

1002. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} dx .$$

Rozwiązanie:

Sposób I (normalny):

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{x+2} + \frac{E}{x+3} , \\ 2x+3 &= \frac{A \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} + \frac{B \cdot x \cdot (x+2) \cdot (x+3)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} + \\ &+ \frac{D \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+3)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} + \frac{E \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+2)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} . \end{aligned} \tag{*}$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (*), układaniem układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy¹ do równości (*) kolejno² $x=0, -1, -2, -3$. Otrzymujemy:

dla $x=0$ $3=6A,$ skąd $A=1/2,$

dla $x=-1$ $1=-2B,$ skąd $B=-1/2,$

dla $x=-2$ $-1=2D,$ skąd $D=-1/2,$

dla $x=-3$ $-3=-6E,$ skąd $E=1/2.$

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} dx &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln |x| - \ln |x+1| - \ln |x+2| + \ln |x+3|) + C . \end{aligned}$$

Sposób II (trikowy):

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} dx &= \int \frac{2x+3}{(x \cdot (x+3)) \cdot ((x+1) \cdot (x+2))} dx = \\ &= \int \frac{2x+3}{(x^2+3x) \cdot (x^2+3x+2)} dx , \end{aligned}$$

a następnie podstawiamy $t=x^2+3x$ i formalnie $dt=(2x+3) dx$. Otrzymujemy

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x) \cdot (x^2+3x+2)} dx = \int \frac{dt}{t \cdot (t+2)} .$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t \cdot (t+2)} = \frac{1/2}{t} - \frac{1/2}{t+2} ,$$

¹Taka metoda jest o wiele szybsza, zwłaszcza przy wysokim stopniu mianownika, jednak można ją wydajnie zastosować tylko w przypadku mianownika będącego iloczynem różnych czynników liniowych.

²To są wartości x , przy których czynniki liniowe się zerują.

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{t \cdot (t+2)} &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} dt = \frac{1}{2} \cdot (\ln |t| - \ln |t+2|) + C = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln |x^2+3x| - \ln |x^2+3x+2|) + C.\end{aligned}$$

1003. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^8+x}.$$

Wskazówka: Przemnożyć licznik i mianownik przez x^6 .

Rozwiązanie:
Sposób I

Przepisanie funkcji podcałkowej w postaci

$$\int \frac{dx}{x^8+x} = \int \frac{x^6 dx}{x^{14}+x^7}$$

nasuwa pomysł podstawienia $t = x^7$ i formalnie $dt = 7x^6 dx$, co prowadzi do

$$\begin{aligned}\int \frac{x^6 dx}{x^{14}+x^7} &= \frac{1}{7} \cdot \int \frac{dt}{t^2+t} = \frac{1}{7} \cdot \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} dt = \frac{1}{7} \cdot (\ln |t| - \ln |t+1|) + C = \\ &= \frac{1}{7} \cdot (\ln |x^7| - \ln |x^7+1|) + C = \ln |x| - \frac{\ln |x^7+1|}{7} + C.\end{aligned}$$

Sposób II

Wykonując podstawienie $x = t^{-1/7}$ i formalnie $dx = -\frac{dt}{7t^{8/7}}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^8+x} &= -\frac{1}{7} \cdot \int \frac{dt}{(t^{-8/7}+t^{-1/7}) \cdot t^{8/7}} = -\frac{1}{7} \cdot \int \frac{dt}{t+1} = -\frac{1}{7} \cdot \ln |t+1| + C = \\ &= -\frac{1}{7} \cdot \ln |x^{-7}+1| + C = -\frac{1}{7} \cdot \ln \left| \frac{x^7+1}{x^7} \right| + C = \frac{1}{7} \cdot \ln \left| \frac{x^7}{x^7+1} \right| + C.\end{aligned}$$

1004. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^{49}+x^{25}}.$$

Wskazówka: Spróbować podstawienia $t = x^k$ dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej k .

Rozwiązanie:
Sposób I

Przepisanie funkcji podcałkowej w postaci

$$\int \frac{dx}{x^{49}+x^{25}} = \int \frac{x^{23} dx}{x^{72}+x^{48}}$$

nasuwa pomysł podstawienia $t = x^{24}$ i formalnie $dt = 24x^{23} dx$, co prowadzi do

$$\int \frac{x^{23} dx}{x^{72} + x^{48}} = \frac{1}{24} \cdot \int \frac{dt}{t^3 + t^2}.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^3 + t^2} &= \frac{1}{t^2 \cdot (t + 1)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{D}{t + 1}, \\ 1 &= A \cdot (t + 1) + B \cdot t \cdot (t + 1) + D \cdot t^2, \\ 1 &= A \cdot t + A + B \cdot t^2 + B \cdot t + D \cdot t^2, \\ &\begin{cases} 1 &= A \\ 0 &= A + B \\ 0 &= B + D \end{cases} \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymujemy $A = D = 1$ oraz $B = -1$, co pozwala dokończyć całkowanie

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} \cdot \int \frac{dt}{t^3 + t^2} &= \frac{1}{24} \cdot \int \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t + 1} dt = \frac{1}{24} \cdot \left(-\frac{1}{t} - \ln |t| + \ln |t + 1| \right) + C = \\ &= \frac{1}{24} \cdot \left(-\frac{1}{x^{24}} - \ln \left(x^{24} \right) + \ln \left(x^{24} + 1 \right) \right) + C = -\frac{1}{24 \cdot x^{24}} - \ln |x| + \frac{\ln \left(x^{24} + 1 \right)}{24} + C. \end{aligned}$$

Sposób II

Wykonujemy podstawienie $x = 1/t$, czyli $t = 1/x$, i formalnie $dx = -1/t^2 dt$.

Otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{x^{49} + x^{25}} = - \int \frac{dt}{(t^{-49} + t^{-25}) \cdot t^2} = - \int \frac{t^{47} dt}{1 + t^{24}}.$$

Po wykonaniu podstawienia $s = t^{24}$ i formalnie $t^{23} dt = ds/24$ kontynuujemy całkowanie:

$$\begin{aligned} - \int \frac{t^{47} dt}{1 + t^{24}} &= -\frac{1}{24} \cdot \int \frac{s ds}{1 + s} = -\frac{1}{24} \cdot \int 1 - \frac{1}{1 + s} ds = -\frac{1}{24} \cdot (s - \ln |1 + s|) + C = \\ &= -\frac{s}{24} + \frac{1}{24} \cdot \ln |1 + s| + C = -\frac{t^{24}}{24} + \frac{1}{24} \cdot \ln \left(1 + t^{24} \right) + C = -\frac{x^{-24}}{24} + \frac{1}{24} \cdot \ln \left(1 + x^{-24} \right) + C = \\ &= -\frac{1}{24 \cdot x^{24}} + \frac{1}{24} \cdot \ln \left(\frac{1 + x^{24}}{x^{24}} \right) + C. \end{aligned}$$

Sposób III

Wykonujemy podstawienie $x = 1/t$ jak w sposobie II, a następnie przekształcamy otrzymaną całkę:

$$\begin{aligned} - \int \frac{t^{47} dt}{1 + t^{24}} &= - \int \frac{t^{47} + t^{23} - t^{23}}{1 + t^{24}} dt = - \int t^{23} - \frac{t^{23}}{1 + t^{24}} dt = \int -t^{23} + \frac{t^{23}}{1 + t^{24}} dt = \\ &= -\frac{t^{24}}{24} + \frac{1}{24} \cdot \ln \left(1 + t^{24} \right) + C \end{aligned}$$

i dalej porządkujemy jak w sposobie II.

W każdym z poniższych 35 zadań podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

Wskazówka: W niektórych zadaniach lepiej nie całkować bezpośrednio, tylko narysować odpowiednią figurę i obliczyć jej pole.

1005. $\int\limits_{2020}^{2024} 7 \, dx = 28$

1006. $\int\limits_0^3 x^2 \, dx = 9$

1007. $\int\limits_0^2 x^3 \, dx = 4$

1008. $\int\limits_0^1 x^{10} \, dx = 1/11$

1009. $\int\limits_1^4 \sqrt{x} \, dx = 14/3$

1010. $\int\limits_1^{27} \sqrt[3]{x} \, dx = 60$

1011. $\int\limits_{-2}^{10} |x| \, dx = 52$

1012. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x} = \ln 3$

1013. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x+1} = \ln 2$

1014. $\int\limits_1^7 \frac{dx}{x+2} = \ln 3$

1015. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}$

1016. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{3}$

1017. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{12}$

1018. $\int\limits_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{6}$

1019. $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{12}$

1020. $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$

1021. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}$

1022. $\int\limits_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}$

1023. $\int\limits_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \, dx = 2\pi$

1024. $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx = \pi$

1025. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} \, dx = \pi$

1026. $\int\limits_0^1 \sqrt{2-x^2} \, dx = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

1027. $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$

1028. $\int\limits_0^3 \sqrt{12-x^2} \, dx = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2\pi$

1029. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} \, dx = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$

1030. $\int\limits_0^6 \sqrt{12x-x^2} \, dx = 9\pi$

1031. $\int\limits_{10}^{20} \sqrt{20x-x^2} \, dx = 25\pi$

1032. $\int\limits_0^6 \sqrt{6x-x^2} \, dx = 9\pi/2$

1033. $\int\limits_0^{10} \sqrt{10x-x^2} \, dx = 25\pi/2$

1034. $\int\limits_0^3 \sqrt{18-2x^2} \, dx = \frac{9\pi}{2\sqrt{2}}$

1035. $\int\limits_0^3 \sqrt{24-2x^2} \, dx = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\pi$

1036. $\int\limits_0^3 \sqrt{36-2x^2} \, dx = \frac{9}{\sqrt{2}} + \frac{9\pi}{2\sqrt{2}}$

1037. $\int\limits_0^3 \sqrt{72-2x^2} \, dx = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\pi$

1038. $\int\limits_0^{60} \{x\} - \{x\}^2 \, dx = 10$

1039. $\int\limits_{66}^{666} \{x\}^2 - \{x\}^3 \, dx = 50$

1040. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+24}}.$$

Rozwiązanie:

Po skorzystaniu ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+24}} &= \int_1^{25} \frac{\sqrt{x+24} - \sqrt{x}}{24} dx = \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (x+24)^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \right) \Bigg|_{x=1}^{25} = \\ &= \frac{1}{36} \cdot \left((x+24)^{3/2} - x^{3/2} \right) \Bigg|_{x=1}^{25} = \frac{1}{36} \cdot (343 - 125 - 125 + 1) = \frac{94}{36} = \frac{47}{18}. \end{aligned}$$

1041. Udowodnić nierówność

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x} dx < \frac{1}{8}.$$

Rozwiązanie:

Pochodna funkcji podcałkowej $f(x) = x^{2x}$ dana jest wzorem

$$f'(x) = \frac{d}{dx} x^{2x} = \frac{d}{dx} e^{2x \cdot \ln x} = e^{2x \cdot \ln x} \cdot \frac{d}{dx} (2x \cdot \ln x) = x^{2x} \cdot (2 \cdot \ln x + 2) = 2 \cdot x^{2x} \cdot (\ln x + 1).$$

Ponieważ $f'(x) > 0$ dla $x > 1/e$ oraz $f'(x) < 0$ dla $0 < x < 1/e$, funkcja f jest malejąca w przedziale $(0, 1/e)$ i rosnąca w przedziale $(1/e, +\infty)$. Zauważmy ponadto, że

$$f(1/4) = 1/2$$

oraz

$$f(1/2) = 1/2.$$

Wobec tego $f(x) < 1/2$ dla $x \in (1/4, 1/2)$, skąd

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x} dx < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Uwaga: Obliczenia komputerowe pokazują, że dana w zadaniu całka ma wartość w przybliżeniu 0,1215. Wydaje się to być zbyt bliskie oszacowaniu $1/8 = 0,125$, aby zadziałały inne metody szacowania (zapewne obarczone większym błędem).

