

W każdym z poniższych 20 zadań podaj wzór na funkcję różniczkowalną na całej prostej (lub w podanej dziedzinie) o podanym wzorze na pochodną oraz o podanej wartości w podanym punkcie.

918.	$f'(x) = (4x - 5)^{54}$	$f(1) = 1$	$f(x) = \frac{(4x - 5)^{55}}{220} + \frac{221}{220}$
919.	$f'(x) = \sqrt{3x + 1}$	$f(1) = 1$	$D_f = \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ $f(x) = \frac{2}{9} \cdot (3x + 1)^{3/2} - \frac{7}{9}$
920.	$f'(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^4}$	$f(1) = 1$	$f(x) = \frac{-1}{6 \cdot (x^2 + 1)^3} + \frac{49}{48}$
921.	$f'(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$	$f(0) = 7$	$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln(x^4 + 1) + 7$
922.	$f'(x) = \frac{1}{(3x - 5)^2 + 1}$	$f(2) = 0$	$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg}(3x - 5) - \frac{\pi}{12}$
923.	$f'(x) = \sqrt[5]{x}$	$f(1) = 1$	$f(x) = \frac{5x^{6/5}}{6} + \frac{1}{6}$
924.	$f'(x) = 200x \cdot (x^2 + 1)^{99}$	$f(0) = 0$	$f(x) = (x^2 + 1)^{100} - 1$
925.	$f'(x) = 6x^3 \cdot \sqrt{x^4 + 9}$	$f(2) = 2$	$f(x) = (x^4 + 9)^{3/2} - 123$
926.	$f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$	$f(-1) = -1$	$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - 1$
927.	$f'(x) = \frac{4x^3 + 2x + 1}{(x^4 + x^2 + x + 1)^2}$	$f(1) = 1$	$f(x) = -\frac{1}{x^4 + x^2 + x + 1} + \frac{5}{4}$
928.	$f'(x) = \sqrt[7]{x + 1}$	$f(0) = 2$	$f(x) = \frac{7(x + 1)^{8/7}}{8} + \frac{9}{8}$
929.	$f'(x) = x^2 \cdot (x^3 + 1)^{100}$	$f(0) = 1$	$f(x) = \frac{(x^3 + 1)^{101}}{303} + \frac{302}{303}$
930.	$f'(x) = x^5 \cdot \sqrt[3]{x^6 + 7}$	$f(1) = 0$	$f(x) = \frac{(x^6 + 7)^{4/3}}{8} - 2$
931.	$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$	$f(0) = 0$	$f(x) = \ln(e^x + 1) - \ln 2$
932.	$f'(x) = \frac{2x^3 + x}{x^4 + x^2 + 1}$	$f(0) = 1$	$f(x) = \frac{\ln(x^4 + x^2 + 1)}{2} + 1$
933.	$f'(x) = \frac{2x^3 + x}{(x^4 + x^2 + 1)^2}$	$f(1) = 1$	$f(x) = -\frac{1}{2 \cdot (x^4 + x^2 + 1)} + \frac{7}{6}$

934.

$f'(x) = \frac{2x^3 + x}{(x^4 + x^2 + 1)^3}$

$f(1) = 1$

$f(x) = -\frac{1}{4 \cdot (x^4 + x^2 + 1)^2} + \frac{37}{36}$

935.

$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$

$f(0) = 0$

$f(x) = \arctg(x + 1) - \frac{\pi}{4}$

W kolejnych dwóch zadaniach funkcje mają być ciągłe na $\mathbb{R}$ i różniczkowalne na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

936.

$f'(x) = \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

$f(0) = 2$

$f(x) = -3 \cdot \cos \sqrt[3]{x} + 5$

937.

$f'(x) = \frac{\sin \sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}$

$f(0) = 2$

$f(x) = -5 \cdot \cos \sqrt[5]{x} + 7$

938. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[7]{x^5 + 1} \, dx$$

dla odpowiednio wybranej liczby naturalnej n .

