

Kolokwium nr 6: piątek 15.05.2026, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 797–848 i 889–1258.

**Zadania do omówienia¹ na ćwiczeniach 21, 28.04, 5 i 12.05.2026
oraz wykładzie 29-30.04.2026.**

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami

Całka Riemanna i zastosowania całki oznaczonej².

Początkowe siedem zadań zostało omówionych na wykładzie.

1093. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 x^3 dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

1094. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum całkowych Riemanna.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

1095. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają nierówność

$$f(x) \leq g(x)$$

dla każdego $x \in [a, b]$, to środek ciężkości figury

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

leży w punkcie $\left(\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}\right)$, gdzie

$$X = \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx, \quad Y = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx, \quad P = \int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego parabolą o równaniu $y = x^2$ i prostą o równaniu $y = x$.

1096. Pomarańczę o cienkiej skórce pokrojono na plasterki równej grubości. Które plasterki mają więcej skórki: te bliżej równika, czy te bliżej biegunów?

1097. Dane są dwie sfery o różnych promieniach. Dysponujemy cyrklem o stałym rozwarciu mniejszym od promienia mniejszej sfery. Na każdej ze sfer rysujemy tym cyrklem okrąg. Na której sferze narysowany okrąg ogranicza większe pole?

¹Zadania podobne do wcześniejszych będą pominięte.

²Zadania do omówienia na ćwiczeniach 21.04.2026 i części ćwiczeń 28.04.2026

1098. Gdzie leży środek ciężkości półsfery?

1099. Gdzie leży środek ciężkości półkuli?

1100. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 2^x dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkowitego na równe części.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

1101. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4}.$$

1102. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{ \left(x, \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \right) : x \in [0, 15] \right\}.$$

1103. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq \frac{1}{3} \right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

W każdym z kolejnych dwunastu zadań podaj **w postaci uproszczonej** wartość granicy ciągu.

1104. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{2n+k} + \dots + \frac{1}{6n} \right) = \dots$

1105. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+6} + \dots + \frac{1}{n+2k} + \dots + \frac{1}{9n} \right) = \dots$

1106. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+8} + \frac{1}{n+12} + \dots + \frac{1}{n+4k} + \dots + \frac{1}{81n} \right) = \dots$

1107. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2 + (n+1)^2} + \frac{n+2}{n^2 + (n+2)^2} + \dots + \frac{k}{n^2 + k^2} + \dots + \frac{7n}{50n^2} \right) = \dots$

1108. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n^2 + (n+1)^2} + \frac{n+2}{2n^2 + (n+2)^2} + \dots + \frac{k}{2n^2 + k^2} + \dots + \frac{5n}{27n^2} \right) = \dots$

1109. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3n^2 + 1} + \frac{2}{3n^2 + 4} + \dots + \frac{k}{3n^2 + k^2} + \dots + \frac{3n}{12n^2} \right) = \dots$

1110. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 4} + \dots + \frac{n}{n^2 + k^2} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right) = \dots$

$$1111. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{4n^2} \right) = \dots\dots\dots$$

$$1112. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \dots\dots\dots$$

$$1113. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+(n+1)^2} + \frac{n}{3n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \dots\dots\dots$$

$$1114. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{20} + 2^{20} + 3^{20} + \dots + n^{20}}{n^{21}} = \dots\dots\dots$$

$$1115. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2} + \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \frac{n}{(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2} \right) = \dots\dots\dots$$

1116. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum całkowych Riemanna.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

1117. Obliczyć całkę

$$\int_1^3 x^{44} dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum całkowych Riemanna.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

1118. Obliczyć całkę

$$\int_1^2 3^x dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum całkowych Riemanna.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

1119. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{ \left(x, \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) : x \in [0, 1] \right\}.$$

1120. Obliczyć pole powierzchni fragmentu paraboloidy obrotowej

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z \leq 1\}.$$

1121. Obliczyć objętość bryły

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

i wyznaczyć położenie jej środka ciężkości.

1122. Obliczyć objętość bryły

$$\{(x, y, z) : x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \leq z \leq 1\}$$

i wyznaczyć położenie jej środka ciężkości.

1123. Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ wyznaczyć środek ciężkości (x_n, y_n) obszaru Z_n ograniczonego prostą o równaniu $y = x$ i krzywą o równaniu $y = |x|^n$.