1042. Niech

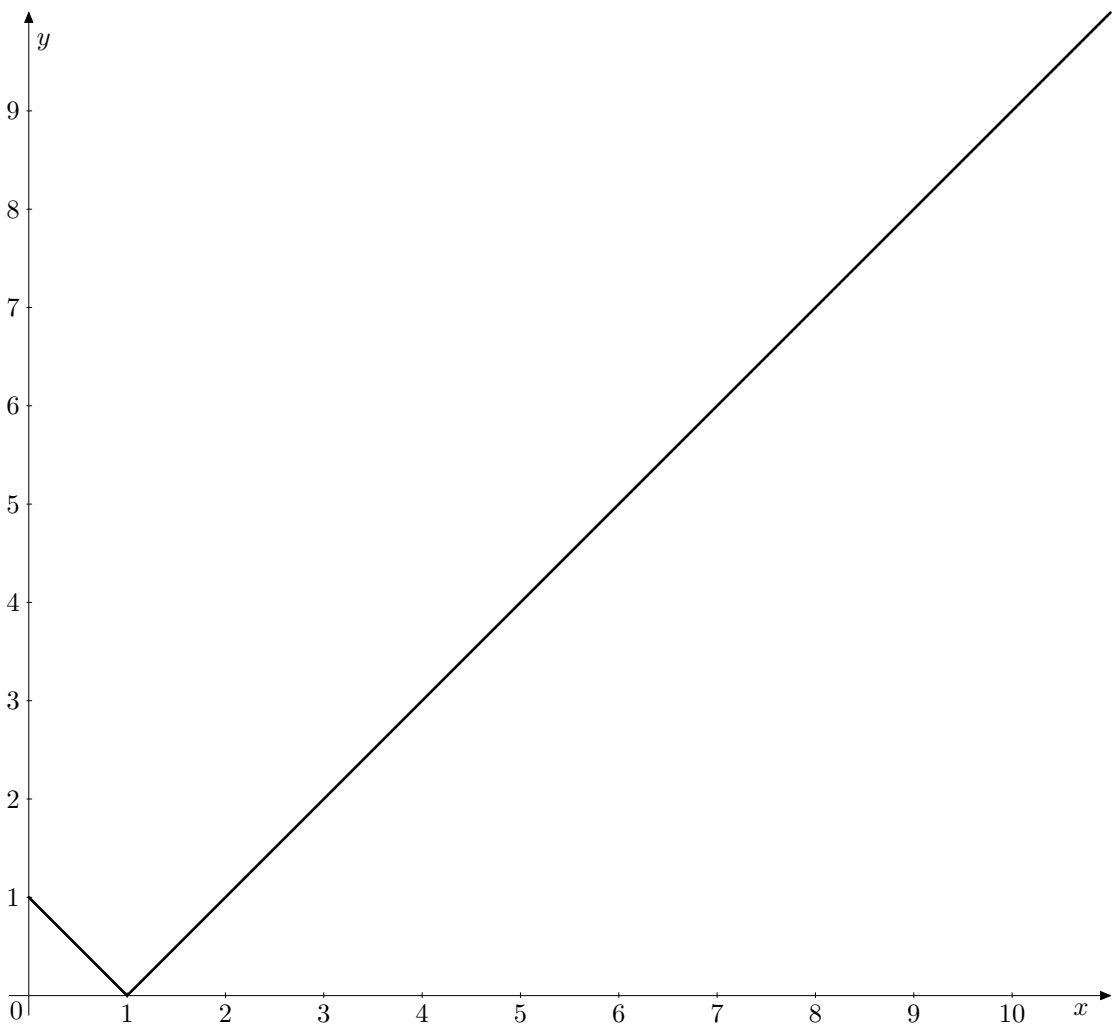
$$f_1(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} \quad \text{oraz} \quad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)).$$

