\,dx$, $(\mathbf{1/2,\ 5/3})$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^7+x^3}\,dx$, $(\mathbf{1,\ 2})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^8+x^4}\,dx$, $(\mathbf{3/2,\ 7/3})$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^9+x^5}\,dx$, $(\mathbf{2,\ 8/3})$

**6.** Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru $p$, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^7+x^6}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $(\mathbf{3/2,\ 2})$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^6+x^5}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $(\mathbf{4/3,\ 7/4})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^5+x^4}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $(\mathbf{7/6,\ 3/2})$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^4+x^3}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $(\mathbf{1,\ 5/4})$

**7.** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=x^{11}\cdot e^{x^5}\,.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(66)}(0)=\frac{\mathbf{66!}}{\mathbf{11!}}$

b) $f^{(61)}(0)=\frac{\mathbf{61!}}{\mathbf{10!}}$

c) $f^{(76)}(0)=\frac{\mathbf{76!}}{\mathbf{13!}}$

d) $f^{(71)}(0)=\frac{\mathbf{71!}}{\mathbf{12!}}$

**8.** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=e^{x^4}+\ln\left(1+x^5\right)\,.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(50)}(0)=-\frac{\mathbf{50!}}{\mathbf{10}}$

b) $f^{(40)}(0)=\frac{\mathbf{40!}}{\mathbf{10!}}-\frac{\mathbf{40!}}{\mathbf{8}}$

c) $f^{(44)}(0)=\frac{\mathbf{44!}}{\mathbf{11!}}$

d) $f^{(45)}(0)=\frac{\mathbf{45!}}{\mathbf{9}}$

**9.** Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru $p$, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(p^2+p-1\right)^n$, $(\mathbf{-2,-1})\cup(\mathbf{0,1})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2+p+1\right)^n}{\sqrt[n]{n}}$, $(\mathbf{-1,0})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-p-1\right)^n}{n}$, $(\mathbf{-1,0}]\cup[\mathbf{1,2})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-p+1\right)^n}{n^2}$, $[\mathbf{0,1}]$

**10.** Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{8n}\cdot x^{8n}}{(8n)!}$, $\quad R=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{e}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{8n}\cdot x^{4n}}{(8n)!}$, $\quad R=\frac{\mathbf{64}}{\mathbf{e^2}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(8n)!\cdot x^{2n}}{n^{8n}}$, $\quad R=\frac{\mathbf{e^4}}{\mathbf{8^4}}=\frac{\mathbf{e^4}}{\mathbf{2^{12}}}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(8n)!\cdot x^{n}}{n^{8n}}$, $\quad R=\frac{\mathbf{e^8}}{\mathbf{8^8}}=\frac{\mathbf{e^8}}{\mathbf{2^{24}}}$

**11.** Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]$, gdzie $[\,.\,]$ to część całkowita. Wówczas:

a) $S(81)=\mathbf{16}$ b) $S(25)=\mathbf{8}$ c) $S(10\,000)=\mathbf{198}$ d) $S(1600)=\mathbf{78}$

**12.** Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[4]{k^3}}\right]$, gdzie $[\,.\,]$ to część całkowita. Wówczas:

a) $S(100\,000\,000)=\mathbf{396}$

b) $S(10\,000)=\mathbf{36}$

c) $S(160\,000)=\mathbf{76}$

d) $S(810\,000)=\mathbf{116}$

**13.** Podaj sumę szeregu.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-3n}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}+\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{3}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+n}=\mathbf{2}-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}-\mathbf{ln2}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-n}=-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}+\mathbf{ln2}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+3n}=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}-\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{3}}$

**Kolokwium 7** Wersja testu **B** 22 maja 2026 r.

**ANALIZA 2** 22 maja 2026 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

**W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.**

Zadania **11, 12 i 13** to zadania dodatkowe.

## Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

**Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.**
**Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:**
**np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.**

## Pisz czytelnie, nieczytelne litery, cyfry i NAWIASY NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

## Wzorki dla miłośników zadań dodatkowych:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2 \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

**1.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+5k^2}=\frac{\mathbf{ln6}}{\mathbf{10}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+4k^2}=\frac{\mathbf{ln17}}{\mathbf{8}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+4k^2}=\frac{\mathbf{ln5}}{\mathbf{8}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+5k^2}=\frac{\mathbf{ln21}}{\mathbf{10}}$

**2.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+4k^3}=\frac{\mathbf{ln5}}{\mathbf{12}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{n^3+4k^3}=\frac{\mathbf{ln33}}{\mathbf{12}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{n^3+5k^3}=\frac{\mathbf{ln41}}{\mathbf{15}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+5k^3}=\frac{\mathbf{ln6}}{\mathbf{15}}$

**3.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{12}n^{13}}{k^{26}+n^{26}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{52}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{10}n^{11}}{k^{22}+n^{22}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{44}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{9}n^{10}}{k^{20}+n^{20}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{40}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{11}n^{12}}{k^{24}+n^{24}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{48}}$

**4.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{12}}{k^{13}+n^{13}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{13}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{11}}{k^{12}+n^{12}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{12}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{10}}{k^{11}+n^{11}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{11}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{9}}{k^{10}+n^{10}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{10}}$

**5.** Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru $p$, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^8+x^4}\,dx$, $\mathbf{(3/2,\ 7/3)}$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^7+x^3}\,dx$, $\mathbf{(1,\ 2)}$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^6+x^2}\,dx$, $\mathbf{(1/2,\ 5/3)}$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^9+x^5}\,dx$, $\mathbf{(2,\ 8/3)}$

**6.** Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru $p$, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^4+x^3}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $\mathbf{(1,\ 5/4)}$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^5+x^4}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $\mathbf{(7/6,\ 3/2)}$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^7+x^6}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $\mathbf{(3/2,\ 2)}$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^6+x^5}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $\mathbf{(4/3,\ 7/4)}$

**7.** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=x^{11}\cdot e^{x^5}\,.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(76)}(0)=\dfrac{\mathbf{76!}}{\mathbf{13!}}$

b) $f^{(66)}(0)=\dfrac{\mathbf{66!}}{\mathbf{11!}}$

c) $f^{(61)}(0)=\dfrac{\mathbf{61!}}{\mathbf{10!}}$

d) $f^{(71)}(0)=\dfrac{\mathbf{71!}}{\mathbf{12!}}$

**8.** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=e^{x^4}+\ln\left(1+x^5\right)\,.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(50)}(0)=-\dfrac{\mathbf{50!}}{\mathbf{10}}$

b) $f^{(45)}(0)=\dfrac{\mathbf{45!}}{\mathbf{9}}$

c) $f^{(44)}(0)=\dfrac{\mathbf{44!}}{\mathbf{11!}}$

d) $f^{(40)}(0)=\dfrac{\mathbf{40!}}{\mathbf{10!}}-\dfrac{\mathbf{40!}}{\mathbf{8}}$

**9.** Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru $p$, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-p-1\right)^n}{n}$, $(\mathbf{-1},\mathbf{0}]\cup[\mathbf{1},\mathbf{2})$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2+p+1\right)^n}{\sqrt[n]{n}}$, $(\mathbf{-1},\mathbf{0})$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(p^2+p-1\right)^n$, $(\mathbf{-2},\mathbf{-1})\cup(\mathbf{0},\mathbf{1})$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-p+1\right)^n}{n^2}$, $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$

**10.** Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8n)!\cdot x^n}{n^{8n}}$, $\quad R=\frac{\mathbf{e^8}}{\mathbf{8^8}}=\frac{\mathbf{e^8}}{\mathbf{2^{24}}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8n)!\cdot x^{2n}}{n^{8n}}$, $\quad R=\frac{\mathbf{e^4}}{\mathbf{8^4}}=\frac{\mathbf{e^4}}{\mathbf{2^{12}}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{8n}\cdot x^{8n}}{(8n)!}$, $\quad R=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{e}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{8n}\cdot x^{4n}}{(8n)!}$, $\quad R=\frac{\mathbf{64}}{\mathbf{e^2}}$

