

**1093.** Obliczyć całkę

$$\int_0^1 x^3 dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

*Rozwiązanie:*

Dla funkcji określonej na przedziale  $[0, 1]$  wzór z wersji 4 przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Wobec tego<sup>1</sup>

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^n k^3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} \right) = \frac{1}{4}.$$

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{4}.$$

**1094.** Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum całkowych Riemanna.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

*Rozwiązanie:*

Najpierw pokażę, w jaki sposób można naiwnie próbować rozwiązać to zadanie i dlaczego to się nie udaje.

Dla funkcji ciągłej  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  i ciągu podziałów przedziału na równe części, interesujący nas wzór ogólny przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Wobec tego

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \right).$$

---

<sup>1</sup>Korzystamy po drodze ze wzoru  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$ .

Trudnością, jaką napotykaemy w tym momencie, jest brak wzoru, który pozwoliłby wyrazić sumę

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$$

w prostej postaci pozwalającej na przejście graniczne.

No cóż, naiwnie sądziliśmy, że najłatwiej będzie wybrać możliwie najprostszy ciąg podziałów przedziału całkowania, a mianowicie podziały na równe części. Ale co nam z tego, że sam podział jest ładny, skoro funkcja podcałkowa w punktach podziału przyjmuje wartości wykluczające zwinienie otrzymanej sumy do prostej postaci.

Musimy więc zmienić nasze priorytety. Nieważne, czy przedziałki podziału są równe, czy nie. Przede wszystkim wartości funkcji podcałkowej w punktach podziału muszą być możliwie najprostsze. Ponieważ w rozważanym przykładzie funkcją podcałkową jest pierwiastek kwadratowy, punktami podziału powinny być liczby, których pierwiastki kwadratowe są liczbami wymiernymi, a jeszcze lepiej, jeśli nie będą to byle jakie liczby wymierne chaotycznie rozmieszczone, ale liczby wymierne tworzące w miarę regularny ciąg<sup>2</sup>, na przykład ciąg arytmetyczny.

To prowadzi do pomysłu, aby za punkty  $n$ -tego podziału przyjąć kwadraty liczb wymiernych tworzących skończony ciąg arytmetyczny. Oczywiście taki, aby zerowy punkt podziału był lewym, a  $n$ -ty prawym końcem przedziału całkowania, czyli

$$x_{n,k} = \frac{k^2}{n^2}.$$

Zastosowanie ma wersja z ciągiem podziałów, gdzie  $n$ -ty podział jest podziałem na  $n$  niekoniecznie równych części, a  $y$ -ki są w prawych końcach przedziałów podziału:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( (x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot f(x_{n,k}) \right). \quad (\clubsuit)$$

W naszym wypadku

$$a = 0, \quad b = 1, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad x_{n,k} = \frac{k^2}{n^2},$$

skąd po podstawieniu powyższych danych do wzoru  $(\clubsuit)$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \left( \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{k^2}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \left( \frac{2k-1}{n^2} \right) \cdot \frac{k}{n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^n (2k^2 - k) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^3} \cdot \left( 2 \cdot \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \right) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^3} \cdot \left( \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{3} - \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1) \cdot (2n+1)}{3n^2} - \frac{n+1}{2n^2} \right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Tu mamy na myśli ciąg skończony, ale słowo "skończony" pomijamy, aby nie zaburzać płynności i tak już rozbudowanego zdania.

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \Big|_{x=0}^1 = \frac{2}{3}.$$

**1095.** Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spełniają nierówność

$$f(x) \leq g(x)$$

dla każdego  $x \in [a, b]$ , to środek ciężkości figury

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

leży w punkcie  $\left(\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}\right)$ , gdzie

$$X = \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx, \quad Y = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx, \quad P = \int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego parabolą o równaniu  $y = x^2$  i prostą o równaniu  $y = x$ .

*Rozwiązanie:*

Ponieważ dane w zadaniu parabola i prosta przecinają się w punktach  $(0, 0)$  i  $(1, 1)$ , a przy tym  $x^2 \leq x$  dla  $x \in [0, 1]$ , przeprowadzamy obliczenia dla  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $f(x) = x^2$  oraz  $g(x) = x$ . Otrzymujemy kolejno:

$$X = \int_0^1 x \cdot (x - x^2) dx = \int_0^1 x^2 - x^3 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^2 - x^4 dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{1}{15},$$

$$P = \int_0^1 x - x^2 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

W rezultacie współrzędne środka ciężkości danej figury to  $X/P = (1/12)/(1/6) = 1/2$  oraz  $Y/P = (1/15)/(1/6) = (2/5)$ .

*Odpowiedź:*

Środek ciężkości danej figury leży w punkcie  $(1/2, 2/5)$ .

**1096.** Pomarańczę o cienkiej skórce pokrojono na plasterki równej grubości. Które plasterki mają więcej skórki: te bliżej równika, czy te bliżej biegunów?

**Odpowiedź:** Wszystkie plastry zawierają tyle samo skórki.

**1097.** Dane są dwie sfery o różnych promieniach. Dysponujemy cyrklem o stałym rozwarciu mniejszym od promienia mniejszej sfery. Na każdej ze sfer rysujemy tym cyrklem okrąg. Na której sferze narysowany okrąg ogranicza większe pole?

**Odpowiedź:** Pole ograniczone okręgiem nie zależy od promienia sfery, a jedynie od rozwarcia cyrkla użytego do narysowania okręgu. Takie samo jest pole koła narysowanego na płaszczyźnie. Pole całej sfery jest równe polu koła o promieniu równym średnicy sfery – na sferze rysujemy to tak: nóżka cyrkla w jednym biegunie, ołówek ślizga się po drugim biegunie. Natomiast półsfera powstaje przez umieszczenie nóżki na biegunie i narysowanie równika – zastanów się jaki jest wówczas rozstaw cyrkla i sprawdź, że pole się zgadza.