Obliczyć wartość całki oznaczonej

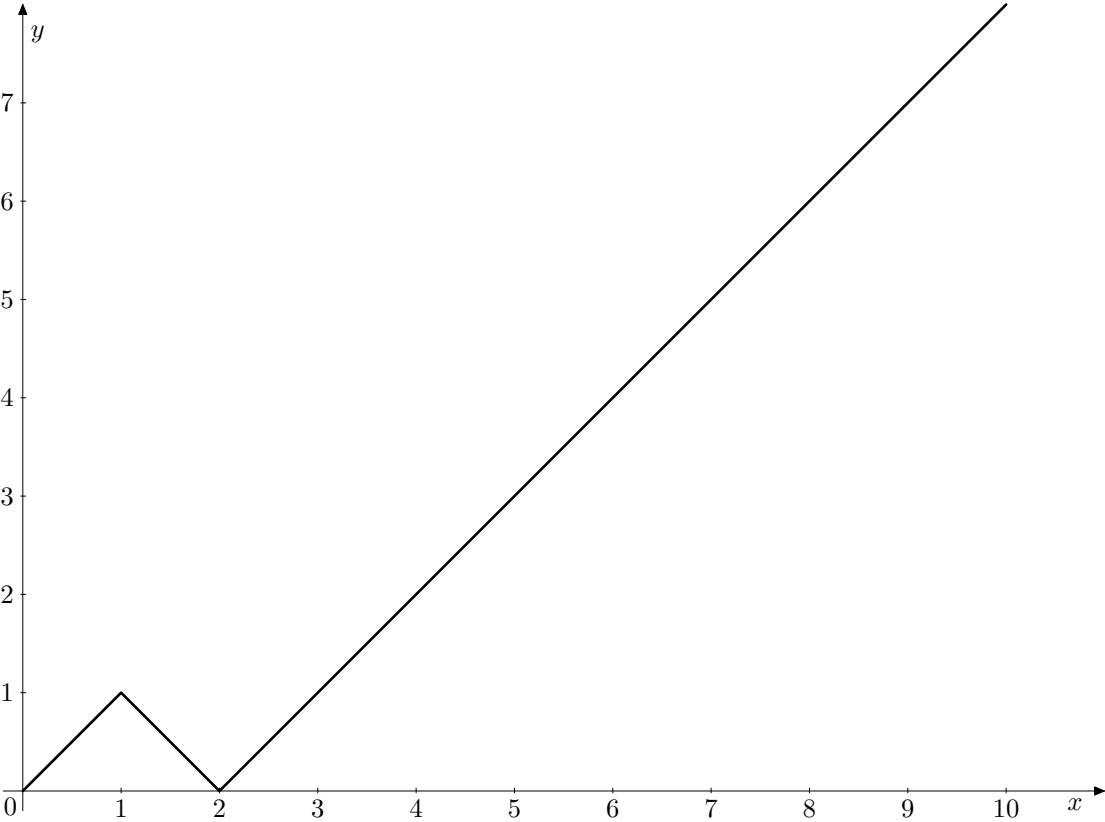
$$\int_0^{10} f_5(x) dx.$$

Rozwiązanie:

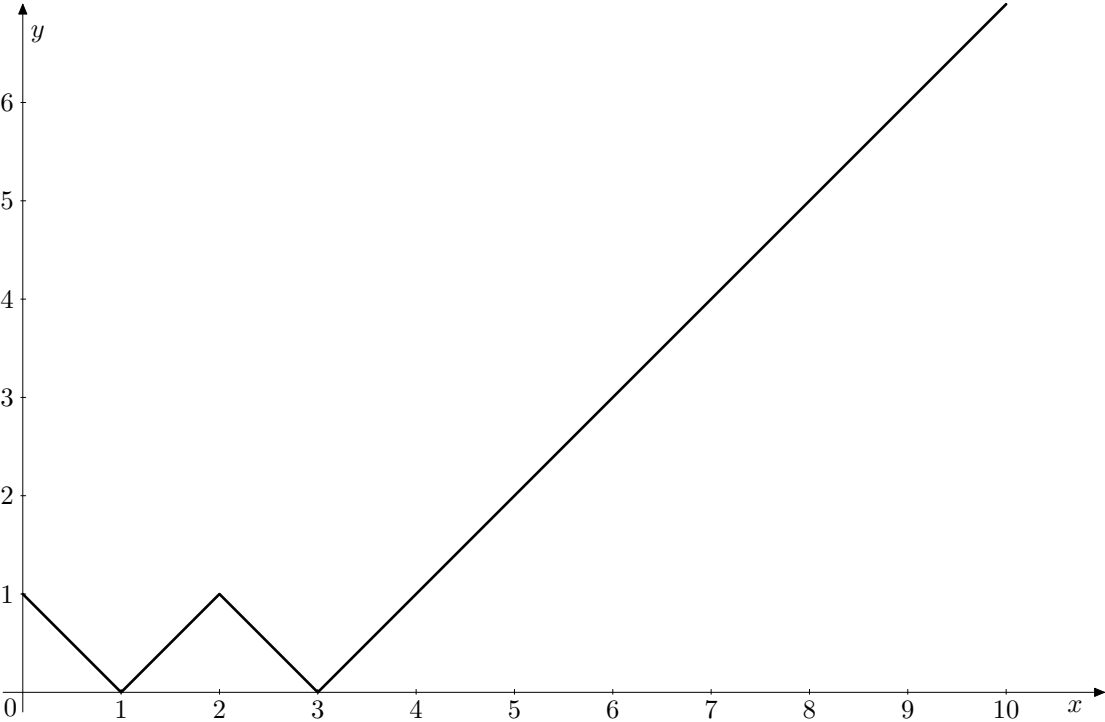
Zauważmy, że $f_1(x) = |x - 1|$. W związku z tym wykres funkcji $f_1 \circ g$ powstaje z wykresu funkcji g przez przesunięcie tegoż wykresu w dół o 1 oraz symetryczne odbicie części wykresu, która znalazła się pod osią OX . Wykresy funkcji od f_1 do f_5 znajdują się odpowiednio na rysunkach od 1 do 5.