Obliczyć graniczne wartości $x_G = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oraz $y_G = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Jakich wartości x_G i y_G powinniśmy oczekiwać i dlaczego?

1124. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{n} \cdot (\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} + \dots + \sqrt[3]{2n})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}.$$

1125. Obliczyć objętość torusa powstałego przez obrót koła

$$\{(x, y) : (x-5)^2 + y^2 \leq 9\}$$

wokół osi OY .

1126. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{5} + \dots + \sqrt[4]{n-3} + \sqrt[4]{n-2} + \sqrt[4]{n-1} + \sqrt[4]{n})^p}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n-3} + \sqrt{n-2} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$$

dla tak dobranej liczby rzeczywistej p , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

1127. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n-3} + \sqrt{n-2} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n})^k}{(\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5} + \dots + \sqrt[3]{n-3} + \sqrt[3]{n-2} + \sqrt[3]{n-1} + \sqrt[3]{n})^m}$$

dla tak dobranych względnie pierwszych liczb naturalnych k i m , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

1128. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają nierówność

$$f(x) \leq g(x)$$

dla każdego $x \in [a, b]$, to środek ciężkości figury

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

leży w punkcie $\left(\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}\right)$, gdzie

$$X = \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx, \quad Y = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx, \quad P = \int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Wyznaczyć środek ciężkości (x_n, y_n) obszaru Z_n ograniczonego prostą o równaniu $y = x$ i krzywą o równaniu $y = |x| \cdot \sqrt[n]{|x|}$.

Obliczyć graniczne wartości $x_G = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oraz $y_G = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Jakiej zależności między x_G i y_G powinniśmy oczekiwać i dlaczego?

1129. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq -\frac{1}{3} \right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

1130. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{ (x, x^{3/2}) : x \in [0, 13] \right\}.$$

1131. Obliczyć objętość bryły

$$\left\{ (x, y, z) : (x^2 + y^2)^3 \leq z \leq 1 \right\}$$

i wyznaczyć położenie jej środka ciężkości.

1132. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n^2} + \frac{n}{2(n+1)^2} + \frac{n}{2(n+2)^2} + \frac{n}{2(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2} \right).$$

1133. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n^2} + \frac{n}{n^2 + (n+1)^2} + \frac{n}{n^2 + (n+2)^2} + \frac{n}{n^2 + (n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2} \right).$$

Dla podanych a, b, f obliczyć **jako granicę ciągu sum całkowych Riemanna** pole figury

$$\left\{ (x, y) : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x) \right\},$$

czyli całkę oznaczoną

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Wykorzystać podany ciąg podziałów $\left((x_{n,k})_{k=0}^n \right)_{n=1}^{\infty}$ przedziału $[a, b]$.

Następnie sprawdzić otrzymany wynik przez bezpośrednie całkowanie.

Potrzebny wzorek:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left((x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot f(x_{n,k}) \right).$$

1134. $a = 1, \quad b = e, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x_{n,k} = e^{k/n}.$

1135. $a = 1, \quad b = 2, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_{n,k} = 2^{k/n}.$

1136. $a = 1, \quad b = 8, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_{n,k} = \frac{(n+k)^3}{n^3}.$

1137. $a = 1, \quad b = 8, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_{n,k} = 8^{k/n}.$

Całka oznaczona jako granica ciągu sum Riemanna – przydatne wzory.

Założenia: Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowna.

Do tego dany jest ciąg podziałów przedziału $[a, b]$. W tym ciągu n -tym wyrazem jest podział $(x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,m_n-1}, x_{n,m_n})$, który jest podziałem na m_n przedziałików. I tak $x_{n,k}$ oznacza k -ty punkt n -tego podziału. Zakładamy, że średnice podziałów dążą do 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq m_n} (x_{n,k} - x_{n,k-1}) = 0.$$

I do tego jeszcze z każdego przedziałiku każdego podziału wybieramy dowolnie jeden punkt, a dokładniej z przedziałiku $[x_{n,k-1}, x_{n,k}]$ wybieramy punkt $y_{n,k}$.

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \left((x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot f(y_{n,k}) \right) = \int_a^b f(x) dx.$$

Przypadek szczególny: n -ty podział na n części (niekoniecznie równych), y -ki w prawych końcach.