**11.** Niech $S(n)=\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]$, gdzie $[\,.\,]$ to część całkowita. Wówczas:

a) $S(10\,000)=\mathbf{198}$ b) $S(81)=\mathbf{16}$ c) $S(25)=\mathbf{8}$ d) $S(1600)=\mathbf{78}$

**12.** Niech $S(n)=\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[4]{k^3}}\right]$, gdzie $[\,.\,]$ to część całkowita. Wówczas:

a) $S(100\,000\,000)=\mathbf{396}$

b) $S(810\,000)=\mathbf{116}$

c) $S(160\,000)=\mathbf{76}$

d) $S(10\,000)=\mathbf{36}$

**13.** Podaj sumę szeregu.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+3n}=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}-\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{3}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+n}=\mathbf{2}-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}-\mathbf{ln2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-n}=-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}+\mathbf{ln2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-3n}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}+\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{3}}$

**Kolokwium 7** Wersja testu **C** 22 maja 2026 r.

**ANALIZA 2** 22 maja 2026 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

**W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.**

Zadania **11, 12 i 13** to zadania dodatkowe.

## Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

**Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.**
**Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:**
**np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.**

## Pisz czytelnie, nieczytelne litery, cyfry i NAWIASY NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

## Wzorki dla miłośników zadań dodatkowych:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

**1.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+5k^2}=\frac{\mathbf{ln6}}{\mathbf{10}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+4k^2}=\frac{\mathbf{ln5}}{\mathbf{8}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+5k^2}=\frac{\mathbf{ln21}}{\mathbf{10}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+4k^2}=\frac{\mathbf{ln17}}{\mathbf{8}}$

**2.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{n^3+5k^3}=\frac{\mathbf{ln41}}{\mathbf{15}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{n^3+4k^3}=\frac{\mathbf{ln33}}{\mathbf{12}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+4k^3}=\frac{\mathbf{ln5}}{\mathbf{12}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+5k^3}=\frac{\mathbf{ln6}}{\mathbf{15}}$

**3.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^9n^{10}}{k^{20}+n^{20}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{40}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{10}n^{11}}{k^{22}+n^{22}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{44}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{12}n^{13}}{k^{26}+n^{26}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{52}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{11}n^{12}}{k^{24}+n^{24}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{48}}$

**4.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{12}}{k^{13}+n^{13}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{13}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{10}}{k^{11}+n^{11}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{11}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{11}}{k^{12}+n^{12}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{12}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{9}}{k^{10}+n^{10}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{10}}$

**5.** Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru $p$, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^8+x^4}\,dx$, $\mathbf{(3/2,\ 7/3)}$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^6+x^2}\,dx$, $\mathbf{(1/2,\ 5/3)}$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^9+x^5}\,dx$, $\mathbf{(2,\ 8/3)}$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^7+x^3}\,dx$, $\mathbf{(1,\ 2)}$

**6.** Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru $p$, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^7+x^6}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $\mathbf{(3/2,\ 2)}$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^5+x^4}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $\mathbf{(7/6,\ 3/2)}$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^4+x^3}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $\mathbf{(1,\ 5/4)}$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^6+x^5}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $\mathbf{(4/3,\ 7/4)}$

**7.** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=x^{11}\cdot e^{x^5}\,.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(61)}(0)=\dfrac{\mathbf{61!}}{\mathbf{10!}}$

b) $f^{(66)}(0)=\dfrac{\mathbf{66!}}{\mathbf{11!}}$

c) $f^{(76)}(0)=\dfrac{\mathbf{76!}}{\mathbf{13!}}$

d) $f^{(71)}(0)=\dfrac{\mathbf{71!}}{\mathbf{12!}}$

**8.** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=e^{x^4}+\ln\left(1+x^5\right)\,.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(50)}(0)=-\dfrac{\mathbf{50!}}{\mathbf{10}}$

b) $f^{(44)}(0)=\dfrac{\mathbf{44!}}{\mathbf{11!}}$

c) $f^{(45)}(0)=\dfrac{\mathbf{45!}}{\mathbf{9}}$

d) $f^{(40)}(0)=\dfrac{\mathbf{40!}}{\mathbf{10!}}-\dfrac{\mathbf{40!}}{\mathbf{8}}$

