Kolokwium 9 Wersja testu **A** 12 czerwca 2026 r.

ANALIZA 2 12 czerwca 2026 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **11,12 i 13** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.
Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery, cyfry i NAWIASY NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$g(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx = 2\pi \cdot a_0 \cdot c_0 + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot c_n + b_n \cdot d_n)$$

1. Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+2}$, $\|f\|=$ ....

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^4+x^2+3}$, $\|f\|=$ ....

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^6+x^3+4}$, $\|f\|=$ ....

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^8-x^4+5}$, $\|f\|=$ ....

2. Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\dfrac{1}{4^x-2^{x+3}+19}$, $\|f\|=$ ....

b) $f(x)=\dfrac{1}{4^x-2^{x+2}+13}$, $\|f\|=$ ....

c) $f(x)=\dfrac{1}{4^x-2^{x+1}+7}$, $\|f\|=$ ....

d) $f(x)=\dfrac{1}{4^x-2^x+1}$, $\|f\|=$ ....

3. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)+\operatorname{arctg}w=\frac{\pi}{4}\,.$$

a) $n=3$, $w=$ .... b) $n=2$, $w=$ ....

c) $n=5$, $w=$ .... d) $n=4$, $w=$ ....

4. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że

$$\operatorname{arctg}(n)+\operatorname{arctg}w=\frac{3\pi}{4}\,.$$

a) $n=5$, $w=$ .... b) $n=2$, $w=$ ....

c) $n=3$, $w=$ .... d) $n=4$, $w=$ ....

5. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(2,3)=$ .... b) $C(3,7)=$ ....

c) $C(3,9)=$ .... d) $C(3,11)=$ ....

6. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k\cdot\sin kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(5,11)=$ .... b) $C(3,9)=$ ....

c) $C(5,9)=$ .... d) $C(3,7)=$ ....

7. Jeżeli $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}\cdot\cos kx\right)$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$, to:

a) $C(10,30)=$ .... b) $C(9,20)=$ ....

c) $C(20,70)=$ .... d) $C(19,50)=$ ....

8. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{\sin kx}{2^k}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(2,2)=$ .... b) $C(1,2)=$ ....

c) $C(2,3)=$ .... d) $C(1,3)=$ ....

9. Podaj w postaci kartezjańskiej sumę szeregu o wyrazach zespolonych.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4i)^n}=$ .... b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6i)^n}=$ ....

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5i)^n}=$ .... d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(8i)^n}=$ ....

10. Podaj w postaci kartezjańskiej sumę szeregu o wyrazach zespolonych.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+i}-\frac{n+1}{n+1+i}\right)=$ ....

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+i}-\frac{n+1}{2n+2+i}\right)=$ ....

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+i}-\frac{n+1}{3n+3+i}\right)=$ ....

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{5n+i}-\frac{n+1}{5n+5+i}\right)=$ ....

11. Niech $\displaystyle I(n)=\int_0^1\frac{dx}{x+\sqrt[n]{x}}$. Wówczas:

a) $I(32)=$ .... b) $I(27)=$ ....

c) $I(25)=$ .... d) $I(16)=$ ....

12. Wiedząc, że $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}=\frac{\pi}{3}$ podaj wartość całki

a) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{64x^6+1}=$ .... b) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^6+64}=$ ....

c) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{4x^6+1}=$ .... d) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{8x^6+1}=$ ....

13. Niech $\displaystyle f_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k+n}$ oraz $\displaystyle C(m,n)=\int_0^{2\pi}f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(0,4)=$ .... b) $C(0,1)=$ ....

c) $C(0,2)=$ .... d) $C(0,3)=$ ....