

Kolokwium nr 4: piątek 10.04.2026, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 889–1073.

Zadania do omówienia¹ na ćwiczeniach we wtorki 24 i 31.03.2026.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami

Całkowanie funkcji wymiernych.

Obliczyć $\int f(x)dx$, jeśli $f(x)$ dana jest wzorem:

976. $\frac{x-3}{(x^2-6x+13)^2}$

977. $\frac{4x+3}{(x-2)^3}$

978. $\frac{x^4}{x^2+1}$

979. $\frac{x^3+x}{(x^2+2)^2}$

980. $\frac{1}{x^4-1}$

981. $\frac{1}{x^4+4}$

982. $\frac{7x^6+3x^2+4x}{x^7+x^3+2x^2+4}$

983. $\frac{1}{x^6+x^4}$

984. $\arctg x$

985. $x \cdot \arctg x$

986. $x^2 \cdot \arctg x$

987. $\arctg \sqrt{x}$

988. $\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

989. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

990. $\frac{1}{x \cdot \sqrt{x+1}}$

991. $\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

992. $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x+2}}}$

993. $\frac{e^x-1}{e^x+1}$

994. $\frac{e^x}{e^{2x}+1}$

995. $\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$

996. $\sqrt{e^x+1}$

997. $\frac{1}{x^3-1}$

998. $\frac{2x+5}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+4) \cdot (x+5)}$

999. $\frac{1}{x^{2025}+x}$

1000. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{x^n dx}{x^{120}-1}$, gdzie n jest dowolnie wybraną przez Ciebie liczbą naturalną spełniającą nierówność $60 \leq n \leq 100$.

1001. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{x^p dx}{x^{77}-1}$, gdzie p jest dowolnie wybraną przez Ciebie liczbą rzeczywistą dodatnią mniejszą od 20.

1002. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} dx.$$

1003. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^8+x}.$$

Wskazówka: Przemnożyć licznik i mianownik przez x^6 .

1004. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^{49}+x^{25}}.$$

Wskazówka: Spróbować podstawienia $t = x^k$ dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej k .

¹Zadania podobne do wcześniejszych będą pominięte.

Pole i całka oznaczona.

W każdym z poniższych 35 zadań podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

Wskazówka: W niektórych zadaniach lepiej nie całkować bezpośrednio, tylko narysować odpowiednią figurę i obliczyć jej pole.

1005. $\int\limits_{2020}^{2024} 7\,dx\ldots\ldots\ldots$

1006. $\int\limits_0^3 x^2\,dx\ldots\ldots\ldots$

1007. $\int\limits_0^2 x^3\,dx\ldots\ldots\ldots$
1008. $\int\limits_0^1 x^{10}\,dx\ldots\ldots\ldots$

1009. $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx\ldots\ldots\ldots$

1010. $\int\limits_1^{27} \sqrt[3]{x}\,dx\ldots\ldots\ldots$
1011. $\int\limits_{-2}^{10} |x|\,dx\ldots\ldots\ldots$

1012. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x}\ldots\ldots\ldots$

1013. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x+1}\ldots\ldots\ldots$
1014. $\int\limits_1^7 \frac{dx}{x+2}\ldots\ldots\ldots$

1015. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1}\ldots\ldots\ldots$

1016. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}\ldots\ldots\ldots$
1017. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}\ldots\ldots\ldots$

1018. $\int\limits_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}\ldots\ldots\ldots$

1019. $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^2+1}\ldots\ldots\ldots$
1020. $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\ldots\ldots\ldots$

1021. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\ldots\ldots\ldots$

1022. $\int\limits_{-1}^0 \sqrt{1-x^2}\,dx\ldots\ldots\ldots$
1023. $\int\limits_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx\ldots\ldots\ldots$

1024. $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx\ldots\ldots\ldots$

1025. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx\ldots\ldots\ldots$
1026. $\int\limits_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx\ldots\ldots\ldots$

1027. $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx\ldots\ldots\ldots$
1028. $\int\limits_0^3 \sqrt{12-x^2}\,dx\ldots\ldots\ldots$

1029. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx\ldots\ldots\ldots$
1030. $\int\limits_0^6 \sqrt{12x-x^2}\,dx = \ldots\ldots\ldots$

1031. $\int\limits_{10}^{20} \sqrt{20x-x^2}\,dx = \ldots\ldots\ldots$
1032. $\int\limits_0^6 \sqrt{6x-x^2}\,dx = \ldots\ldots\ldots$

1033. $\int\limits_0^{10} \sqrt{10x-x^2}\,dx = \ldots\ldots\ldots$
1034. $\int\limits_0^3 \sqrt{18-2x^2}\,dx = \ldots\ldots\ldots$

1035. $\int\limits_0^3 \sqrt{24-2x^2}\,dx = \ldots\ldots\ldots$

1036. $\int_0^3 \sqrt{36-2x^2} \, dx = \dots\dots\dots$

1037. $\int_0^3 \sqrt{72-2x^2} \, dx = \dots\dots\dots$

1038. $\int_0^{60} \{x\} - \{x\}^2 \, dx = \dots\dots\dots$

1039. $\int_{66}^{666} \{x\}^2 - \{x\}^3 \, dx = \dots\dots\dots$

1040. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+24}}.$$

1041. Udowodnić nierówność

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x} \, dx < \frac{1}{8}.$$

1042. Niech

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} \qquad \text{oraz} \qquad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)).$$

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{10} f_5(x) \, dx.$$

1043. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2(5^x + 3) \, dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

1044. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{3x^3 + 4}{7}} + \sqrt[3]{\frac{7x^2 - 4}{3}} \, dx.$$

Wskazówka: Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x^3 + 4}{7}},$$

a następnie przedstawić daną całkę w postaci pola odpowiedniej figury.