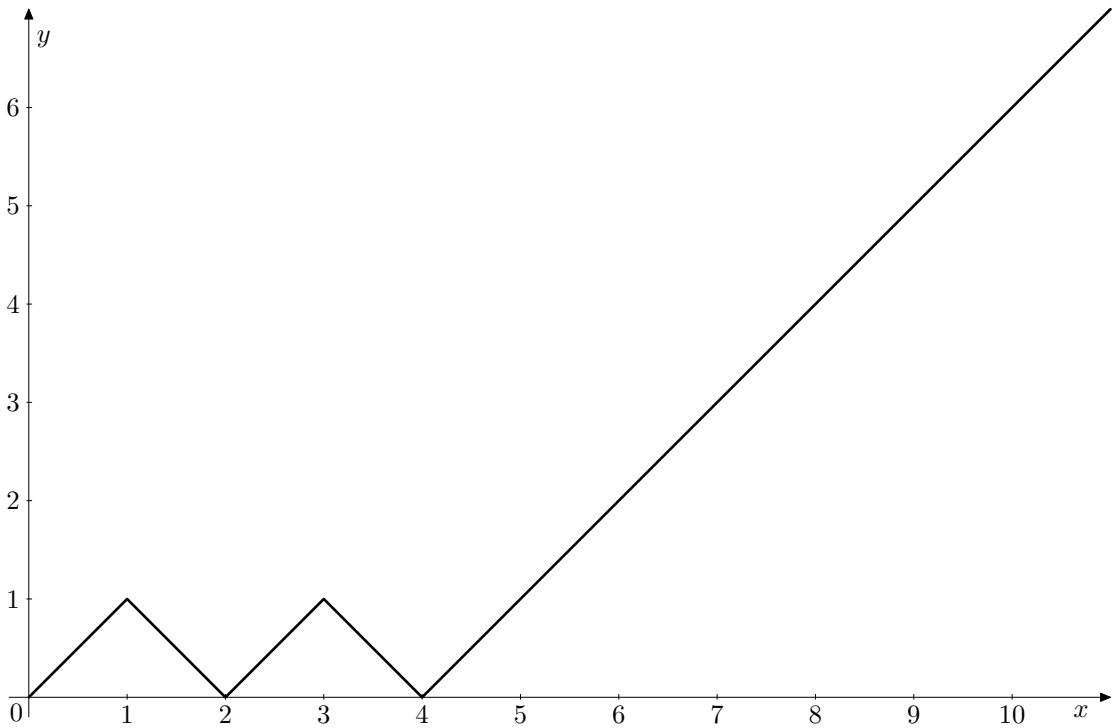
rys. 1



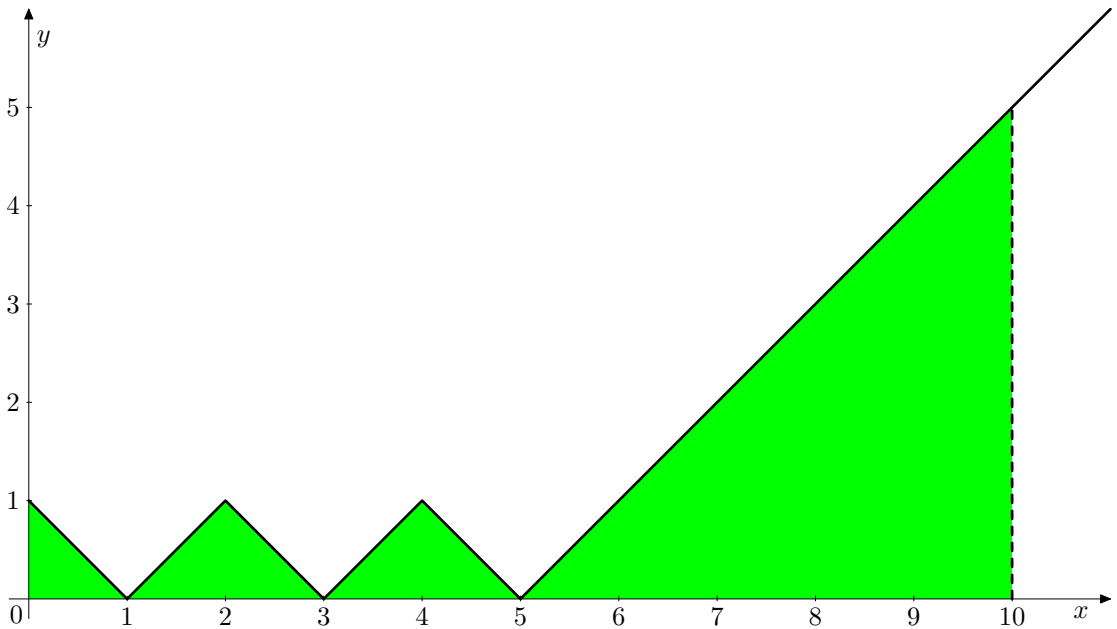
rys. 2



rys. 3



rys. 4



rys. 5

Szukana wartość całki oznaczonej jest równa polu zielonej figury z rysunku 5. Pole to wyliczamy sumując pola trójkątów, które się na nie składają:

$$\frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{25}{2} = 15.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa 15.

1043. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2(5^x + 3) dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x) = \log_2(5^x + 3).$$

Wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{5^x \cdot \ln 5}{5^x + 3}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{5^x \cdot (\ln 5)^2}{5^x + 3} - \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{5^{2x} \cdot (\ln 5)^2}{(5^x + 3)^2} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{3 \cdot 5^x \cdot (\ln 5)^2}{(5^x + 3)^2} > 0,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła.

Ponieważ $f(1) = 3$ oraz $f(3) = 7$, wykres funkcji f leży poniżej cięciwy o końcach $(1, 3)$ i $(3, 7)$. Wobec tego $f(x) < 2x + 1$ dla $x \in (1, 3)$ i w konsekwencji

$$\int_1^3 \log_2(5^x + 3) dx < \int_1^3 2x + 1 dx = 10.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od 10.

1044. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{3x^3 + 4}{7}} + \sqrt[3]{\frac{7x^2 - 4}{3}} dx.$$

Wskazówka: Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x^3 + 4}{7}},$$

a następnie przedstawić daną całkę w postaci pola odpowiedniej figury.

