

Kolokwium nr 1: piątek 27.02.2026, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 889–917.

Zadania do omówienia¹ na ćwiczeniach we wtorek 24.02.2026.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami

Odgadywanie funkcji o podanej pochodnej.

W zadaniach z tej listy nie używać całek, a w szczególności nie używać całkowania przez części ani całkowania przez podstawienie !!!

Odgadnąć wzór na funkcję różniczkowalną $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, której pochodna jest dana wzorem:

889. $f'(x) = x^3, \quad D_f = \mathbb{R}$

890. $f'(x) = 10x^4, \quad D_f = \mathbb{R}$

891. $f'(x) = \sqrt{x}, \quad D_f = (0, +\infty)$

892. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad D_f = (0, +\infty)$

893. $f'(x) = \frac{1}{x^4}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

894. $f'(x) = \frac{1}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

895. $f'(x) = e^{7x}, \quad D_f = \mathbb{R}$

896. $f'(x) = \sin 66x, \quad D_f = \mathbb{R}$

897. $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad D_f = \mathbb{R}$

898. $f'(x) = (x + 1)^3, \quad D_f = \mathbb{R}$

899. $f'(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad D_f = \mathbb{R}$

900. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje n -krotnie różniczkowalne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

901. Funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a ponadto wiadomo, że $f(1) = 0$. Co można wywnioskować o $f(2)$ oraz o $f(-1)$?

902. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f(2) = 0$.

903. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f(-2) = 0$.

904. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2025-krotnie różniczkowalne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f^{(2025)}(x) = e^{3x}$.

905. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2025-krotnie różniczkowalne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f^{(2025)}(x) = \sin^2 x$.

906. Dane są funkcje różniczkowalne $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. **Zapamiętać to zadanie, gdyż będzie wykorzystywane na wykładzie.**

907. Dane są funkcje różniczkowalne $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. **Zapamiętać to zadanie, gdyż będzie wykorzystywane na wykładzie.**

¹Zadania podobne do wcześniejszych będą pominięte.

908. Dana jest funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\rightarrow(0,+\infty)$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

909. Dana jest funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x)=f'(x)\cdot f(x)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

910. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{los} x=\operatorname{nos} x,\qquad \frac{d}{dx}\operatorname{nos} x=\operatorname{sos} x,\qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sos} x=\operatorname{los} x.$$

Wyznaczyć wszystkie funkcje 2025-krotnie różniczkowalne $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x\in\mathbb{R}$ warunek $f^{(2025)}(x)=\operatorname{los}(2025x)$.

911. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, różniczkowalne na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, spełniające dla każdego $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ warunek $f'(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$.

912. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, które są dwukrotnie różniczkowalne na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ i spełniają dla każdego $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ warunek $f''(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$. Wskazać wśród nich funkcję spełniającą dodatkowy warunek $f(-1)=f(1)=f(4)=0$.

913. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, trzykrotnie różniczkowalne na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, spełniające dla każdego $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ warunek $f'''(x)=x$. Które z nich są ciągłe? Różniczkowalne? Dwukrotnie różniczkowalne? Trzykrotnie różniczkowalne?

914. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=6x+6\qquad\text{dla}\qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=x$ dla $x\in\{-1,0,2\}$. Wyznaczyć $f(3)$.

915. Funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$f'(x)=\sqrt{x^4-8x^2+16}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(-3)=-3$. Wyznaczyć $f(3)$.

916. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=|x|.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=0$ dla $x\in\{1,2\}$. Wyznaczyć $f(-1)$.

917. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ jest różniczkowalna, a jej pochodna jest dana wzorem

$$f'(x)=\left|x-x^3\right|.$$

Ponadto wiadomo, że $f(-2)=-2$. Wyznaczyć $f(2)$.