Rozwiązanie:

Przyjmiemy $\mathbf{n} = \mathbf{4}$ i wykonamy podstawienie

$$t = \sqrt[7]{x^5 + 1},$$

czyli

$$t^7 = x^5 + 1$$

oraz formalnie

$$7t^6 \, dt = 5x^4 \, dx.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x^4 \cdot \sqrt[7]{x^5 + 1} \, dx &= \frac{1}{5} \int \sqrt[7]{x^5 + 1} \cdot 5x^4 \, dx = \frac{1}{5} \int t \cdot 7t^6 \, dt = \frac{7}{5} \int t^7 \, dt = \frac{7}{5} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{7 \cdot t^8}{40} + C = \\ &= \frac{7}{40} \cdot (x^5 + 1)^{8/7} + C. \end{aligned}$$

939. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[11]{x^7 + 1} \, dx$$

dla odpowiednio wybranej liczby naturalnej n .

Rozwiązanie:

Przyjmiemy $\mathbf{n} = \mathbf{6}$ i wykonamy podstawienie

$$t = \sqrt[11]{x^7 + 1},$$

czyli

$$t^{11} = x^7 + 1$$

oraz formalnie

$$11t^{10} \, dt = 7x^6 \, dx.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int x^6 \cdot \sqrt[11]{x^7+1} \, dx &= \frac{1}{7} \int \sqrt[11]{x^7+1} \cdot 7x^6 \, dx = \frac{1}{7} \int t \cdot 11t^{10} \, dt = \frac{11}{7} \int t^{11} \, dt = \frac{11}{7} \cdot \frac{t^{12}}{12} + C = \\ &= \frac{11 \cdot t^{12}}{84} + C = \frac{11}{84} \cdot (x^7+1)^{12/11} + C.\end{aligned}$$

940. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+40}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia $y = x + 2$ oraz $t = y/6$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+4x+40} &= \int \frac{dx}{(x+2)^2+36} = \int \frac{dy}{y^2+36} = \int \frac{dy}{36(y/6)^2+36} = \int \frac{6 \, dt}{36t^2+36} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\operatorname{arctg} t}{6} + C = \frac{\operatorname{arctg} (y/6)}{6} + C = \frac{\operatorname{arctg} ((x+2)/6)}{6} + C.\end{aligned}$$

941. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt[3]{8x^{17}+x^{12}} \, dx.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy podaną całkę

$$\int \sqrt[3]{8x^{17}+x^{12}} \, dx = \int x^4 \cdot \sqrt[3]{8x^5+1} \, dx$$

i wykonujemy podstawienie $t = 8x^5 + 1$ oraz formalnie $dt = 40x^4 \, dx$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int x^4 \cdot \sqrt[3]{8x^5+1} \, dx &= \frac{1}{40} \cdot \int 40x^4 \cdot \sqrt[3]{8x^5+1} \, dx = \frac{1}{40} \cdot \int \sqrt[3]{t} \, dt = \frac{1}{40} \cdot \frac{3 \cdot t^{4/3}}{4} + C = \\ &= \frac{3 \cdot t^{4/3}}{160} + C = \frac{3 \cdot (8x^5+1)^{4/3}}{160} + C.\end{aligned}$$

956. a)

$$\int \sqrt{3x+1} \, dx = \frac{2 \cdot (3x+1)^{3/2}}{9} + C;$$

b)

$$\int \sqrt[3]{5x+1} \, dx = \frac{3 \cdot (5x+1)^{4/3}}{20} + C;$$

c)

$$\int \sqrt[4]{7x+1} \, dx = \frac{4 \cdot (7x+1)^{5/4}}{35} + C;$$

d)

$$\int \sqrt[5]{11x+1} \, dx = \frac{5 \cdot (11x+1)^{6/5}}{66} + C.$$

957. a)

$$\int \frac{x \, dx}{x^2+1} = \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C;$$

b)

$$\int \frac{x^2 \, dx}{x^3+1} = \frac{\ln|x^3+1|}{3} + C;$$

c)

$$\int \frac{x^3 \, dx}{x^4+1} = \frac{\ln(x^4+1)}{4} + C;$$

d)

$$\int \frac{x^4 \, dx}{x^5+1} = \frac{\ln|x^5+1|}{5} + C.$$

958. a)

$$\int \frac{x \, dx}{x^4+1} = \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{2} + C;$$

b)

$$\int \frac{x^2 \, dx}{x^6+1} = \frac{\operatorname{arctg}(x^3)}{3} + C;$$

c) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+1} = \frac{\arctg(x^4)}{4} + C;$

959. a) $\int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} = \frac{-1}{2 \cdot (x^2+1)} + C;$

c) $\int \frac{x^3 dx}{(x^4+1)^4} = \frac{-1}{12 \cdot (x^4+1)^3} + C;$

960. a) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \arctg(x+1) + C;$

c) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \arctg(x+3) + C;$

961. a) $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \cdot \arctg \frac{x}{2} + C;$

c) $\int \frac{dx}{x^2+7} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \arctg \frac{x}{\sqrt{7}} + C;$