**1098.** Gdzie leży środek ciężkości półsfery?

**Odpowiedź:** W połowie wysokości.

**1099.** Gdzie leży środek ciężkości półkuli?

**Odpowiedź:** W 3/8 wysokości.

**1100.** Obliczyć całkę

$$\int_0^1 2^x dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

*Rozwiązanie:*

Dla funkcji określonej na przedziale  $[0, 1]$  wzór z wersji 4 przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Wobec tego<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^1 2^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n 2^{k/n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot 2^{1/n} \cdot \frac{(2^{1/n})^n - 1}{2^{1/n} - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot 2^{1/n} \cdot \frac{2 - 1}{2^{1/n} - 1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{2^{1/n}}{2^{1/n} - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^{1/n} \cdot \frac{1/n}{2^{1/n} - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1} = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1}. \end{aligned}$$

Jeżeli istnieje granica (funkcji)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2^x - 1},$$

to istnieje również granica (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1}$$

<sup>3</sup>Korzystamy po drodze ze wzoru na sumę postępu geometrycznego.

i są one równe. Korzystając z reguły de l'Hospitala otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^x \cdot \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

i tyle właśnie wynosi wartość szukanej całki.

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_{x=0}^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

**1101.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4}.$$

*Rozwiązanie:*

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} \frac{(k/n)^3}{5(k/n)^4 + 1} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie  $f(x) = \frac{x^3}{5x^4 + 1}$ .

Ponieważ funkcja  $f$  jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągłowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{x^3}{5x^4 + 1} dx = \frac{1}{20} \cdot \int_0^2 \frac{20x^3}{5x^4 + 1} dx = \\ &= \frac{\ln(5x^4 + 1)}{20} \Big|_{x=0}^2 = \frac{\ln 81 - \ln 1}{20} = \frac{4 \ln 3}{20} = \frac{\ln 3}{5}, \end{aligned}$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy ze wzoru

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C.$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4} = \frac{\ln 3}{5}.$$

**1102.** Obliczyć długość krzywej

$$\left\{ \left( x, \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \right) : x \in [0, 15] \right\}.$$

*Rozwiązanie:*

Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji  $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2}$  na przedziale  $[a, b] = [0, 15]$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx &= \int_0^{15} \sqrt{1+(\sqrt{x})^2} dx = \int_0^{15} \sqrt{1+x} dx = \frac{2 \cdot (x+1)^{3/2}}{3} \Big|_{x=0}^{15} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot (64-1) = \frac{2}{3} \cdot 63 = 42. \end{aligned}$$

*Odpowiedź:*

Dana w zadaniu krzywa ma długość 42.

**1103.** Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq \frac{1}{3} \right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

*Rozwiązanie:*

Zdefiniowany w treści zadania odcinek kuli powstaje przez obrót obszaru

$$\left\{ (x, y) : \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

wokół osi OX. Jego środek ciężkości leży więc w punkcie  $(x_s, 0, 0)$ , gdzie

$$x_s = \frac{\pi \cdot \int_{1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx}{\pi \cdot \int_{1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx}.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} \int_{1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx &= \int_{1/3}^1 x - x^3 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big|_{x=1/3}^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{18} + \frac{1}{324} = \frac{162-81-18+1}{324} = \frac{64}{324} = \frac{16}{81} \end{aligned}$$

oraz

$$\int_{1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{1/3}^1 1-x^2 dx = x - \frac{x^3}{3} \Big|_{x=1/3}^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{81} = \frac{81-27-27+1}{81} = \frac{28}{81},$$

skąd

$$x_s = \frac{16/81}{28/81} = \frac{4}{7}.$$

**Odpowiedź:** Środek ciężkości odcinka kuli zdefiniowanego w treści zadania leży w punkcie  $\left(\frac{4}{7}, 0, 0\right)$ .

W każdym z kolejnych dwunastu zadań podaj w postaci uproszczonej wartość granicy ciągu.

$$1104. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{2n+k} + \dots + \frac{1}{6n} \right) = \ln 3$$

$$1105. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+6} + \dots + \frac{1}{n+2k} + \dots + \frac{1}{9n} \right) = \ln 3$$

$$1106. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+8} + \frac{1}{n+12} + \dots + \frac{1}{n+4k} + \dots + \frac{1}{81n} \right) = \ln 3$$

$$1107. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n^2+(n+1)^2} + \frac{n+2}{n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{k}{n^2+k^2} + \dots + \frac{7n}{50n^2} \right) = \ln 5$$

$$1108. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{2n^2+(n+1)^2} + \frac{n+2}{2n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{k}{2n^2+k^2} + \dots + \frac{5n}{27n^2} \right) = \ln 3$$

$$1109. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3n^2+1} + \frac{2}{3n^2+4} + \dots + \frac{k}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{3n}{12n^2} \right) = \ln 2$$

$$1110. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$1111. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{4n^2} \right) = \frac{\pi}{6 \cdot \sqrt{3}} \quad \left( = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{18} \right)$$

$$1112. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \frac{\pi}{3 \cdot \sqrt{3}} \quad \left( = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{9} \right)$$

$$1113. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{3n^2+(n+1)^2} + \frac{n}{3n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \frac{\pi}{6 \cdot \sqrt{3}}$$

$$1114. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{20} + 2^{20} + 3^{20} + \dots + n^{20}}{n^{21}} = 1/21$$

$$1115. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2} + \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \frac{n}{(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2} \right) = 1/2$$

1126. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{5} + \dots + \sqrt[4]{n-3} + \sqrt[4]{n-2} + \sqrt[4]{n-1} + \sqrt[4]{n} \right)^p}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n-3} + \sqrt{n-2} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$$

dla tak dobranej liczby rzeczywistej  $p$ , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

*Rozwiązanie:*

Oczekujemy, że suma występująca w mianowniku jest rzędu wielkości  $n^{3/2}$ , gdyż mamy tam  $n$  składników, a większość z nich jest rzędu  $n^{1/2}$ .

Zauważmy, że

$$n^{-3/2} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie  $f(x) = \sqrt{x}$ .

Ponieważ funkcja  $f$  jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągłowi podziałów przedziału  $[0, 1]$  na  $n$  przedziałów równej długości  $1/n$  dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2x^{3/2}}{3} \Big|_{x=0}^1 = \frac{2}{3}.$$

Analogicznie oczekujemy, że suma występująca w liczniku jest rzędu wielkości  $n^{5/4}$ , gdyż mamy tam  $n$  składników, a większość z nich jest rzędu  $n^{1/4}$ .

Zauważmy, że

$$n^{-5/4} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[4]{i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[4]{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie  $g(x) = \sqrt[4]{x}$ .

Ponieważ funkcja  $g$  jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągłowi podziałów przedziału  $[0, 1]$  na  $n$  przedziałów równej długości  $1/n$  dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \sqrt[4]{x} dx = \frac{4x^{5/4}}{5} \Big|_{x=0}^1 = \frac{4}{5}.$$

Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt[4]{i}\right)^p}{\sum_{i=1}^n \sqrt{i}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^{5p/4-3/2} \cdot \frac{\left(n^{-5/4} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[4]{i}\right)^p}{n^{-3/2} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{i}} \right) = \frac{(4/5)^p}{2/3},$$

o ile  $5p/4 = 3/2$ , czyli  $p = 6/5$ .