**9.** Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru $p$, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-p-1\right)^n}{n}$, $(\mathbf{-1,0}]\cup[\mathbf{1,2})$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(p^2+p-1\right)^n$, $(\mathbf{-2,-1})\cup(\mathbf{0,1})$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-p+1\right)^n}{n^2}$, $[\mathbf{0,1}]$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2+p+1\right)^n}{\sqrt[n]{n}}$, $(\mathbf{-1,0})$

**10.** Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{8n}\cdot x^{8n}}{(8n)!}$, $\quad R=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{e}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8n)!\cdot x^{2n}}{n^{8n}}$, $\quad R=\frac{\mathbf{e^4}}{\mathbf{8^4}}=\frac{\mathbf{e^4}}{\mathbf{2^{12}}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8n)!\cdot x^{n}}{n^{8n}}$, $\quad R=\frac{\mathbf{e^8}}{\mathbf{8^8}}=\frac{\mathbf{e^8}}{\mathbf{2^{24}}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{8n}\cdot x^{4n}}{(8n)!}$, $\quad R=\frac{\mathbf{64}}{\mathbf{e^2}}$

**11.** Niech $S(n)=\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]$, gdzie $[\,.\,]$ to część całkowita. Wówczas:

a) $S(25)=\mathbf{8}$ b) $S(81)=\mathbf{16}$ c) $S(10\,000)=\mathbf{198}$ d) $S(1600)=\mathbf{78}$

**12.** Niech $S(n)=\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[4]{k^3}}\right]$, gdzie $[\,.\,]$ to część całkowita. Wówczas:

a) $S(100\,000\,000)=\mathbf{396}$

b) $S(160\,000)=\mathbf{76}$

c) $S(810\,000)=\mathbf{116}$

d) $S(10\,000)=\mathbf{36}$

**13.** Podaj sumę szeregu.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-n}=-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}+\mathbf{ln2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-3n}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}+\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{3}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+3n}=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}-\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{3}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+n}=\mathbf{2}-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}-\mathbf{ln2}$

**Kolokwium 7** Wersja testu **D** 22 maja 2026 r.

**ANALIZA 2** 22 maja 2026 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

**W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.**

Zadania **11, 12 i 13** to zadania dodatkowe.

## Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

**Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.**
**Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:**
**np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.**

## Pisz czytelnie, nieczytelne litery, cyfry i NAWIASY NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

## Wzorki dla miłośników zadań dodatkowych:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

**Kolokwium 7** Wersja testu **D** 22 maja 2026 r.

**1.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+4k^2}=\mathbf{\frac{ln5}{8}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+5k^2}=\mathbf{\frac{ln21}{10}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+4k^2}=\mathbf{\frac{ln17}{8}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+5k^2}=\mathbf{\frac{ln6}{10}}$

**2.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{n^3+5k^3}=\mathbf{\frac{ln41}{15}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+4k^3}=\mathbf{\frac{ln5}{12}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+5k^3}=\mathbf{\frac{ln6}{15}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{n^3+4k^3}=\mathbf{\frac{ln33}{12}}$

**3.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{12}n^{13}}{k^{26}+n^{26}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{52}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{10}n^{11}}{k^{22}+n^{22}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{44}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{11}n^{12}}{k^{24}+n^{24}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{48}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{9}n^{10}}{k^{20}+n^{20}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{40}}$

