

1074. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t=\sqrt{1+\sqrt{x}}$, czyli $x=(t^2-1)^2$ i formalnie $dx=4(t^3-t) dt$, otrzymujemy

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \int_1^2 \frac{4(t^3-t) dt}{t} = 4 \cdot \int_1^2 t^2-1 dt = \frac{4t^3}{3}-4t \Big|_{t=1}^2 = \frac{32}{3}-8-\frac{4}{3}+4 = \frac{28}{3}-4 = \frac{16}{3}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość 16/3.

1075. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2}.$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^4+x^2} = \frac{1}{(x^2+1) \cdot x^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2},$$
$$1 = (Ax+B) \cdot x^2 + C \cdot x \cdot (x^2+1) + D \cdot (x^2+1),$$
$$1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D,$$
$$\begin{cases} 0 &= A+C \\ 0 &= B+D \\ 0 &= C \\ 1 &= D \end{cases}$$

(*)

Stąd otrzymujemy $A=0$ oraz $B=-1$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2} &= \int_1^{\sqrt{3}} -\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2} dx = -\arctg x - \frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{\sqrt{3}} = -\arctg \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \arctg 1 + 1 = \\ &= -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + 1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12}$.

1076. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 \frac{x^4 dx}{1+\sqrt[3]{4x^5-3}}.$$

Rozwiązanie:

Wykonamy podstawienie

$$t = \sqrt[3]{4x^5 - 3},$$

czyli

$$t^3 = 4x^5 - 3$$

oraz formalnie

$$3t^2 \, dt = 20x^4 \, dx,$$

zauważając przy tym, że zależność t od x jest rosnąca, a zatem przedziałowi całkowania $x \in [1, 2]$ odpowiada przedział $t \in [1, 5]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x^4 \, dx}{1 + \sqrt[3]{4x^5 - 3}} &= \frac{3}{20} \cdot \int_1^5 \frac{t^2 \, dt}{1 + t} = \frac{3}{20} \cdot \int_1^5 \frac{(t+1) \cdot (t-1) + 1}{1 + t} \, dt = \frac{3}{20} \cdot \int_1^5 t - 1 + \frac{1}{1 + t} \, dt = \\ &= \frac{3}{20} \cdot \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln |t + 1| \Big|_{t=1}^5 \right) = \frac{3}{20} \cdot \left(\frac{25}{2} - 5 + \ln 6 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 \right) = \frac{3}{20} \cdot (8 + \ln 3) = \\ &= \frac{6}{5} + \frac{3 \cdot \ln 3}{20}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość całki podanej w treści zadania jest równa $\frac{6}{5} + \frac{3 \cdot \ln 3}{20}$.

1077. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-1}^0 x \cdot \sqrt[3]{x+1} \, dx$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt[3]{x+1}, \qquad x = t^3 - 1$$

i formalnie

$$dx = 3t^2 \, dt.$$

Ponadto $x = -1$ odpowiada $t = 0$, a $x = 0$ odpowiada $t = 1$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [-1, 0]$ odpowiada przedziałowi $t \in [0, 1]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 x \cdot \sqrt[3]{x+1} \, dx &= \int_0^1 (t^3 - 1) \cdot t \cdot 3t^2 \, dt = 3 \cdot \int_0^1 t^6 - t^3 \, dt = 3 \cdot \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \Big|_{t=0}^1 \right) = \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4} \right) = 3 \cdot \frac{4-7}{28} = 3 \cdot \frac{-3}{28} = -\frac{9}{28}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-9/28$.

1078. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $x = t^6$ i formalnie $dx = 6t^5 dt$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}} &= \int_0^2 \frac{6t^5 dt}{t^3 + 2t^2} = 6 \cdot \int_0^2 \frac{t^3 dt}{t+2} = 6 \cdot \int_0^2 \frac{t^3 + 8}{t+2} - \frac{8}{t+2} dt = 6 \cdot \int_0^2 t^2 - 2t + 4 - \frac{8}{t+2} dt = \\ &= 2t^3 - 6t^2 + 24t - 48 \ln |t+2| \Big|_{t=0}^2 = 16 - 24 + 48 - 48 \ln 4 + 48 \ln 2 = 40 - 48 \ln 2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $40 - 48 \ln 2$.