Dla tej wartości  $p$  szukana granica jest równa

$$\frac{(4/5)^{6/5}}{2/3} = \frac{6 \cdot \sqrt[5]{4}}{5 \cdot \sqrt[5]{5}}.$$

**Odpowiedź:** Dana w zadaniu granica ciągu jest równa  $\frac{6 \cdot \sqrt[5]{4}}{5 \cdot \sqrt[5]{5}}$  dla  $p = 6/5$ .

**1127.** Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n-3} + \sqrt{n-2} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n})^k}{(\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5} + \dots + \sqrt[3]{n-3} + \sqrt[3]{n-2} + \sqrt[3]{n-1} + \sqrt[3]{n})^m}$$

dla tak dobranych względnie pierwszych liczb naturalnych  $k$  i  $m$ , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Rozwiązanie:

Oczekujemy, że suma występująca w liczniku jest rzędu wielkości  $n^{3/2}$ , gdyż mamy tam  $n$  składników, a większość z nich jest rzędu  $n^{1/2}$ .

Zauważmy, że

$$n^{-3/2} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie  $f(x) = \sqrt{x}$ .

Ponieważ funkcja  $f$  jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągłowi podziałów przedziału  $[0, 1]$  na  $n$  przedziałów równej długości  $1/n$  dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2x^{3/2}}{3} \Big|_{x=0}^1 = \frac{2}{3}.$$

Analogicznie oczekujemy, że suma występująca w mianowniku jest rzędu wielkości  $n^{4/3}$ , gdyż mamy tam  $n$  składników, a większość z nich jest rzędu  $n^{1/3}$ .

Zauważmy, że

$$n^{-4/3} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ .

Ponieważ funkcja  $g$  jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągłowi podziałów przedziału  $[0, 1]$  na  $n$  przedziałów równej długości  $1/n$  dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3x^{4/3}}{4} \Big|_{x=0}^1 = \frac{3}{4}.$$

Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{i}\right)^k}{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{i}\right)^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^{3k/2-4m/3} \cdot \frac{\left(n^{-3/2} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{i}\right)^k}{\left(n^{-4/3} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{i}\right)^m} \right) = \frac{(2/3)^k}{(3/4)^m},$$

o ile  $3k/2 = 4m/3$ , czyli  $k = 8$  i  $m = 9$ .

Dla tych wartości  $k$  i  $m$  szukana granica jest równa

$$\frac{2^8 \cdot 4^9}{3^8 \cdot 3^9} = \frac{2^{26}}{3^{17}}.$$

**Odpowiedź:** Dana w zadaniu granica ciągu jest równa  $2^{26}/3^{17}$  dla  $k = 8$  i  $m = 9$ .

**1128.** Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spełniają nierówność

$$f(x) \leq g(x)$$

dla każdego  $x \in [a, b]$ , to środek ciężkości figury

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

leży w punkcie  $\left(\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}\right)$ , gdzie

$$X = \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx, \quad Y = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx, \quad P = \int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Wyznaczyć środek ciężkości  $(x_n, y_n)$  obszaru  $Z_n$  ograniczonego prostą o równaniu  $y = x$  i krzywą o równaniu  $y = |x| \cdot \sqrt[n]{|x|}$ .

Obliczyć graniczne wartości  $x_G = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  oraz  $y_G = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Jakiej zależności między  $x_G$  i  $y_G$  powinniśmy oczekiwać i dlaczego?

*Rozwiązanie:*

Ponieważ dane w zadaniu krzywa i prosta przecinają się w punktach  $(0, 0)$  i  $(1, 1)$ , a przy tym  $|x| \cdot \sqrt[n]{|x|} \leq x$  dla  $x \in [0, 1]$ , przeprowadzamy obliczenia dla  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $f(x) = x^{(n+1)/n}$  oraz  $g(x) = x$ . Otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} X &= \int_0^1 x \cdot (x - x^{(n+1)/n}) dx = \int_0^1 x^2 - x^{(2n+1)/n} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{(3n+1)/n}}{(3n+1)/n} \Bigg|_{x=0}^1 = \frac{1}{3} - \frac{n}{3n+1} = \\ &= \frac{1}{3 \cdot (3n+1)}, \end{aligned}$$

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^2 - x^{2(n+1)/n} dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^{(3n+2)/n}}{2 \cdot (3n+2)/n} \Bigg|_{x=0}^1 = \frac{1}{6} - \frac{n}{2 \cdot (3n+2)} = \frac{1}{3 \cdot (3n+2)},$$

$$P = \int_0^1 x - x^{(n+1)/n} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^{(2n+1)/n}}{(2n+1)/n} \Bigg|_{x=0}^1 = \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2 \cdot (2n+1)}.$$

W rezultacie współrzędne środka ciężkości figury  $Z_n$  to

$$x_n = \frac{X}{P} = \frac{2 \cdot (2n+1)}{3 \cdot (3n+1)} \quad \text{oraz} \quad y_n = \frac{Y}{P} = \frac{2 \cdot (2n+1)}{3 \cdot (3n+2)}.$$

Wobec tego  $x_G = y_G = 4/9$ .

Dla bardzo dużych  $n$  obszar  $Z_n$  jest nieznacznie pogrubionym odcinkiem o końcach  $(0, 0)$  i  $(1, 1)$ , więc należy oczekiwać, że jego środek ciężkości leży bardzo blisko tego odcinka. W konsekwencji **należy oczekiwać, że  $x_G = y_G$** .

