ANALIZA 2 12 czerwca 2026 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.
Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery, cyfry i NAWIASY NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+6k^2}=\frac{\mathbf{ln5}}{\mathbf{6}}$

b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+6k^2}=\frac{\mathbf{ln7}}{\mathbf{12}}$

c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+7k^2}=\frac{\mathbf{ln8}}{\mathbf{14}}$

d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+7k^2}=\frac{\mathbf{ln29}}{\mathbf{14}}$

2. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{n^3+6k^3}=\frac{\mathbf{ln7}}{\mathbf{9}}$

b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+7k^3}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{7}}$

c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+6k^3}=\frac{\mathbf{ln7}}{\mathbf{18}}$

d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{n^3+7k^3}=\frac{\mathbf{ln57}}{\mathbf{21}}$

3. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{21}n^{22}}{k^{44}+n^{44}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{88}}$

b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{20}n^{21}}{k^{42}+n^{42}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{84}}$

c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{22}n^{23}}{k^{46}+n^{46}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{92}}$

d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{19}n^{20}}{k^{40}+n^{40}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{80}}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{20}}{k^{21}+n^{21}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{21}}$

b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{21}}{k^{22}+n^{22}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{22}}$

c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{22}}{k^{23}+n^{23}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{23}}$

d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{19}}{k^{20}+n^{20}}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{20}}$

5. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^5+x^4}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $(\mathbf{2, 5/2})$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{x^4+x^3}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $(\mathbf{5/3, 2})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{x^6+x^5}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $(\mathbf{7/3, 3})$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{x^7+x^6}{x^{3p}+x^{2p}}\,dx$, $(\mathbf{8/3, 7/2})$

6. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{x^7+x^4}\,dx$, $(\mathbf{3, 4})$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{x^8+x^5}\,dx$, $(\mathbf{4, 14/3})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{x^6+x^3}\,dx$, $(\mathbf{2, 10/3})$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{x^9+x^6}\,dx$, $(\mathbf{5, 16/3})$

7. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=x^{11}\cdot\ln\left(1+x^5\right).$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(71)}(0)=-\frac{\mathbf{71!}}{\mathbf{12}}$

b) $f^{(66)}(0)=\frac{\mathbf{66!}}{\mathbf{11}}$

c) $f^{(76)}(0)=\frac{\mathbf{76!}}{\mathbf{13}}$

d) $f^{(61)}(0)=-\frac{\mathbf{61!}}{\mathbf{10}}$

8. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem
$$f(x)=e^{x^6}+e^{x^5}.$$
Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(65)}(0)=\mathbf{\dfrac{65!}{13!}}$

b) $f^{(60)}(0)=\mathbf{\dfrac{60!}{10!}}+\mathbf{\dfrac{60!}{12!}}$

c) $f^{(66)}(0)=\mathbf{\dfrac{66!}{11!}}$

d) $f^{(90)}(0)=\mathbf{\dfrac{90!}{15!}}+\mathbf{\dfrac{90!}{18!}}$

9. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2p^2-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$, $\mathbf{(-1,0)\cup(0,1)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(4p^2-1)^n}{n}$, $\mathbf{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(p^2-1\right)^n$, $\mathbf{\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(8p^2-1)^n}{n^2}$, $\mathbf{\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]}$

10. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{8n}\cdot x^{12n}}{(8n)!}$, $R=\mathbf{\dfrac{4}{e^{2/3}}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(8n)!\cdot x^{6n}}{n^{8n}}$, $R=\mathbf{\dfrac{e^{4/3}}{16}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{8n}\cdot x^{24n}}{(8n)!}$, $R=\mathbf{\dfrac{2}{\sqrt[3]{e}}}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(8n)!\cdot x^{3n}}{n^{8n}}$, $R=\mathbf{\dfrac{e^{8/3}}{256}}$