Rozwiązanie:

Niech $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x^3 + 4}{7}}.$$

Zauważmy, że $f(1) = 1$ oraz $f(2) = 2$, a ponadto przekształcanie równania $y = f(x)$ prowadzi kolejno do

$$y = \sqrt{\frac{3x^3 + 4}{7}}, \quad y^2 = \frac{3x^3 + 4}{7}, \quad 7y^2 = 3x^3 + 4,$$

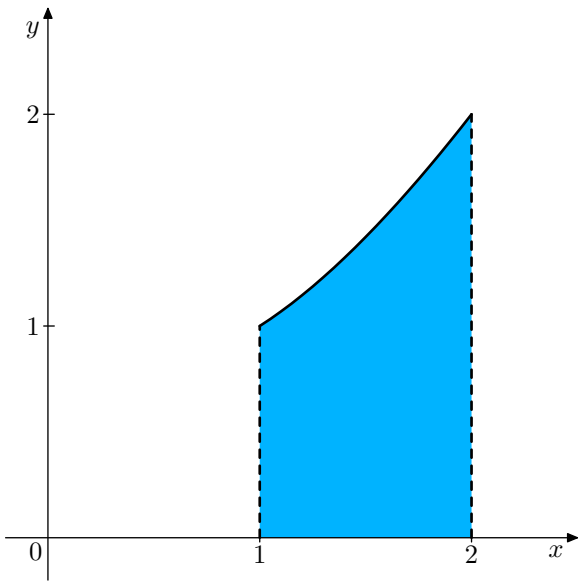
$7y^2-4=3x^3\,,\qquad\qquad\frac{7y^2-4}{3}=x^3\,,\qquad\qquad\sqrt[3]{\frac{7y^2-4}{3}}=x\,.$

Oznacza to, że dana w zadaniu całka ma postać

$$\int\limits_1^2 f(x)+f^{-1}(x)\,dx\,,$$

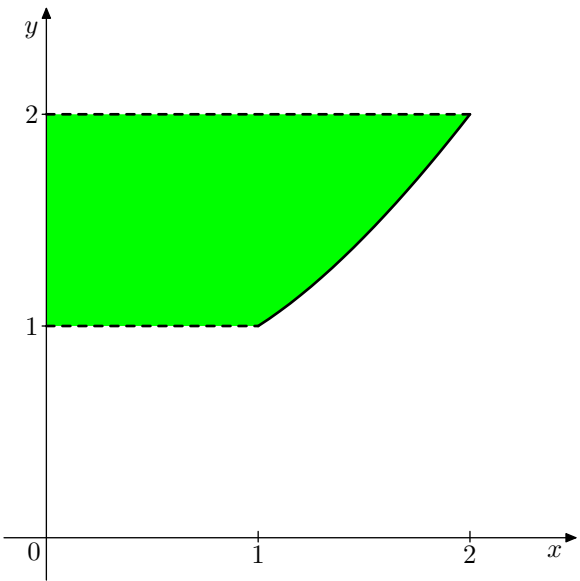
gdzie $f^{-1}:[1,2]\rightarrow\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f określoną wzorem

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{7x^2-4}{3}}\,.$$



rys. 6

Całka



rys. 7

$$\int\limits_1^2 f(x)\,dx=\int\limits_1^2 \sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}\,dx$$

jest polem figury

$$\{(x,y): 1\leqslant x\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}=\left\{(x,y): 1\leqslant x\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}\right\}$$

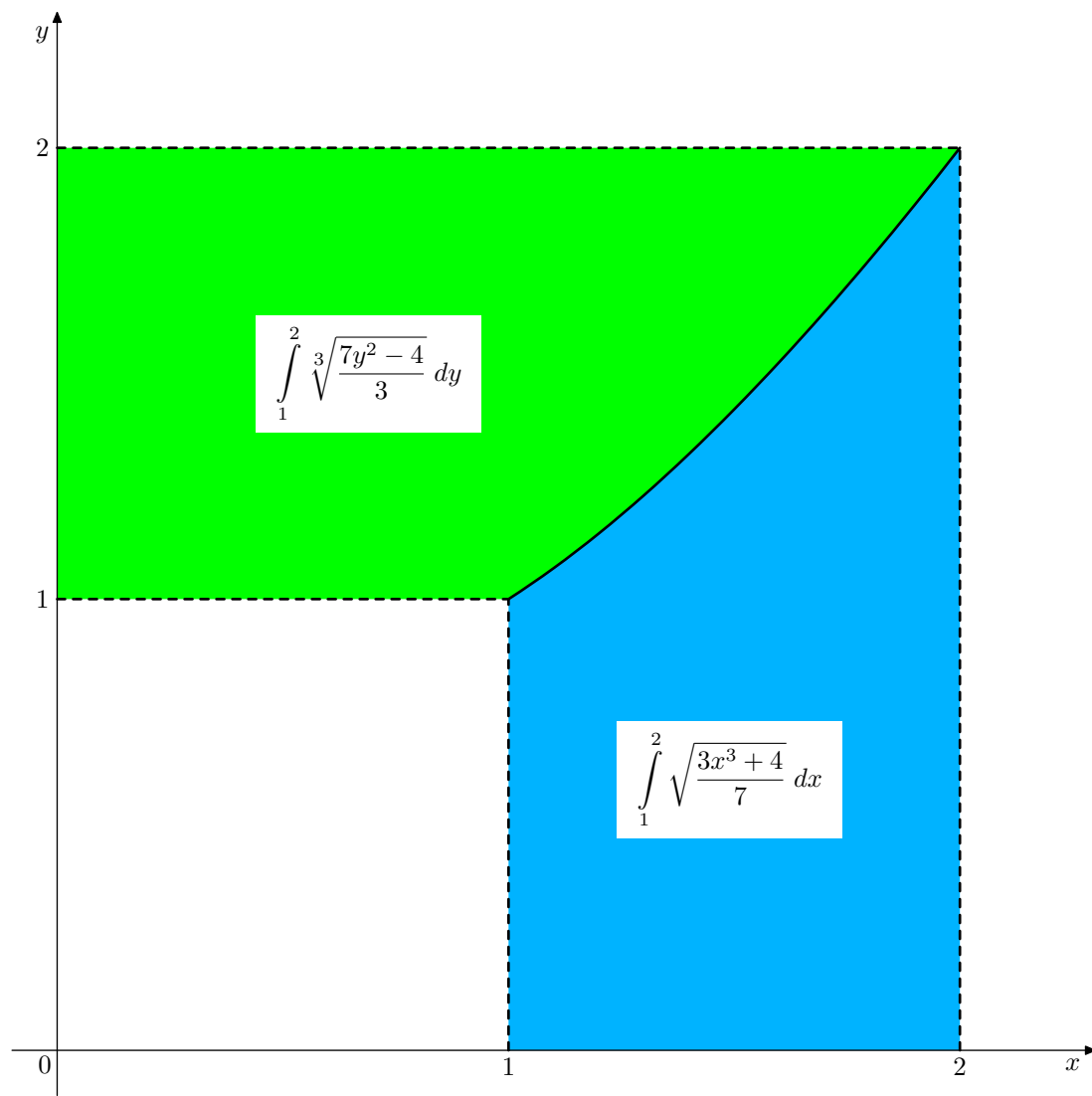
zamalowanej na rysunku 6 kolorem niebieskim.