**1129.** Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq -\frac{1}{3} \right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

*Rozwiązanie:*

Zdefiniowany w treści zadania odcinek kuli powstaje przez obrót obszaru

$$\left\{ (x, y) : -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

wokół osi OX. Jego środek ciężkości leży więc w punkcie  $(x_s, 0, 0)$ , gdzie

$$x_s = \frac{\pi \cdot \int_{-1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx}{\pi \cdot \int_{-1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx}.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} \int_{-1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx &= \int_{-1/3}^1 x - x^3 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big|_{x=-1/3}^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{18} + \frac{1}{324} = \frac{162 - 81 - 18 + 1}{324} = \frac{64}{324} = \frac{16}{81} \end{aligned}$$

oraz

$$\int_{-1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{-1/3}^1 1 - x^2 dx = x - \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-1/3}^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{81} = \frac{81 - 27 + 27 - 1}{81} = \frac{80}{81},$$

skąd

$$x_s = \frac{16/81}{80/81} = \frac{1}{5}.$$

**Odpowiedź:** Środek ciężkości odcinka kuli zdefiniowanego w treści zadania leży w punkcie  $(\frac{1}{5}, 0, 0)$ .

**1130.** Obliczyć długość krzywej

$$\{(x, x^{3/2}) : x \in [0, 13]\}.$$

*Rozwiązanie:*

Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji  $f(x) = x^{3/2}$  na przedziale  $[a, b] = [0, 13]$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= \int_0^{13} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^{13} \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cdot x} dx = \frac{8 \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot x + 1\right)^{3/2}}{27} \Big|_{x=0}^{13} = \\ &= \frac{8}{27} \cdot \left( \left(\frac{9 \cdot 13 + 4}{4}\right)^{3/2} - 1 \right) = \frac{8}{27} \cdot \left( \left(\frac{117 + 4}{4}\right)^{3/2} - 1 \right) = \frac{8}{27} \cdot \left( \left(\frac{121}{4}\right)^{3/2} - 1 \right) = \\ &= \frac{8}{27} \cdot \left( \frac{1331}{8} - 1 \right) = \frac{1331 - 8}{27} = \frac{1323}{27} = \frac{1350 - 27}{27} = \frac{2700}{27} - 1 = 100 - 1 = 99. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Dana w zadaniu krzywa ma długość 99.

**1131.** Obliczyć objętość bryły

$$\{(x, y, z) : (x^2 + y^2)^3 \leq z \leq 1\}$$

i wyznaczyć położenie jej środka ciężkości.

*Rozwiązanie:*

Dana w zadaniu bryła powstaje przez obrót zbioru<sup>4</sup>

$$\{(x, z) : x \in [0, 1] \wedge x^6 \leq z \leq 1\}$$

wokół osi  $OZ$ .

Zastosujemy więc wzory

$$V_{OY} = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx \qquad y_s = \frac{\int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) dx}{2 \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx},$$

przy czym rolę współrzędnej  $y$  przejmie współrzędna  $z$ :

$$V_{OZ} = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx \qquad z_s = \frac{\int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) dx}{2 \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx}$$

We wzorach tych przyjmujemy  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $g(x) = 1$ ,  $f(x) = x^6$ .

Całkowanie prowadzi do

$$C_1 = \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx = \int_0^1 x \cdot (1 - x^6) dx = \int_0^1 x - x^7 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^8}{8} \Big|_{x=0}^1 = \frac{3}{8}$$

oraz

$$C_2 = \int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) dx = \int_0^1 x \cdot (1 - x^{12}) dx = \int_0^1 x - x^{13} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^{14}}{14} \Big|_{x=0}^1 = \frac{3}{7}.$$

Wobec tego objętość bryły jest równa

$$2\pi \cdot C_1 = \frac{3\pi}{4},$$

a współrzędna  $z$ -owa<sup>5</sup> jej środka ciężkości wynosi

$$\frac{C_2}{2 \cdot C_1} = \frac{3/7}{3/4} = \frac{4}{7}.$$

**Odpowiedź:** Podana bryła ma objętość  $3\pi/4$ , a jej środek ciężkości leży w punkcie  $(0, 0, 4/7)$ .

**Uwaga:** Podana bryła powstaje przez obrót zbioru

$$\{(x, z) : z \in [0, 1] \wedge 0 \leq x \leq \sqrt[6]{z}\}$$

wokół osi  $OZ$  (tym razem w roli osi argumentu), wobec czego zadanie można też rozwiązać wykorzystując odpowiednio zmodyfikowane wzory

$$V_{OX} = \pi \cdot \int_a^b g^2(x) - f^2(x) dx \qquad x_s = \frac{\int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) dx}{\int_a^b g^2(x) - f^2(x) dx}.$$

<sup>4</sup>Zbiór ten znajduje się w płaszczyźnie  $XOZ$ .

<sup>5</sup>Środek ciężkości figury obrotowej leży na osi obrotu, więc w tym wypadku współrzędne  $x$ -owa i  $y$ -owa środka ciężkości są zerami.

**1138.** Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}}.$$

*Rozwiązanie:*

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} = \int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} + \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}}.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} \leq \int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{0 + x^8}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{4-\pi}} < +\infty,$$

bo  $4 - \pi < 1$ .

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} \leq \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + 0}} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{4,5-\pi}} < +\infty,$$

bo  $4,5 - \pi > 1$ .

**1139.** Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3}.$$

*Rozwiązanie:*

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} = \int_0^1 \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} + \int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3}.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} \leq \int_0^1 \frac{x^e dx}{0 + x^3} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{3-e}} < +\infty,$$

bo  $3 - e < 1$ .

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} \leq \int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + 0} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{4-e}} < +\infty,$$

bo  $4 - e > 1$ .

**1140.** Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx.$$

*Rozwiązanie:*

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx \leq \int_0^1 \frac{\sqrt{3x^3 + x^3}}{\sqrt[3]{0 + x^7}} dx = 2 \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^{5/6}} < +\infty,$$

bo  $5/6 < 1$ .

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + 3x^5}}{\sqrt[3]{x^{11} + 0}} dx = 2 \cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{7/6}} < +\infty,$$

bo  $7/6 > 1$ .

**1141.** Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru  $p$ , dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx$$

jest zbieżna.

*Rozwiązanie:*

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx = \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx.$$

Zbadamy, dla których wartości parametru  $p$  całki występujące w powyższej sumie są zbieżne. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx \leq \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{0 + x^3}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2-p}} < +\infty,$$

o ile  $3/2 - p < 1$ , czyli  $p > 1/2$ .

Ponadto

$$\int_1^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx \geq \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{x^3 + x^3}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2-p}} = +\infty,$$

o ile  $3/2 - p \geq 1$ , czyli  $p \leq 1/2$ .

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + 0}} dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{2-p}} < +\infty,$$

o ile  $2 - p > 1$ , czyli  $p < 1$ .

Ponadto

$$\int_1^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx \geq \int_1^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^4}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{2-p}} = +\infty,$$

o ile  $2 - p \leq 1$ , czyli  $p \geq 1$ .