Założenia: Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowna.

Do tego dany jest ciąg podziałów przedziału $[a, b]$. W tym ciągu n -tym wyrazem jest podział $(x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n-1}, x_{n,n})$, który jest podziałem na n przedziałików. I tak $x_{n,k}$ oznacza k -ty punkt n -tego podziału. Zakładamy, że średnice podziałów dążą do 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq n} (x_{n,k} - x_{n,k-1}) = 0.$$

Jako punkt z przedziałiku $[x_{n,k-1}, x_{n,k}]$ wybieramy punkt $y_{n,k} = x_{n,k}$.

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left((x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot f(x_{n,k}) \right) = \int_a^b f(x) dx.$$

Przypadek szczególny: n -ty podział jest podziałem na n równych przedziałów, y -ki są prawymi końcami.

Założenia: Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowna.

Przyjmujemy, że n -ty podział przedziału $[a, b]$ składa się z punktów

$$x_{n,k} = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$

oraz że są one jednocześnie y -kami wybranymi do obliczania wartości funkcji f :

$$y_{n,k} = x_{n,k} = a + k \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{b-a}{n} \cdot f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right) = \int_a^b f(x) dx.$$

Wzory na długości, pola, objętości i środki ciężkości

Musisz znać wzory (*). Pozostałe wzory, czyli (???), musisz umieć rozpoznać w poniższym spisie i umieć je zastosować.

$$P = \int_a^b g(x) - f(x) dx \quad (*)$$

$$\left(\frac{\int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx}{\int_a^b g(x) - f(x) dx}, \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx}{\int_a^b g(x) - f(x) dx} \right) \quad (???)$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (*)$$

$$\left(\frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}, \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \right) \quad (???)$$

$$V_{OX} = \pi \cdot \int_a^b g^2(x) - f^2(x) dx \quad x_s = \frac{\int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) dx}{\int_a^b g^2(x) - f^2(x) dx} \quad (???)$$

$$V_{OY} = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx \quad y_s = \frac{\int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) dx}{2 \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx} \quad (???)$$

$$P_{OX} = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad x_s = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \quad (???)$$

$$P_{OY} = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad y_s = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \quad (???)$$

Całki niewłaściwe³.

Początkowe 10 zadań jest przeznaczonych do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na zajęciach tylko na wyraźne życzenie studentów.

1138. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}}.$$

1139. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3}.$$

1140. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx.$$

1141. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx$$

jest zbieżna.

1142. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_4^{\infty} \frac{5x - 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$$

i po uproszczeniu wyniku określić, czy wartość ta jest większa czy mniejsza od 1.

1143. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{16x^3 + x}.$$

Doprowadzić wynik do postaci $\ln w$, gdzie w liczbą wymierną dodatnią.

1144. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^3 + x}$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

1145. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_6^{\infty} \frac{3x + 2}{x^3 - 4x} dx$$

³Zadania do omówienia na wykładzie 29/30.04.2026

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

1146. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_5^{\infty} \frac{2x+3}{x^3-9x} dx$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

1147. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_4^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+2) \cdot (x+5)}.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \ln \frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami pierwszymi, a w liczbą wymierną dodatnią.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartości całek zbieżnych.

1148. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \dots\dots\dots$

1149. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2} = \dots\dots\dots$

1150. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \dots\dots\dots$

1151. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2} = \dots\dots\dots$

1152. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^{1001/1000}} = \dots\dots\dots$

1153. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x} = \dots\dots\dots$

1154. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot (\ln \ln x)^2} = \dots\dots\dots$

1155. $\int_0^{\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} dx = \dots\dots\dots$

1156. $\int_0^{\infty} x^8 \cdot \sin x^9 dx = \dots\dots\dots$

1157. $\int_0^{32} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = \dots\dots\dots$

1158. $\int_0^1 \ln x dx = \dots\dots\dots$

1159. $\int_1^{\infty} \sqrt{x} dx = \dots\dots\dots$

1160. $\int_{-1}^1 x^{-43/45} dx = \dots\dots\dots$

1161. $\int_{-1}^1 x^{-47/45} dx = \dots\dots\dots$

1162. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{99}}{x^{100} + x^{66} + x^{44} + 1} dx = \dots\dots\dots$

1163. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{97}}{x^{100} + x^{66} + x^{44} + 1} dx = \dots\dots\dots$

1164. Obliczyć pole powierzchni obrotowej (torusa) powstałej przez obrót okręgu o równaniu

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$

wokół osi OY .

Pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej $\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$, gdzie $0 \leq a < b$ oraz $f \in C^1([a, b])$, wokół osi OY jest równe

$$2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

W rozwiązaniu może się też przydać wzór $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$.

1165. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^8 + x^7}} dx$$

jest zbieżna.

1166. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{24}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+3) \cdot (x+8)}.$$

1167. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{15}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+10) \cdot (x+12) \cdot (x+30)}.$$

1168. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x+3) \cdot (5x+3)}.$$

1169. Rozważamy bryłę

$$\left\{ (x, y, z) : x \geq 1 \wedge \sqrt{y^2 + z^2} \leq \frac{1}{x} \right\}.$$

Rozstrzygnąć, czy ta bryła ma skończoną objętość oraz czy powierzchnia ją ograniczająca ma skończone pole⁴.

1170. Rozważamy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{t^x}{t^{10} + 1} dt.$$

a) Wyznaczyć dziedzinę funkcji f .

b) Dowieść, że f jest funkcją wypukłą.

c) Dowieść, że wykres funkcji f jest symetryczny względem pewnej prostej pionowej.

d) Wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji f .

⁴Innymi słowy: Czy mając pokój w takim właśnie kształcie (tzw. patodeweloperka) można go pomalować skończoną ilością farby? Czy można go wypełnić skończoną ilością farby?

Wskazówki:

- Wykonać podstawienie $s = 1/t$.
- Udowodnić nierówność między średnimi ważonymi (doprecyzować założenia):

$$a^w \cdot b^{1-w} \leq wa + (1-w)b.$$

Zastosować ją do funkcji podcałkowych.

Niech $C(n) = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{x^{22} + x^{11} + 1}$. Dla danego n podaj takie $k \neq n$, że $C(k) = C(n)$.

1171. $n = 2$, $k = \dots\dots\dots$

1172. $n = 3$, $k = \dots\dots\dots$

1173. $n = 5$, $k = \dots\dots\dots$

1174. $n = 7$, $k = \dots\dots\dots$

Niech $C(n) = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{(x^{13} + 1)^3}$. Dla danego n podaj taką liczbę $k \neq n$, że $C(k) = C(n)$.

1175. $n = 5$, $k = \dots\dots\dots$

1176. $n = 7$, $k = \dots\dots\dots$

1177. $n = 11$, $k = \dots\dots\dots$

1178. $n = 13$, $k = \dots\dots\dots$

1179. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^6 + x^2} dx, \dots\dots\dots$; b) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^7 + x^3} dx, \dots\dots\dots$;

c) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^8 + x^4} dx, \dots\dots\dots$; d) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^9 + x^5} dx, \dots\dots\dots$

1180. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{x^{2p} + x^p} dx, \dots\dots\dots$; b) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{x^{2p} + x^p} dx, \dots\dots\dots$;

c) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^6 + x^4}}{x^{2p} + x^p} dx, \dots\dots\dots$; d) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^7 + x^5}}{x^{2p} + x^p} dx, \dots\dots\dots$

1181. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^\infty \frac{x^{2p} + x^p}{\sqrt{x^9 + x^4}} dx, \dots\dots\dots$; b) $\int_0^\infty \frac{x^{2p} + x^p}{\sqrt{x^{10} + x^5}} dx, \dots\dots\dots$;

c) $\int_0^\infty \frac{x^{2p} + x^p}{\sqrt{x^{11} + x^6}} dx, \dots\dots\dots$; d) $\int_0^\infty \frac{x^{2p} + x^p}{\sqrt{x^{12} + x^7}} dx, \dots\dots\dots$

Szeregi o wyrazach nieujemnych⁵.

Początkowych 8 zadań jest przeznaczonych do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

1182. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+n} - n)$$

jest zbieżny.

1183. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[4]{n^4+n} - n)$$

jest zbieżny.