Z kolei na rysunku 7 kolorem zielonym zamalowana jest figura

$$\{(x,y): 1\leqslant y\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant x\leqslant f^{-1}(y)\}=\left\{(x,y): 1\leqslant y\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant x\leqslant \sqrt[3]{\frac{7y^2-4}{3}}\right\}\,,$$

której pole jest równe

$$\int\limits_1^2 f^{-1}(y)\,dy=\int\limits_1^2 \sqrt[3]{\frac{7y^2-4}{3}}\,dy=\int\limits_1^2 \sqrt[3]{\frac{7x^2-4}{3}}\,dx\,.$$



rys. 8

Dana w zadaniu całka ma więc wartość równą polu figury zamalowanej na rysunku 8. Ponieważ zamalowana figura jest sumą trzech kwadratów jednostkowych, jej pole jest równe 3.

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość 3.

1045. Rozstrzygnąć, która całka jest większa:

$$\int_1^2 \sqrt[4]{\frac{127 - 15x^3}{7}} dx \quad \text{czy} \quad \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127 - 7x^4}{15}} dx \quad ?$$

Rozwiązanie:

Niech $f(x) = \sqrt[4]{\frac{127 - 15x^3}{7}}$ oraz $g(x) = \sqrt[3]{\frac{127 - 7x^4}{15}}$.

Wówczas $f(1) = g(1) = 2$ oraz $f(2) = g(2) = 1$, a co więcej funkcje f i g są na przedziale $[1, 2]$ malejące i odwrotne do siebie.

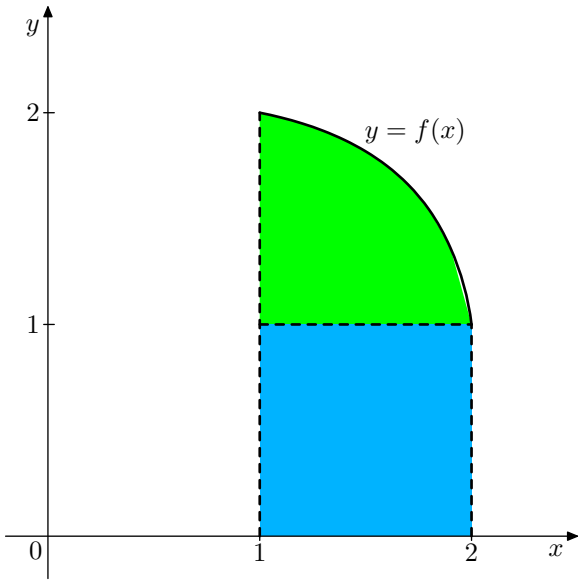
Całka

$$\int_1^2 \sqrt[4]{\frac{127-15x^3}{7}} \, dx = \int_1^2 f(x) \, dx$$

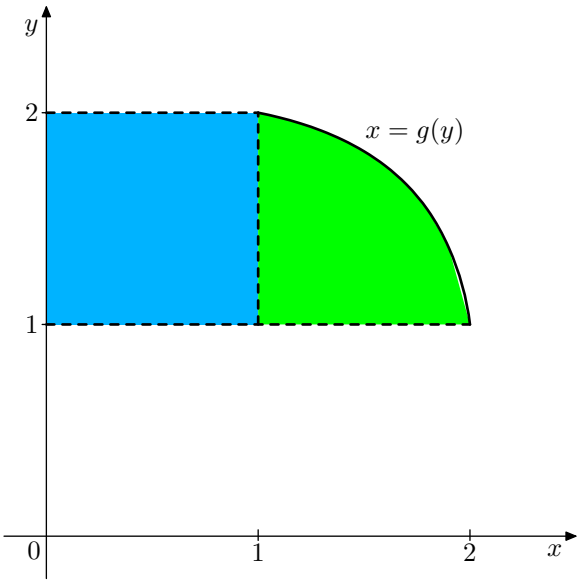
jest równa polu figury

$$\{(x, y) : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

zamalowanej na rysunku 9.



rys. 9



rys. 10

Z kolei całka

$$\int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127-7x^4}{15}} \, dx = \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127-7y^4}{15}} \, dy = \int_1^2 g(y) \, dy$$

jest równa polu figury

$$\{(x, y) : 1 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq x \leq g(y)\}$$

zamalowanej na rysunku 10.