Wniosek: Jeżeli  $1/2 < p < 1$ , to obydwie całki powstałe z podziału przedziału całkowania są zbieżne, a więc i wyjściowa całka jest zbieżna. W przeciwnym razie jedna z tych całek jest rozbieżna, a zatem wyjściowa całka jest rozbieżna.

**Odpowiedź:** Podana całka jest zbieżna dla  $p \in (1/2, 1)$ .

**1142.** Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_4^{\infty} \frac{5x - 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$$

i po uproszczeniu wyniku określić, czy wartość ta jest większa czy mniejsza od 1.

*Rozwiązanie:*

Zauważamy, że liczby 0 i 1 są miejscami zerowymi wielomianu sześciennego występującego w mianowniku funkcji podcałkowej, skąd otrzymujemy

$$x^3 + x^2 - 2x = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 2).$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{5x - 2}{x \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2},$$

$$5x - 2 = A \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) + B \cdot x \cdot (x + 2) + C \cdot x \cdot (x - 1).$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi  $A$ ,  $B$  i  $C$ , porównując współczynniki przy jednakowych potęgach  $x$ 'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za  $x$  wartości 0, 1 i  $-2$  otrzymując odpowiednio

$$\text{dla } x = 0 \quad -2 = -2A, \quad \text{skąd} \quad A = 1,$$

$$\text{dla } x = 1 \quad 3 = 3B, \quad \text{skąd} \quad B = 1,$$

$$\text{dla } x = -2 \quad -12 = 6C, \quad \text{skąd} \quad C = -2.$$

Wobec tego

$$\int_4^{\infty} \frac{5x - 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \int_4^{\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x + 2} dx = \ln |x| + \ln |x - 1| - 2 \cdot \ln |x + 2| \Big|_{x=4}^{\infty} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln |x| + \ln |x-1| - 2 \cdot \ln |x+2|) \right) - \ln 4 - \ln 3 + 2 \cdot \ln 6 = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x \cdot (x-1)}{(x+2)^2} \right) + \ln 3 = \\
&= \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (x-1)}{(x+2)^2} \right) + \ln 3 = \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2} \right) + \ln 3 = \ln 1 + \ln 3 = \ln 3 > \ln e = 1.
\end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa ma wartość  $\ln 3 > 1$ .

**Uwaga:** Całki

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x+2} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln |x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln |x-1|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln |x+2|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności  $\infty - \infty$ .

**1143.** Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{16x^3 + x}.$$

Doprowadzić wynik do postaci  $\ln w$ , gdzie  $w$  liczbą wymierną dodatnią.

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x \cdot (16x^2 + 1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{16x^2 + 1}, \\
1 &= A \cdot (16x^2 + 1) + (Bx + C) \cdot x, \\
1 &= 16Ax^2 + A + Bx^2 + Cx, \\
1 = A, \quad 0 = C, \quad 0 &= 16A + B, \\
A = 1, \quad B = -16, \quad C &= 0.
\end{aligned}$$

Wobec tego<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}
\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (16x^2 + 1)} &= \int_{1/3}^{\infty} \frac{1}{x} - \frac{16x}{16x^2 + 1} dx = \left( \ln |x| - \frac{1}{2} \cdot \ln (16x^2 + 1) \right) \Big|_{x=1/3}^{\infty} = \\
&= \ln \sqrt{\frac{x^2}{16x^2 + 1}} \Big|_{x=1/3}^{\infty} = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\frac{x^2}{16x^2 + 1}} \right) - \ln \sqrt{\frac{1/9}{\frac{16}{9} + 1}} = \ln \sqrt{\frac{1}{16}} - \ln \sqrt{\frac{1}{16 + 9}} = \\
&= \ln \frac{1}{4} - \ln \frac{1}{5} = \ln \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

<sup>6</sup>Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa ma wartość  $\ln \frac{5}{4}$ .

**Uwaga:** Całki

$$\int_{1/3}^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_{1/3}^{\infty} \frac{x}{16x^2+1} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln |x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln (16x^2+1)$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności  $\infty - \infty$ .

**Odpowiednie porządzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane.**

1144. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^3+x}$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{(x^2+1) \cdot x} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x},$$

$$1 = (Ax+B) \cdot x + C \cdot (x^2+1),$$

$$1 = Ax^2 + Bx + Cx^2 + C,$$

$$\begin{cases} 0 = A+C \\ 0 = B \\ 1 = C \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy  $A = -1$ .

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_7^{\infty} \frac{dx}{x^3+x} &= \int_7^{\infty} -\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \ln|x| \Big|_{x=7}^{\infty} = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \ln x \right) \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \\ &= \left( \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1+x^{-2}}} \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \ln 1 + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \frac{\ln 50}{2} - \ln 7. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość  $\frac{\ln 50}{2} - \ln 7$ .

**Uwaga:** Poprawne wykonanie przejścia granicznego jest istotną częścią zadania. Bez tego zadanie nie może być uznanane za rozwiązane nawet przy poprawnym wyniku liczbowym.

**1145.** Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_6^{\infty} \frac{3x+2}{x^3-4x} dx$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{x^3-4x} &= \frac{3x+2}{(x-2) \cdot x \cdot (x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2}, \\ 3x+2 &= A \cdot x \cdot (x+2) + B \cdot (x-2) \cdot (x+2) + C \cdot (x-2) \cdot x. \end{aligned} \quad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości  $(\heartsuit)$ , a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi  $A, B, C$ .

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości  $(\heartsuit)$  kolejno  $x=2$ ,  $x=0$ ,  $x=-2$  otrzymując odpowiednio

$$\begin{aligned} 8 &= 8A, & \text{skąd} & \quad A = 1, \\ 2 &= -4B, & \text{skąd} & \quad B = -\frac{1}{2}, \\ -4 &= 8C, & \text{skąd} & \quad C = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_6^{\infty} \frac{3x+2}{x^3-4x} dx &= \int_6^{\infty} \frac{1}{x-2} - \frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x+2} dx = \ln|x-2| - \frac{\ln|x|}{2} - \frac{\ln|x+2|}{2} \Big|_{x=6}^{\infty} = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \ln|x-2| - \frac{\ln|x|}{2} - \frac{\ln|x+2|}{2} \right) \right) - \ln 4 + \frac{\ln 6}{2} + \frac{\ln 8}{2} = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x-2}{\sqrt{x \cdot (x+2)}} \right) + \frac{-2 \cdot \ln 4 + \ln 6 + \ln 8}{2} = \\ &= \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{\sqrt{x \cdot (x+2)}} \right) + \frac{-4 \cdot \ln 2 + \ln 2 + \ln 3 + 3 \cdot \ln 2}{2} = \\ &= \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}}} \right) + \frac{\ln 3}{2} = \ln 1 + \frac{\ln 3}{2} = 0 + \frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 3}{2}. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość  $\frac{\ln 3}{2}$ .