**4.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{12}}{k^{13}+n^{13}}=\mathbf{\frac{ln2}{13}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{11}}{k^{12}+n^{12}}=\mathbf{\frac{ln2}{12}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{9}}{k^{10}+n^{10}}=\mathbf{\frac{ln2}{10}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{10}}{k^{11}+n^{11}}=\mathbf{\frac{ln2}{11}}$

**Kolokwium 7** Wersja testu **D** 22 maja 2026 r.

**5.** Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru $p$, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^6+x^2}\,dx$, $\mathbf{(1/2,\ 5/3)}$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^9+x^5}\,dx$, $\mathbf{(2,\ 8/3)}$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^7+x^3}\,dx$, $\mathbf{(1,\ 2)}$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^8+x^4}\,dx$, $\mathbf{(3/2,\ 7/3)}$

**6.** Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru $p$, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^7+x^6}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $\mathbf{(3/2,\ 2)}$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^4+x^3}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $\mathbf{(1,\ 5/4)}$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^6+x^5}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $\mathbf{(4/3,\ 7/4)}$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^5+x^4}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $\mathbf{(7/6,\ 3/2)}$

**7.** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=x^{11}\cdot e^{x^5}\,.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(76)}(0)=\mathbf{\dfrac{76!}{13!}}$

b) $f^{(66)}(0)=\mathbf{\dfrac{66!}{11!}}$

c) $f^{(71)}(0)=\mathbf{\dfrac{71!}{12!}}$

d) $f^{(61)}(0)=\mathbf{\dfrac{61!}{10!}}$

**8.** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=e^{x^4}+\ln\left(1+x^5\right)\,.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(50)}(0)=\mathbf{-\dfrac{50!}{10}}$

b) $f^{(45)}(0)=\mathbf{\dfrac{45!}{9}}$

c) $f^{(40)}(0)=\mathbf{\dfrac{40!}{10!}-\dfrac{40!}{8}}$

d) $f^{(44)}(0)=\mathbf{\dfrac{44!}{11!}}$

**9.** Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru $p$, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(p^2+p-1\right)^n$, $(\mathbf{-2,-1})\cup(\mathbf{0,1})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-p+1\right)^n}{n^2}$, $[\mathbf{0,1}]$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2+p+1\right)^n}{\sqrt[n]{n}}$, $(\mathbf{-1,0})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-p-1\right)^n}{n}$, $(\mathbf{-1,0}]\cup[\mathbf{1,2})$

**10.** Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{8n}\cdot x^{8n}}{(8n)!}$, $\quad R=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{e}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(8n)!\cdot x^{n}}{n^{8n}}$, $\quad R=\frac{\mathbf{e^8}}{\mathbf{8^8}}=\frac{\mathbf{e^8}}{\mathbf{2^{24}}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{8n}\cdot x^{4n}}{(8n)!}$, $\quad R=\frac{\mathbf{64}}{\mathbf{e^2}}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(8n)!\cdot x^{2n}}{n^{8n}}$, $\quad R=\frac{\mathbf{e^4}}{\mathbf{8^4}}=\frac{\mathbf{e^4}}{\mathbf{2^{12}}}$

**11.** Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]$, gdzie $[\,.\,]$ to część całkowita. Wówczas:

a) $S(10\,000)=\mathbf{198}$ b) $S(81)=\mathbf{16}$ c) $S(1600)=\mathbf{78}$ d) $S(25)=\mathbf{8}$

**12.** Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[4]{k^3}}\right]$, gdzie $[\,.\,]$ to część całkowita. Wówczas:

a) $S(100\,000\,000)=\mathbf{396}$

b) $S(810\,000)=\mathbf{116}$

c) $S(10\,000)=\mathbf{36}$

d) $S(160\,000)=\mathbf{76}$

**13.** Podaj sumę szeregu.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-n}=\mathbf{-\frac{\pi}{2}+\ln 2}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-3n}=\mathbf{\frac{2}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\ln 2}{3}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+n}=\mathbf{2-\frac{\pi}{2}-\ln 2}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+3n}=\mathbf{-\frac{4}{9}+\frac{\pi}{6}-\frac{\ln 2}{3}}$