962. a) $\int \sqrt[3]{x^9+x^6} dx = \frac{(x^3+1)^{4/3}}{4} + C;$

c) $\int \sqrt[7]{x^{49}+x^{42}} dx = \frac{(x^7+1)^{8/7}}{8} + C;$

d) $\int \frac{x^4 dx}{x^{10}+1} = \frac{\arctg(x^5)}{5} + C.$

b) $\int \frac{x^2 dx}{(x^3+1)^3} = \frac{-1}{6 \cdot (x^3+1)^2} + C;$

d) $\int \frac{x^4 dx}{(x^5+1)^5} = \frac{-1}{20 \cdot (x^5+1)^4} + C.$

b) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \arctg(x+2) + C;$

d) $\int \frac{dx}{x^2+14x+50} = \arctg(x+7) + C.$

b) $\int \frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \arctg \frac{x}{\sqrt{5}} + C;$

d) $\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3} \cdot \arctg \frac{x}{3} + C.$

b) $\int \sqrt[5]{x^{25}+x^{20}} dx = \frac{(x^5+1)^{6/5}}{6} + C;$

d) $\int \sqrt[9]{x^{81}+x^{72}} dx = \frac{(x^9+1)^{10/9}}{10} + C.$

963. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{los} x = \operatorname{nos} x, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{nos} x = \operatorname{sos} x, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{sos} x = \operatorname{los} x.$$

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int e^x \cdot \operatorname{los} x \, dx.$$

Rozwiązanie:

Oznaczamy szukaną całkę przez $I(x)$, a następnie całkujemy trzykrotnie przez części całkując e^x i różniczkując $\operatorname{los} x$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} I(x) &= \int e^x \cdot \operatorname{los} x \, dx = e^x \cdot \operatorname{los} x - \int e^x \cdot \operatorname{nos} x \, dx = e^x \cdot \operatorname{los} x - e^x \cdot \operatorname{nos} x + \int e^x \cdot \operatorname{sos} x \, dx = \\ &= e^x \cdot \operatorname{los} x - e^x \cdot \operatorname{nos} x + e^x \cdot \operatorname{sos} x - \int e^x \cdot \operatorname{los} x \, dx = e^x \cdot \operatorname{los} x - e^x \cdot \operatorname{nos} x + e^x \cdot \operatorname{sos} x - I(x), \end{aligned}$$

skąd

$$I(x) = \frac{e^x \cdot \operatorname{los} x - e^x \cdot \operatorname{nos} x + e^x \cdot \operatorname{sos} x}{2} + C.$$

964. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x^2 dx}{(x+1)^{19/10}}.$$

Rozwiązanie:

Całkujemy dwukrotnie przez części różniczkując czynnik x^2 i wykorzystując fakt, że potęgę dwumianu liniowego $x + 1$ można wielokrotnie całkować:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot (x+1)^{-19/10} dx &= -\frac{10}{9} \cdot x^2 \cdot (x+1)^{-9/10} + \frac{20}{9} \int x \cdot (x+1)^{-9/10} dx = \\ &= -\frac{10}{9} \cdot x^2 \cdot (x+1)^{-9/10} + \frac{200}{9} \cdot x \cdot (x+1)^{1/10} - \frac{200}{9} \int 1 \cdot (x+1)^{1/10} dx = \\ &= -\frac{10}{9} \cdot x^2 \cdot (x+1)^{-9/10} + \frac{200}{9} \cdot x \cdot (x+1)^{1/10} - \frac{2000}{99} \cdot (x+1)^{11/10} + C. \end{aligned}$$

Uwaga: Całkę można też obliczyć wykonując podstawienie $t = x + 1$.

965. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \ln(x^2 + 1) \, dx.$$

Rozwiązanie:

Dopisujemy do funkcji podcałkowej czynnik 1, po czym wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik 1 i różniczkując $\ln(x^2 + 1)$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 1) \, dx &= \int 1 \cdot \ln(x^2 + 1) \, dx = x \cdot \ln(x^2 + 1) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx = \\ &= x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} \, dx = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2 \int dx + 2 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

966. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int e^{4x} \cdot \sin(3x) \, dx.$$

Rozwiązanie:

Oznaczamy szukaną całkę przez $I(x)$, a następnie całkujemy dwukrotnie przez części całkując e^{4x} i różniczkując¹ $\sin 3x$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} I(x) &= \int e^{4x} \cdot \sin 3x \, dx = \frac{e^{4x}}{4} \cdot \sin 3x - \frac{3}{4} \cdot \int e^{4x} \cdot \cos 3x \, dx = \\ &= \frac{e^{4x}}{4} \cdot \sin 3x - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{e^{4x}}{4} \cdot \cos 3x + \frac{3}{4} \cdot \int e^{4x} \cdot \sin 3x \, dx \right) = \\ &= \frac{e^{4x}}{4} \cdot \sin 3x - \frac{3}{16} \cdot e^{4x} \cdot \cos 3x - \frac{9}{16} \cdot I(x), \end{aligned}$$

skąd

$$\frac{25}{16} \cdot I(x) = \frac{4 \cdot e^{4x} \sin 3x - 3 \cdot e^{4x} \cdot \cos 3x}{16} + C_0$$

¹W wyrażeniu $\sin 3x$ nie ma potrzeby ujmowania argumentu sinusa w nawias. W treści zadania nawias jest po to, aby uniknąć jakichkolwiek wątpliwości.

i ostatecznie

$$I(x)=\frac{4\cdot e^{4x}\sin 3x-3\cdot e^{4x}\cdot \cos 3x}{25}+C\,.$$

Odpowiedź:

$$\int e^{4x}\cdot \sin 3x\,dx=\frac{4\cdot e^{4x}\sin 3x-3\cdot e^{4x}\cdot \cos 3x}{25}+C\,.$$

967. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{x+7}}\,.$$

Rozwiązanie:

Całkujemy dwukrotnie przez części różniczkując czynnik x^2 i wykorzystując fakt, że potęgę dwumianu liniowego $x+7$ można wielokrotnie całkować:

$$\begin{aligned}\int x^2\cdot (x+7)^{-1/3}\,dx&=\frac{3}{2}\cdot x^2\cdot (x+7)^{2/3}-3\cdot \int x\cdot (x+7)^{2/3}\,dx=\\&=\frac{3}{2}\cdot x^2\cdot (x+7)^{2/3}-\frac{9}{5}\cdot x\cdot (x+7)^{5/3}+\frac{9}{5}\int 1\cdot (x+7)^{5/3}\,dx=\\&=\frac{3}{2}\cdot x^2\cdot (x+7)^{2/3}-\frac{9}{5}\cdot x\cdot (x+7)^{5/3}+\frac{27}{40}\cdot (x+7)^{8/3}+C\,.\end{aligned}$$

Odpowiedź:

$$\int x^2\cdot (x+7)^{-1/3}\,dx=\frac{3}{2}\cdot x^2\cdot (x+7)^{2/3}-\frac{9}{5}\cdot x\cdot (x+7)^{5/3}+\frac{27}{40}\cdot (x+7)^{8/3}+C\,.$$

Uwaga: Całkę można też obliczyć wykonując podstawienie $t=x+7$.

968. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \left(x^4+1\right)\cdot \ln \left(x^4+5\right)\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik (x^4+1) i różniczkując $\ln (x^4+5)$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int \left(x^4+1\right)\cdot \ln \left(x^4+5\right)\,dx&=\left(\frac{x^5}{5}+x\right)\cdot \ln \left(x^4+5\right)-\int \left(\frac{x^5}{5}+x\right)\cdot \frac{4x^3}{x^4+5}\,dx=\\&=\left(\frac{x^5}{5}+x\right)\cdot \ln \left(x^4+5\right)-\int \frac{x\cdot \left(x^4+5\right)}{5}\cdot \frac{4x^3}{x^4+5}\,dx=\\&=\left(\frac{x^5}{5}+x\right)\cdot \ln \left(x^4+5\right)-\frac{4}{5}\cdot \int x^4\,dx=\left(\frac{x^5}{5}+x\right)\cdot \ln \left(x^4+5\right)-\frac{4x^5}{25}+C\,.\end{aligned}$$

Odpowiedź:

$$\int \left(x^4+1\right)\cdot \ln \left(x^4+5\right)\,dx=\left(\frac{x^5}{5}+x\right)\cdot \ln \left(x^4+5\right)-\frac{4x^5}{25}+C\,.$$