**1146.** Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_5^{\infty} \frac{2x+3}{x^3-9x} dx$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x^3-9x} &= \frac{2x+3}{(x-3) \cdot x \cdot (x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3}, \\ 2x+3 &= A \cdot x \cdot (x+3) + B \cdot (x-3) \cdot (x+3) + C \cdot (x-3) \cdot x. \end{aligned} \quad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości  $(\heartsuit)$ , a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi  $A, B, C$ .

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości  $(\heartsuit)$  kolejno  $x=3$ ,  $x=0$ ,  $x=-3$  otrzymując odpowiednio

$$\begin{aligned} 9 &= 18A, & \text{skąd} & \quad A = \frac{1}{2}, \\ 3 &= -9B, & \text{skąd} & \quad B = -\frac{1}{3}, \\ -3 &= 18C, & \text{skąd} & \quad C = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_5^{\infty} \frac{2x+3}{x^3-9x} dx &= \int_5^{\infty} \frac{1/2}{x-3} - \frac{1/3}{x} - \frac{1/6}{x+3} dx = \frac{\ln|x-3|}{2} - \frac{\ln|x|}{3} - \frac{\ln|x+3|}{6} \Bigg|_{x=5}^{\infty} = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln|x-3|}{2} - \frac{\ln|x|}{3} - \frac{\ln|x+3|}{6} \right) \right) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 5}{3} + \frac{\ln 8}{6} = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{x^2 \cdot (x+3)}} \right) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 5}{3} + \frac{\ln 2}{2} = \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{x^2 \cdot (x+3)}} \right) + \frac{\ln 5}{3} = \\ &= \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[6]{\frac{\left(1 - \frac{3}{x}\right)^3}{1 + \frac{3}{x}}} \right) + \frac{\ln 5}{3} = \ln 1 + \frac{\ln 5}{3} = 0 + \frac{\ln 5}{3} = \frac{\ln 5}{3}. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość  $\frac{\ln 5}{3}$ .

**1147.** Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_4^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+2) \cdot (x+5)}.$$

Doprowadzić wynik do postaci  $w \cdot \ln \frac{p}{q}$ , gdzie  $p, q$  są liczbami pierwszymi, a  $w$  liczbą wymierną dodatnią.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x \cdot (x+2) \cdot (x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5},$$

$$1 = A \cdot (x+2) \cdot (x+5) + B \cdot x \cdot (x+5) + C \cdot x \cdot (x+2).$$

Podstawiamy<sup>7</sup> za  $x$  wartości 0,  $-2$  i  $-5$  otrzymując odpowiednio

dla  $x = 0$   $1 = 10 \cdot A$ , skąd  $A = 1/10$ ,

dla  $x = -2$   $1 = -6 \cdot B$ , skąd  $B = -1/6$ ,

dla  $x = -5$   $1 = 15 \cdot C$ , skąd  $C = 1/15$ .

Wobec tego<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} \int_4^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+2) \cdot (x+5)} &= \int_4^{\infty} \frac{1/10}{x} - \frac{1/6}{x+2} + \frac{1/15}{x+5} dx = \\ &= \frac{1}{30} \cdot (3 \cdot \ln |x| - 5 \cdot \ln |x+2| + 2 \cdot \ln |x+5|) \Big|_{x=4}^{\infty} = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{30} \cdot (3 \cdot \ln |x| - 5 \cdot \ln |x+2| + 2 \cdot \ln |x+5|) \right) \right) - \frac{1}{30} \cdot (3 \cdot \ln 4 - 5 \cdot \ln 6 + 2 \cdot \ln 9) = \\ &= \frac{1}{30} \cdot \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^3 \cdot (x+5)^2}{(x+2)^5} \right) - \frac{1}{30} \cdot (6 \cdot \ln 2 - 5 \cdot \ln 2 - 5 \cdot \ln 3 + 4 \cdot \ln 3) = \\ &= \frac{1}{30} \cdot \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{5}{x}\right)^2}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^5} \right) - \frac{1}{30} \cdot (\ln 2 - \ln 3) = \frac{1}{30} \cdot \ln 1 + \frac{1}{30} \cdot (\ln 3 - \ln 2) = \frac{1}{30} \cdot \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa ma wartość  $\frac{1}{30} \cdot \ln \frac{3}{2}$ .

**Uwaga:** Całki

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x+2} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x+5} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln |x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln |x+2|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln |x+5|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności  $\infty - \infty$ .

<sup>7</sup>Można też wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi  $A$ ,  $B$  i  $C$ , porównując współczynniki przy jednakowych potęgach  $x$ 'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

<sup>8</sup>Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartości całek zbieżnych.

$$1148. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \text{Rozbieżna}$$

$$1149. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2}$$

$$1150. \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \text{Rozbieżna}$$

$$1151. \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2}$$

$$1152. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^{1001/1000}} = \frac{1000}{\sqrt{1000 \ln 2}}$$

$$1153. \int_3^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x} = \text{Rozbieżna}$$

$$1154. \int_3^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot (\ln \ln x)^2} = \frac{1}{\ln \ln 3}$$

$$1155. \int_0^{\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} dx = \text{Rozbieżna}$$

$$1156. \int_0^{\infty} x^8 \cdot \sin x^9 dx = \text{Rozbieżna}$$

$$1157. \int_0^{32} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = 20$$

$$1158. \int_0^1 \ln x dx = -1$$

$$1159. \int_1^{\infty} \sqrt{x} dx = \text{Rozbieżna}$$

$$1160. \int_{-1}^1 x^{-43/45} dx = 0$$

$$1161. \int_{-1}^1 x^{-47/45} dx = \text{Rozbieżna}$$

$$1162. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{99}}{x^{100} + x^{66} + x^{44} + 1} dx = \text{Rozbieżna}$$

$$1163. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{97}}{x^{100} + x^{66} + x^{44} + 1} dx = 0$$

1164. Obliczyć pole powierzchni obrotowej (torusa) powstałej przez obrót okręgu o równaniu

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$

wokół osi  $OY$ .

Pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej  $\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ , gdzie  $0 \leq a < b$  oraz  $f \in C^1([a, b])$ , wokół osi  $OY$  jest równe

$$2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

W rozwiązaniu może się też przydać wzór  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ .

*Rozwiązanie:*

Przekształcanie równania obracanego okręgu prowadzi kolejno do:

$$y^2 = 1 - (x-2)^2,$$

$$y = \pm \sqrt{1 - (x-2)^2}.$$

Przy tym  $x$  może przebiegać przedział  $[1, 3]$ .

Okrąg rozdziela się więc w naturalny sposób na dwa półokręgi, o równaniach

$$y = \sqrt{1 - (x-2)^2} \quad \text{oraz} \quad y = -\sqrt{1 - (x-2)^2}.$$

Ponieważ każdy z tych półokręgów tworzy przy obrocie powierzchnię obrotową o takim samym polu, możemy wyliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót jednego z nich, a otrzymany wynik pomnożyć przez 2.

Aby skorzystać z podanego wzoru, przyjmujemy  $[a, b] = [1, 3]$  i  $f(x) = \sqrt{1 - (x-2)^2}$ . Wówczas

$$f'(x) = \frac{-(x-2)}{\sqrt{1 - (x-2)^2}}.$$

Zatem szukane pole jest równe

$$2 \cdot 2\pi \cdot \int_1^3 x \cdot \sqrt{1 + \frac{(x-2)^2}{1 - (x-2)^2}} dx.$$

Obliczamy je wykonując podstawienie  $t = x - 2$ :

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2\pi \cdot \int_1^3 x \cdot \sqrt{1 + \frac{(x-2)^2}{1 - (x-2)^2}} dx &= 4\pi \cdot \int_{-1}^1 (t+2) \cdot \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} dt = 4\pi \cdot \int_{-1}^1 (t+2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\ &= 4\pi \cdot \int_{-1}^1 t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + 8\pi \cdot \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt. \end{aligned}$$

Ponieważ pierwsza całka w ostatniej sumie jest równa 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera<sup>9</sup>, kontynuujemy obliczanie drugiej całki<sup>10</sup>:

$$8\pi \cdot \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 8\pi \cdot \arcsin t \Big|_{t=-1}^1 = 8\pi \cdot (\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = 8\pi \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) = 8\pi^2.$$

*Odpowiedź:* Pole torusa jest równe  $8\pi^2$ .

*Uwaga:* Nieprzypadkowo pole torusa jest iloczynem długości obracanego okręgu przez drogę zakreślaną przy obrocie przez środek (czyli środek ciężkości) tego okręgu (twierdzenie Pappusa-Guldina).

Niech  $C(n) = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{x^{22} + x^{11} + 1}$ . Dla danego  $n$  podaj takie  $k \neq n$ , że  $C(k) = C(n)$ .

**1171.**  $n = 2, k = 18$

**1172.**  $n = 3, k = 17$

**1173.**  $n = 5, k = 15$

**1174.**  $n = 7, k = 13$

Niech  $C(n) = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{(x^{13} + 1)^3}$ . Dla danego  $n$  podaj taką liczbę  $k \neq n$ , że  $C(k) = C(n)$ .

**1175.**  $n = 5, k = 32$

**1176.**  $n = 7, k = 30$

**1177.**  $n = 11, k = 26$

**1178.**  $n = 13, k = 24$

<sup>9</sup>Ponieważ jest to całka niewłaściwa, trzeba udowodnić jej zbieżność, najlepiej korzystając z kryterium porównawczego.

<sup>10</sup>Druga całka też jest niewłaściwa, ale tu akurat nie wpływa to na tok rachunków.

**1179.** Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru  $p$ , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a)  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^6 + x^2} dx, \quad (\mathbf{2, 5});$

b)  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^7 + x^3} dx, \quad (\mathbf{4, 6});$

c)  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^8 + x^4} dx, \quad (\mathbf{6, 7});$

d)  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^9 + x^5} dx, \quad \mathbf{\emptyset}.$

**1180.** Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru  $p$ , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a)  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{x^{2p} + x^p} dx, \quad (\mathbf{3/2, 2});$

b)  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{x^{2p} + x^p} dx, \quad (\mathbf{7/4, 5/2});$

c)  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^6 + x^4}}{x^{2p} + x^p} dx, \quad (\mathbf{2, 3});$

d)  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^7 + x^5}}{x^{2p} + x^p} dx, \quad (\mathbf{9/4, 7/2}).$

**1181.** Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru  $p$ , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a)  $\int_0^{\infty} \frac{x^{2p} + x^p}{\sqrt{x^9 + x^4}} dx, \quad (\mathbf{1, 7/4});$

b)  $\int_0^{\infty} \frac{x^{2p} + x^p}{\sqrt{x^{10} + x^5}} dx, \quad (\mathbf{3/2, 2});$

c)  $\int_0^{\infty} \frac{x^{2p} + x^p}{\sqrt{x^{11} + x^6}} dx, \quad (\mathbf{2, 9/4});$

d)  $\int_0^{\infty} \frac{x^{2p} + x^p}{\sqrt{x^{12} + x^7}} dx, \quad \mathbf{\emptyset}.$

**1182.** Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+n} - n)$$

jest zbieżny.

*Rozwiązanie:*

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia (na różnicę sześcianów), a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+n} - n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^3+n)^{2/3} + n \cdot (n^3+n)^{1/3} + n^2} \geq \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^3+7n^3)^{2/3} + n \cdot (n^3+7n^3)^{1/3} + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 + 2n^2 + n^2} = \frac{1}{7} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podany szereg jest rozbieżny.

**1183.** Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[4]{n^4+n} - n)$$

jest zbieżny.

*Rozwiązanie:*

Korzystamy dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów, a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[4]{n^4+n} - n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[4]{n^4+n} + n) \cdot (\sqrt{n^4+n} + n^2)} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[4]{n^4+0} + n) \cdot (\sqrt{n^4+0} + n^2)} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podany szereg jest zbieżny.

**1184.** Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}).$$

*Rozwiązanie:*

Przekształcimy dany w zadaniu szereg korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów, a następnie skorzystamy z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^{2/3} + n^{2/3} \cdot \sqrt[3]{n^2+1} + n^{4/3}} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+0)^{2/3} + n^{2/3} \cdot \sqrt[3]{n^2+0} + n^{4/3}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} < +\infty, \end{aligned}$$

bo  $4/3 > 1$ .

**Odpowiedź:** Dany w treści zadania szereg jest zbieżny.

**1185.** Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{28^n \cdot (n!)^3}.$$

*Rozwiązanie:*

W rozwiązaniu skorzystamy z kryterium d'Alemberta.

