

914. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=6x+6\qquad\text{dla}\qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=x$ dla $x\in\{-1,0,2\}$. Wyznaczyć $f(3)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3+3x^2\right)=6x+6,$$

a funkcjami o drugiej pochodnej równej 0 są funkcje liniowe, funkcja f na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}x^3+3x^2+Ax+B & \text{dla } x\in(-\infty,1)\\x^3+3x^2+Cx+D & \text{dla } x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 1 wymaga istnienia granicy w tym punkcie, czyli zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x=1$. Musi więc zachodzić równość

$$A+B=C+D.\tag{♣}$$

Warunki $f(x)=x$ dla $x\in\{-1,0,2\}$ sprowadzają się odpowiednio do

$$-1=2-A+B,\tag{◇}$$

$$0=B,\tag{♡}$$

$$2=20+2C+D.\tag{♠}$$

Rozwiązanie układu otrzymanych czterech równań (♣), (◇), (♡) i (♠) prowadzi do

$$A=3,\qquad B=0,\qquad C=-21,\qquad D=24.$$

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases}x^3+3x^2+3x & \text{dla } x\in(-\infty,1)\\x^3+3x^2-21x+24 & \text{dla } x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

Zatem $f(3)=15$.

915. Funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$f'(x)=\sqrt{x^4-8x^2+16}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(-3)=-3$. Wyznaczyć $f(3)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f'(x)=\sqrt{x^4-8x^2+16}=\sqrt{(x^2-4)^2}=|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4 & \text{dla } x\in(-\infty,-2)\\4-x^2 & \text{dla } x\in[-2,2)\\x^2-4 & \text{dla } x\in[2,+\infty)\end{cases}$$

Wobec tego

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}-4x+C_1 & \text{dla } x\in(-\infty,-2) \\ 4x-\frac{x^3}{3}+C_2 & \text{dla } x\in[-2,2) \\ \frac{x^3}{3}-4x+C_3 & \text{dla } x\in[2,+\infty) \end{cases}$$

Ciągłość tak określonej funkcji f w punktach -2 oraz 2 wymaga odpowiednio spełnienia następujących równości:

$$\frac{x^3}{3}-4x+C_1=4x-\frac{x^3}{3}+C_2 \quad \text{dla } x=-2, \quad \text{czyli} \quad \frac{16}{3}+C_1=-\frac{16}{3}+C_2$$

oraz

$$4x-\frac{x^3}{3}+C_2=\frac{x^3}{3}-4x+C_3 \quad \text{dla } x=2, \quad \text{czyli} \quad \frac{16}{3}+C_2=-\frac{16}{3}+C_3.$$

Ponadto równość $f(-3)=-3$ prowadzi do

$$\frac{x^3}{3}-4x+C_1=-3 \quad \text{dla } x=-3, \quad \text{skąd} \quad C_1=-6.$$

W konsekwencji

$$C_2=C_1+\frac{32}{3}=\frac{14}{3} \quad \text{oraz} \quad C_3=C_2+\frac{32}{3}=\frac{46}{3}.$$

Zatem

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}-4x-6 & \text{dla } x\in(-\infty,-2) \\ 4x-\frac{x^3}{3}+\frac{14}{3} & \text{dla } x\in[-2,2) \\ \frac{x^3}{3}-4x+\frac{46}{3} & \text{dla } x\in[2,+\infty) \end{cases}$$

Ostatecznie

$$f(3)=\frac{3^3}{3}-4\cdot 3+\frac{46}{3}=\frac{37}{3}.$$

916. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=|x|.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=0$ dla $x\in\{1,2\}$. Wyznaczyć $f(-1)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f''(x)=\begin{cases} -x & \text{dla } x\in(-\infty,0] \\ x & \text{dla } x\in[0,+\infty) \end{cases}$$

Wobec tego

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + C_1 & \text{dla } x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x^2}{2} + C_2 & \text{dla } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Przy tym musi być $C_1 = C_2$, aby powyższa funkcja była poprawnie określona i ciągła w $x = 0$. Niech więc $C = C_1 = C_2$.

Otrzymujemy

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{6} + Cx + D_1 & \text{dla } x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x^3}{6} + Cx + D_2 & \text{dla } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Podobnie jak poprzednio, musi być $D_1 = D_2$, aby powyższa funkcja była poprawnie określona i ciągła w $x = 0$. Niech dalej $D = D_1 = D_2$.

Ostatecznie

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{6} + Cx + D & \text{dla } x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x^3}{6} + Cx + D & \text{dla } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

lub krócej

$$f(x) = \frac{|x|^3}{6} + Cx + D.$$

Warunki $f(1) = f(2) = 0$ pozwalają wyznaczyć stałe C i D :

$$\begin{cases} \frac{1}{6} + C + D &= 0 \\ \frac{8}{6} + 2C + D &= 0 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań dostajemy $C = -7/6$ oraz $D = 1$.

W konsekwencji

$$f(x) = \frac{|x|^3}{6} - \frac{7x}{6} + 1 \qquad \text{oraz} \qquad f(-1) = \frac{1}{6} + \frac{7}{6} + 1 = \frac{7}{3}.$$

917. Funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, a jej pochodna jest dana wzorem

$$f'(x) = |x - x^3|.$$

Ponadto wiadomo, że $f(-2) = -2$. Wyznaczyć $f(2)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f'(x) = \begin{cases} x - x^3 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ x^3 - x & \text{dla } x \in [-1, 0) \\ x - x^3 & \text{dla } x \in [0, 1) \\ x^3 - x & \text{dla } x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Wobec tego

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+C_1 & \text{dla } x\in(-\infty,-1) \\ \frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+C_2 & \text{dla } x\in[-1,0) \\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+C_3 & \text{dla } x\in[0,1) \\ \frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+C_4 & \text{dla } x\in[1,+\infty) \end{cases}$$

Aby powyższa funkcja była poprawnie określona i ciągła w $x=-1$, $x=0$ i $x=1$ muszą zachodzić równości:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+C_1 &= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}+C_2 & (x=-1) \\ C_2 &= C_3 & (x=0) \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+C_3 &= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}+C_4 & (x=1) \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} \frac{1}{2}+C_1 &= C_2 \\ C_2 &= C_3 \\ \frac{1}{2}+C_3 &= C_4 \end{cases}$$

Ponadto warunek $f(-2)=-2$ prowadzi do równości

$$-2=f(-2)=\frac{4}{2}-\frac{16}{4}+C_1=2-4+C_1=-2+C_1,$$

skąd $C_1=0$ i w konsekwencji $C_2=C_3=1/2$ oraz $C_4=1$.

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4} & \text{dla } x\in(-\infty,-1) \\ \frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2} & \text{dla } x\in[-1,0) \\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2} & \text{dla } x\in[0,1) \\ \frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+1 & \text{dla } x\in[1,+\infty) \end{cases}$$

Zatem

$$f(2)=\frac{16}{4}-\frac{4}{2}+C_4=4-2+1=3.$$

Odpowiedź: $f(2)=3$.