1184. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}).$$

1185. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{28^n \cdot (n!)^3}.$$

1186. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 18^n}{\binom{3n}{n} \cdot n^n}.$$

1187. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n}$$

jest zbieżny.

1188. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}.$$

⁵Zadania do omówienia na części ćwiczeń 28.04.2026 i części ćwiczeń 5.05.2026

1189. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p+1}}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^p+1}}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt[4]{n^p+1}}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt[5]{n^p+1}}$,

1190. Dowieść, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

też jest zbieżny.

Wskazówka: Zastosować nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną do liczb a_n oraz $\frac{1}{n^2}$.

1191. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 9.$$

Udowodnić jedną z poniższych nierówności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq 5 \quad \text{(wersja łatwiejsza)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq 3 \quad \text{(wersja trudniejsza)}$$

Wskazówka: Skorzystać z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną.

1192. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leq 1.$$

1193. Dany jest taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \leq 64.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq C,$$

gdzie $C = 27$ (wersja łatwiejsza) lub $C = 16$ (wersja trudniejsza).

1194. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leq 2.$$

1195. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru k , dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[4]{n^5 + n^k} - \sqrt[4]{n^5})$$

jest zbieżny.

1196. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą dodatnią M , że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!}{p^n \cdot (n!)^4}$$

jest zbieżny dla $p > M$ i rozbieżny dla $0 < p < M$.

1197. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą dodatnią M , że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot p^n}{\binom{4n}{n} \cdot n^n}$$

jest rozbieżny dla $p > M$ i zbieżny dla $0 < p < M$.

1198. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{33^n + \binom{3n}{n}^2}}{6^n}$$

jest zbieżny.

1199. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{33^n + \binom{3n}{n}^2}}{7^n}$$

jest zbieżny.

1200. Dowieść, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt[3]{n^2}}$$

też jest zbieżny.

1201. Dowieść, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{a_n}}{n}$$

też jest zbieżny.

1202. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{n}}$$

jest rozbieżny.

1203. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k+1}}{n^7+1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{k+1}+1}}{n^7+1}$$

dla tak dobranej wartości parametru naturalnego k , że dokładnie jeden z tych szeregów jest zbieżny.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregów:

$$1204. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$1205. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$1206. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$1207. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{110n+10}{110n+11} \right)^n$$

$$1208. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}$$

$$1209. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n-n}}$$

$$1210. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot \sqrt{4^n+3^n}}$$

$$1211. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt[10]{n!}}$$

$$1212. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{1000}}{2^{n^2}}$$

$$1213. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n!}$$

$$1214. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4 - 7n^3 + 1}{19n^5 - 13n^2 + 1}$$

$$1215. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4 - 7n^3 + 1}{19n^6 - 13n^2 + 1}$$

1216. Obliczyć

$$\left[\log_3 \sum_{n=1}^{2^{2024}} \frac{1}{n} \right].$$

Przypomnij sobie listę 9 z pierwszego semestru !

Szeregi o wyrazach dowolnego znaku⁶.

Początkowych 7 zadań jest przeznaczonych do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

1217. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)}.$$

1218. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 2}.$$

1219. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)}.$$

1220. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+100}.$$

1221. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right).$$

1222. Wiedząc, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2,$$

obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występuje 100 wyrazów dodatnich i jeden ujemny:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{2} + \frac{1}{201} + \frac{1}{203} + \dots + \frac{1}{399} - \frac{1}{4} + \frac{1}{401} + \frac{1}{403} + \dots + \frac{1}{599} - \frac{1}{6} + \\ & + \frac{1}{601} + \frac{1}{603} + \dots + \frac{1}{799} - \frac{1}{8} + \frac{1}{801} + \frac{1}{803} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{10} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1003} + \dots \end{aligned}$$

1223. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n^2} \cdot \binom{2n}{n}^n \cdot n^{n^2}}{(n!)^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

⁶Zadania do omówienia na części ćwiczeń 5.05.2026 i ćwiczeniach 12.05.2026

1224. Wśród poniższych sześciu szeregów wskaż szereg zbieżny, a następnie udowodnij jego zbieżność. Jeśli potrafisz, oblicz jego sumę.