Ponieważ każda z tych figur składa się z kwadratu jednostkowego (niebieskiego) oraz tego samego trójkąta krzywoliniowego (zielonego), pola obu figur są równe.

Odpowiedź: Podane całki są równe.

1046. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int\limits_{20}^{21}\sqrt{15x^3-30\,000}\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 315.

Rozwiązanie:

Sposób I (normalny)

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\sqrt{15x^3-30\,000}\,.$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{45x^2}{2\cdot\sqrt{15x^3-30\,000}}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{90x}{2\cdot\sqrt{15x^3-30\,000}} - \frac{45x^2\cdot 45x^2}{2\cdot 2\cdot (15x^3-30\,000)^{3/2}} = \\ &= \frac{180x\cdot (15x^3-30\,000)}{4\cdot (15x^3-30\,000)^{3/2}} - \frac{45x^2\cdot 45x^2}{4\cdot (15x^3-30\,000)^{3/2}} = \\ &= \frac{180\cdot 15\cdot x^4 - 180\cdot 30\,000x - 45^2\cdot x^4}{4\cdot (15x^3-30\,000)^{3/2}} = \\ &= \frac{12\cdot 15^2\cdot x^4 - 12\cdot 15\cdot 15\cdot 2000x - 9\cdot 15^2\cdot x^4}{4\cdot (15x^3-30\,000)^{3/2}} = \\ &= \frac{4\cdot 3\cdot 15^2\cdot x^4 - 8000\cdot 3\cdot 15^2\cdot x - 3\cdot 3\cdot 15^2\cdot x^4}{4\cdot (15x^3-30\,000)^{3/2}} = \\ &= \frac{3\cdot 15^2\cdot x\cdot (x^3-8000)}{4\cdot (15x^3-30\,000)^{3/2}} = \frac{3\cdot 15^2\cdot x\cdot (x^3-20^3)}{4\cdot (15x^3-30\,000)^{3/2}} > 0 \end{aligned}$$

dla $x > 20$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale całkowania.

Zatem wykres funkcji f w przedziale całkowania leży powyżej stycznej do wykresu w punkcie $x = 20$. Ponieważ $f(20) = 300$ oraz $f'(20) = 30$, dla $x \in (20, 21]$ zachodzi nierówność

$$f(x) > 300 + 30\cdot (x - 20)$$

i w konsekwencji

$$\int\limits_{20}^{21}\sqrt{15x^3-30\,000}\,dx > \int\limits_{20}^{21}300 + 30\cdot (x - 20)\,dx = 315\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest większa od 315.

Uwaga: Obliczenia przybliżone przy użyciu komputera pokazują, że dana całka ma w przybliżeniu wartość 315,00579, różni się więc od 315 o mniej niż jedną setną.

Sposób II (dla miłośników rachunków – w tym wypadku bardziej przeraża perspektywa rachunków niż same rachunki)

Kluczową w rozwiązaniu nierówność

$$f(x) > 300 + 30 \cdot (x - 20) ,$$

czyli

$$\sqrt{15x^3 - 30\,000} > 30x - 300 ,$$

można udowodnić bezpośrednio przed przekształcanie do postaci równoważnych. Otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} 15x^3 - 30\,000 &> 900x^2 - 18\,000x + 90\,000 , \\ x^3 - 2000 &> 60x^2 - 1200x + 6000 , \\ x^3 - 60x^2 + 1200x - 8000 &> 0 , \\ (x - 20)^3 &> 0 , \end{aligned}$$

co jest prawdą dla $x > 20$.

1047. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 8 \cdot \sqrt{x} + (x - 1) \cdot \ln x \, dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Rozwiązanie:
Sposób I (normalny)

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x) = 8 \cdot \sqrt{x} + (x - 1) \cdot \ln x .$$

Wówczas

$$f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \ln x + \frac{x - 1}{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} + \ln x + 1 - \frac{1}{x}$$

oraz

$$f''(x) = -\frac{2}{x^{3/2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x - 2 \cdot \sqrt{x} + 1}{x^2} = \frac{(1 - \sqrt{x})^2}{x^2} > 0$$

dla $x \neq 1$, $x > 0$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w całej swojej dziedzinie $(0, \infty)$, a więc także w przedziale całkowania $(1, 2)$.

Zatem wykres funkcji f w przedziale całkowania leży powyżej stycznej do wykresu w punkcie $x = 1$. Ponieważ $f(1) = 8$ oraz $f'(1) = 4$, dla $x \in (1, 2]$ zachodzi nierówność

$$f(x) > 8 + 4 \cdot (x - 1) = 4x + 4$$

i w konsekwencji

$$\int_1^2 8 \cdot \sqrt{x} + (x - 1) \cdot \ln x \, dx > \int_1^2 4x + 4 \, dx = 10 .$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest większa od 10.

Uwaga: Obliczenia przybliżone przy użyciu komputera pokazują, że dana całka ma w przybliżeniu wartość 10,00161, różni się więc od 10 o mniej niż jedną sześćsetną.

Sposób II (dla fanatycznych miłośników rachunków)

Daną całkę oznaczoną daje się wyliczyć i ma ona wartość

$$\frac{32 \cdot \sqrt{2}}{3} - \frac{61}{12}.$$

Teraz wystarczy "tylko" porównać tę liczbę z liczbą 10:

$$\begin{aligned} \frac{32 \cdot \sqrt{2}}{3} - \frac{61}{12} & ??? \ 10, \\ 128 \cdot \sqrt{2} - 61 & ??? \ 120, \\ 128 \cdot \sqrt{2} & ??? \ 181, \\ 2^{15} & ??? \ 181^2, \\ 32768 & > \ 32761. \end{aligned}$$