1079. Wskazać takie liczby całkowite dodatnie a i b , że

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 - 14x + 50} = \frac{\pi}{2}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy funkcję podcałkową

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 - 14x + 50} = \int_a^b \frac{dx}{(x-7)^2 + 1},$$

a następnie wykonujemy podstawienie $t = x - 7$:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-7)^2 + 1} = \int_{a-7}^{b-7} \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t \Big|_{t=a-7}^{b-7} = \operatorname{arctg}(b-7) - \operatorname{arctg}(a-7).$$

Zauważmy, że

$$\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{2},$$

skąd wynika, że warunki zadania będą spełnione, jeżeli przyjmiemy $b-7=1$ i $a-7=-1$.

Odpowiedź

Warunki zadania są spełnione przez liczby $a=6$ i $b=8$.

1080. Podać wartość całki

$$\int_{-2021}^{2021} x^{2021} \cdot (x^{666} + 1)^{777} \cdot \sin \sin \cos \sin \sin x^{2021} dx.$$

Całka ma wartość 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

1081. Która całka ma większą wartość

$$\int_{-2022}^0 x^{2022} \cdot (x^{666} + 1)^{777} \cdot \sin \sin \cos \sin \sin x^{2021} dx$$

czy

$$\int_0^{2022} x^{2022} \cdot (x^{666} + 1)^{777} \cdot \sin \sin \cos \sin \sin x^{2021} dx \, ?$$

Funkcja podcałkowa jest parzysta, skąd wynika, że podane całki są równe.

1082. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}} \, .$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę sześciątów otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \sqrt[3]{(\sqrt{x}+1)^2} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)^2} \, dx \, .$$

Stosując podstawienie $t = \sqrt[3]{\sqrt{x}+1}$, czyli $x = t^6 - 2t^3 + 1$ i formalnie $dx = 6t^5 - 6t^2 \, dt$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt[3]{(\sqrt{x}+1)^2} \, dx &= \int_1^{\sqrt[3]{2}} t^2 \cdot (6t^5 - 6t^2) \, dt = \int_1^{\sqrt[3]{2}} 6t^7 - 6t^4 \, dt = \frac{3t^8}{4} - \frac{6t^5}{5} \Big|_{t=1}^{\sqrt[3]{2}} = \\ &= 3 \cdot \sqrt[3]{4} - \frac{12 \cdot \sqrt[3]{4}}{5} - \frac{3}{4} + \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{5} + \frac{9}{20} \, . \end{aligned}$$

Stosując podstawienie $t = \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}$, czyli $x = t^6 + 2t^3 + 1$ i formalnie $dx = 6t^5 + 6t^2 \, dt$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)^2} \, dx &= \int_{-1}^0 t^2 \cdot (6t^5 + 6t^2) \, dt = \int_{-1}^0 6t^7 + 6t^4 \, dt = \frac{3t^8}{4} + \frac{6t^5}{5} \Big|_{t=-1}^0 = \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{6}{5} = \frac{9}{20} \, . \end{aligned}$$

Ponadto

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x-1} \, dx = \frac{3 \cdot (x-1)^{4/3}}{4} \Big|_{x=0}^1 = -\frac{3}{4}$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}} &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \sqrt[3]{(\sqrt{x}+1)^2} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)^2} \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{5} + \frac{9}{20} - \frac{3}{4} + \frac{9}{20} \right) = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{10} + \frac{3}{40} \, . \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa $\frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{10} + \frac{3}{40}$.

1083. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \sin^{37} x \cdot \cos 37x \, dx .$$

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja podcałkowa jest okresowa z okresem 2π , całka po pełnym okresie nie zależy od początku przedziału całkowania. Mamy więc

$$\int_0^{2\pi} \sin^{37} x \cdot \cos 37x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{37} x \cdot \cos 37x \, dx ,$$

a ta całka ma wartość zero jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 0.