Kolokwium 7 Wersja testu **A** 22 maja 2026 r.

ANALIZA 2 22 maja 2026 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **11, 12 i 13** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.
Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery, cyfry i NAWIASY NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Wzorki dla miłośników zadań dodatkowych:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Kolokwium 7 Wersja testu **A** 22 maja 2026 r.

1. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+4k^2} =$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+4k^2} =$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+5k^2} =$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+5k^2} =$ ....

2. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{n^3+5k^3} =$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+5k^3} =$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{n^3+4k^3} =$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+4k^3} =$ ....

3. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{10}n^{11}}{k^{22}+n^{22}} =$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{9}n^{10}}{k^{20}+n^{20}} =$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{12}n^{13}}{k^{26}+n^{26}} =$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{11}n^{12}}{k^{24}+n^{24}} =$ ....

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{12}}{k^{13}+n^{13}} =$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{9}}{k^{10}+n^{10}} =$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{10}}{k^{11}+n^{11}} =$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{11}}{k^{12}+n^{12}} =$ ....

5. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^6+x^2}\,dx,$ ....

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^7+x^3}\,dx,$ ....

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^8+x^4}\,dx,$ ....

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3p}+x^{2p}}{x^9+x^5}\,dx,$ ....

6. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^7+x^6}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx,$ ....

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^6+x^5}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx,$ ....

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^5+x^4}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx,$ ....

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^4+x^3}}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx,$ ....

7. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=x^{11}\cdot e^{x^5}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(66)}(0)=$ ....

b) $f^{(61)}(0)=$ ....

c) $f^{(76)}(0)=$ ....

d) $f^{(71)}(0)=$ ....

8. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=e^{x^4}+\ln\left(1+x^5\right).$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(50)}(0)=$ ....

b) $f^{(40)}(0)=$ ....

c) $f^{(44)}(0)=$ ....

d) $f^{(45)}(0)=$ ....

9. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(p^2+p-1\right)^n$, ...

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2+p+1\right)^n}{\sqrt[n]{n}}$, ...

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-p-1\right)^n}{n}$, ...

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-p+1\right)^n}{n^2}$, ...

10. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{8n}\cdot x^{8n}}{(8n)!}$, $R=$ ....

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{8n}\cdot x^{4n}}{(8n)!}$, $R=$ ....

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8n)!\cdot x^{2n}}{n^{8n}}$, $R=$ ....

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8n)!\cdot x^{n}}{n^{8n}}$, $R=$ ....

11. Niech $S(n)=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]$, gdzie $[\,.\,]$ to część całkowita. Wówczas:

a) $S(81)=\ldots$ b) $S(25)=\ldots$ c) $S(10\,000)=\ldots$ d) $S(1600)=\ldots$

12. Niech $S(n)=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[4]{k^3}}\right]$, gdzie $[\,.\,]$ to część całkowita. Wówczas:

a) $S(100\,000\,000)=$ ....

b) $S(10\,000)=$ ....

c) $S(160\,000)=$ ....

d) $S(810\,000)=$ ....

13. Podaj sumę szeregu.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-3n}=$ ....

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+n}=$ ....

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-n}=$ ....

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+3n}=$ ....