1045. Rozstrzygnąć, która całka jest większa:

$$\int_1^2 \sqrt[4]{\frac{127 - 15x^3}{7}} \, dx \qquad \text{czy} \qquad \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127 - 7x^4}{15}} \, dx \quad ?$$

1046. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_{20}^{21} \sqrt{15x^3 - 30\,000} \, dx$$

jest mniejsza czy większa od 315.

1047. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 8 \cdot \sqrt{x} + (x-1) \cdot \ln x \, dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Udowodnić następujące nierówności:

- 1048.** $\frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{x^2+1} \, dx < \frac{1}{2}$
- 1049.** $\frac{1}{11} < \int_9^{10} \frac{dx}{x+\sin x} < \frac{1}{8}$
- 1050.** $\int_{-1}^2 \frac{|x|}{1+x^2} \, dx < \frac{3}{2}$
- 1051.** $\int_0^1 x \cdot (1-x^{99+x}) \, dx < \frac{1}{2}$
- 1052.** $5 < \int_1^3 x^x \, dx < 31$
- 1053.** $\int_1^2 \frac{dx}{x} < \frac{3}{4}$
- 1054.** $2\sqrt{2} < \int_2^4 x^{1/x} \, dx$
- 1055.** $\frac{19}{3} < \int_2^3 x^x \, dx < \frac{65}{4}$. **Wsk.:** Oszacować x^x przez x^a .

1056. Niech

$$C(a,b) = \left[\int_a^b \log_x 2 \, dx \right],$$

gdzie $[y]$ oznacza część całkowitą liczby y . Obliczyć wartości wyrażeń:

a) $C(80,122)$ **b)** $C(200,240)$ **c)** $C(400,440)$ **d)** $C(800,880)$

1057. Dla podanej liczby a wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą dodatnią b , aby zachodziła równość

$$\int_a^b \frac{x \, dx}{x^2+1} = \frac{\ln 5}{2}.$$

- a)** $a = 0$ **b)** $a = 1$ **c)** $a = 2$ **d)** $a = 3$

1058. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{666} \left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right| \, dx.$$

1059. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{49}^{169} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+120}}.$$

1060. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2(3^x+5) \, dx$$

jest mniejsza czy większa od 8.

1061. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_3^5 \sqrt[7]{x^3+3} \, dx$$

jest mniejsza czy większa od $11/3$.

W kolejnych 12 zadaniach na podstawie znajomości przybliżenia jednej całki podaj przybliżoną wartość drugiej całki.

- 1062.** $\int_1^2 \sqrt{x^3+8} \, dx \approx 3,415$

1063. $\int_1^2 \sqrt{17-x^3} \, dx \approx 3,623$

1064. $\int_2^3 \sqrt{108-x^3} \, dx \approx 9,574$

1065. $\int_2^3 \sqrt{x^3+73} \, dx \approx 9,443$

1066. $\int_1^3 \log_3(2^x+1) \, dx \approx 2,953$

1067. $\int_1^3 \log_3(11-2^x) \, dx \approx 3,385$

1068. $\int_0^2 \log_3(28-5^x) \, dx \approx 5,362$

1069. $\int_0^2 \log_3(5^x+2) \, dx \approx 3,698$

1070. $\int_1^3 \sqrt{3^x-2} \, dx \approx 5,532$

1071. $\int_1^3 \sqrt{28-3^x} \, dx \approx 8,042$

1072. $\int_0^3 \sqrt{17-2^x} \, dx \approx 11,047$

1073. $\int_0^3 \sqrt{2^x+8} \, dx \approx 10,078$
- $\int_3^4 \sqrt[3]{x^2-8} \, dx \approx \dots\dots\dots$

$\int_3^4 \sqrt[3]{17-x^2} \, dx \approx \dots\dots\dots$

$\int_9^{10} \sqrt[3]{108-x^2} \, dx \approx \dots\dots\dots$

$\int_9^{10} \sqrt[3]{x^2-73} \, dx \approx \dots\dots\dots$

$\int_1^2 \log_2(3^x-1) \, dx \approx \dots\dots\dots$

$\int_1^2 \log_2(11-3^x) \, dx \approx \dots\dots\dots$

$\int_1^3 \log_5(28-3^x) \, dx \approx \dots\dots\dots$

$\int_1^3 \log_5(3^x-2) \, dx \approx \dots\dots\dots$

$\int_1^5 \log_3(x^2+2) \, dx \approx \dots\dots\dots$

$\int_1^5 \log_3(28-x^2) \, dx \approx \dots\dots\dots$

$\int_3^4 \log_2(17-x^2) \, dx \approx \dots\dots\dots$

$\int_3^4 \log_2(x^2-8) \, dx \approx \dots\dots\dots$