$$\begin{array}{lll} \text{(A)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{7n+10} & \text{(B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{3n^2+n} & \text{(C)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n^2+n} \\ \text{(D)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2+1)}{2n^2+1} & \text{(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n^2+1)}{77n-1} & \text{(F)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{2011n+2012} \end{array}$$

W każdym z czterech kolejnych zadań udziel siedmiu **niezależnych** odpowiedzi:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

X - nie istnieje szereg spełniający podany warunek

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że jego wyrazy są różne od zera, a ponadto ciąg jego wyrazów (a_n) spełnia podany warunek

1225. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, gdzie

a) $g = -3$

b) $g = -1$

c) $g = -1/3$

d) $g = 0$

e) $g = 1/3$

f) $g = 1$

g) $g = 3$

1226. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, gdzie

a) $g = -3$

b) $g = -1$

c) $g = -1/3$

d) $g = 0$

e) $g = 1/3$

f) $g = 1$

g) $g = 3$

1227. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = g$, gdzie

a) $g = -3$

b) $g = -1$

c) $g = -1/3$

d) $g = 0$

e) $g = 1/3$

f) $g = 1$

g) $g = 3$

1228. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$, gdzie

a) $g = -3$

b) $g = -1$

c) $g = -1/3$

d) $g = 0$

e) $g = 1/3$

f) $g = 1$

g) $g = 3$

1229. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których podany szereg liczbowy jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (p^2 - 3)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^2 - 5)^n}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^2 - 8)^n}{n}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^2 - 10)^n}{n^2}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

1230. W każdym z poniższych 16 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, ciąg (c_n) jest zbieżny, ciąg (d_n) jest rozbieżny. Co można wywnioskować o zbieżności

a) ciągu (a_n) b) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$

c) ciągu (b_n) d) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$

e) ciągu $(a_n + b_n)$ f) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

g) ciągu $(c_n + d_n)$ h) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)$

i) ciągu $(a_n + c_n)$ j) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n)$

k) ciągu $(a_n + d_n)$ l) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + d_n)$

m) ciągu $(b_n + c_n)$ n) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$

o) ciągu $(b_n + d_n)$ p) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + d_n)$

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

1231. $a_n > \frac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n , $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n > 0$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

1232. $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

1233. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_{n^2} = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

1234. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n = n$ dla $n \leq 100$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

1235. $a_n = 1$ dla nieskończenie wielu n , szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

1236. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.

1237. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.

1238. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

1239. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{2^n} + a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+2}} + \dots + a_{2^{n+1}-1})$ jest zbieżny,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

1240. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.

1241. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

1242. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot a^n}{n! \cdot n^{2n}}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

1243. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^n}$

1244. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^{n+1}}$

1245. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^{n+2}}$

1246. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)}$$

jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

1247. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 10^{10}}$$

jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Rozstrzygnąć, które z następujących szeregów są bezwzględnie zbieżne, które warunkowo zbieżne, a które rozbieżne. Wskazać wśród poniższych przykładów dwa szeregi, jeden zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, drugi rozbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, o ilorazie wyrazów a_n/b_n dążącym do 1.

1248. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

1249. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n}$

1250. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}}$

1251. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n}$

1252. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!}$

1253. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}}$

1254. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$

1255. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}}$

1256. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) (-1)^n$

1257. $1 - 1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots + 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \dots - \frac{1}{k} + \dots$ (k razy)

1258. $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \dots - \frac{1}{k^2} + \dots$ (k razy)

Podstawowe kryteria zbieżności szeregów.

1. WARUNEK KONIECZNY ZBIEŻNOŚCI.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU NIE ZALEŻY OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZENIE WIELU POZĄTKOWYCH WYRAZÓW.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. KRYTERIUM PORÓWNAWCZE.

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

4. KILKA WZORCOWYCH SZEREGÓW.

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny dla pozostałych q .

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ jest zbieżny dla $a > 1$, rozbieżny dla pozostałych a .

5. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. KRYTERIUM CAUCHY'EGO.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

7. KRYTERIUM D'ALEMBERTA DLA CIĄGÓW.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

8. KRYTERIUM CAUCHY'EGO DLA CIĄGÓW.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

9. ZBIEŻNOŚĆ BEZWZGLĘDNA.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

10. SZEREGI NAPRZEMIENNE (KRYTERIUM LEIBNIZA).

Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n$$

jest zbieżny.