W tym celu przekształcimy iloraz kolejnych wyrazów szeregu, przejdziemy z nim do granicy przy  $n \rightarrow \infty$ , a następnie porównamy otrzymaną granicę z liczbą 1:

$$\frac{(3n+3)!}{28^{n+1} \cdot ((n+1)!)^3} \cdot \frac{28^n \cdot (n!)^3}{(3n)!} = \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{28 \cdot (n+1)^3} \rightarrow \frac{27}{28} < 1,$$

skąd wynika, że dany w treści zadania szereg jest zbieżny.

**1186.** Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 18^n}{\binom{3n}{n} \cdot n^n}.$$

*Rozwiązanie:*

Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego w zadaniu szeregu:

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)! \cdot 18^{n+1}}{\binom{3n+3}{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{\binom{3n}{n} \cdot n^n}{n! \cdot 18^n} &= \frac{(n+1) \cdot 18 \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!}}{\frac{(3n+3)!}{(n+1)! \cdot (2n+2)!} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} = \\ &= \frac{18}{\frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{(n+1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{18}{\frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot 3}{(n+1) \cdot (2n+1) \cdot 2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{18}{\frac{27}{4} \cdot e} = \frac{8}{3e} = \frac{2, (6)}{e} < 1, \end{aligned}$$

skąd na mocy kryterium d'Alemberta wynika zbieżność szeregu.

Skorzystaliśmy przy tym z nierówności  $e > 2, (6)$ , która wynika albo z zapamiętanego rozwinięcia dziesiętnego  $e = 2,7\dots$ , albo ze wzoru<sup>11</sup>

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}.$$

**Odpowiedź:** Dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

<sup>11</sup>Co prawda jeszcze o wzorze  $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$  nie mówiliśmy, ale jak ktoś go zna, to może w razie potrzeby zastosować.

1187. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n}$$

jest zbieżny.

*Rozwiązanie:*

Korzystamy z kryterium porównawczego, a następnie z kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n} &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{0 + \binom{2n}{n}^2}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{3^n}, \\ \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{\binom{2n}{n}} &= \frac{(2n+2)! \cdot (n!)^2}{3 \cdot ((n+1)!)^2 \cdot (2n)!} = \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{3 \cdot (n+1)^2} \rightarrow \frac{4}{3} > 1, \end{aligned}$$

a zatem na mocy kryterium d'Alemberta szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{3^n}$  jest rozbieżny, a stąd na mocy kryterium

porównawczego rozbieżny jest także szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n}$ .

**Odpowiedź:** Podany szereg jest rozbieżny.

1188. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}.$$

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy  $a_n = \frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}$  i zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}} = \frac{(n+1)^{n^2}}{2^n \cdot n^{n^2}} = b_n.$$

Ponieważ nie umiemy od razu stwierdzić, do czego dąży  $b_n$  przy  $n \rightarrow \infty$ , stosujemy ponownie kryterium Cauchy'ego, tym razem do **ciągu**  $(b_n)$ . Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{2^n \cdot n^{n^2}}} = \frac{(n+1)^n}{2 \cdot n^n} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{e}{2} > 1.$$

Z kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu  $(b_n)$  wynika więc, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty.$$

Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1,$$

skąd na podstawie kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  wnioskujemy, że szereg ten jest rozbieżny.

**1189.** Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru  $p$ , dla których podany szereg jest zbieżny.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p+1}}, (2, \infty)$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^p+1}}, (6, \infty)$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt[4]{n^p+1}}, (12, \infty)$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt[5]{n^p+1}}, (20, \infty)$

**1190.** Dowieść, że jeżeli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

też jest zbieżny.

**Wskazówka:** Zastosować nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną do liczb  $a_n$  oraz  $\frac{1}{n^2}$ .

*Rozwiązanie:*

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\sqrt{a_n \cdot \frac{1}{n^2}} \leq \frac{a_n + \frac{1}{n^2}}{2},$$

czyli

$$\frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^2}.$$

Ponieważ wiemy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

a z założeń zadania

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty,$$

dostajemy nierówności

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

**1191.** Dane są takie ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 9.$$

Udowodnić jedną z poniższych nierówności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq 5 \quad \text{(wersja łatwiejsza)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq 3 \quad \text{(wersja trudniejsza)}$$

**Wskazówka:** Skorzystać z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną.

*Rozwiązanie:*

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb  $a_n$  i  $b_n$  otrzymujemy

$$\sqrt{a_n \cdot b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5,$$

co kończy rozwiązanie łatwiejszej wersji zadania.

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb  $9a_n$  i  $b_n$  otrzymujemy

$$\sqrt{9a_n \cdot b_n} \leq \frac{9a_n + b_n}{2},$$

czyli

$$\sqrt{a_n \cdot b_n} \leq \frac{9a_n + b_n}{6}.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3a_n}{2} + \frac{b_n}{6} \right) = \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3,$$

co kończy rozwiązanie trudniejszej wersji zadania.

**1192.** Dane są takie ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leq 1.$$

*Rozwiązanie:*

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla trzech liczb  $a_n^6$ ,  $b_n^3$  i  $b_n^3$  otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n^6 b_n^3 b_n^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^6 + b_n^3 + b_n^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 \right) = \frac{1+1+1}{3} = 1.$$

**1193.** Dany jest taki szereg zbieżny  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \leq 64.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq C,$$

gdzie  $C = 27$  (**wersja łatwiejsza**) lub  $C = 16$  (**wersja trudniejsza**).

*Rozwiązanie:*

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n a_n a_n^4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_n + a_n^4}{3} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \right) \leq \frac{8 + 8 + 64}{3} = \frac{80}{3} < \frac{81}{3} = 27 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n a_n a_n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{8a_n \cdot 8a_n \cdot a_n^4}}{4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8a_n + 8a_n + a_n^4}{3 \cdot 4} = \\ &= \frac{1}{12} \cdot \left( 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \right) \leq \frac{64 + 64 + 64}{12} = \frac{192}{12} = 16. \end{aligned}$$

**1194.** Dane są takie ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leq 2.$$

*Rozwiązanie:*

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla 3 liczb  $a_n^6$ ,  $8b_n^3$  i  $8b_n^3$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n^6 \cdot 8b_n^3 \cdot 8b_n^3} \leq \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^6 + 8b_n^3 + 8b_n^3}{3} = \\ &= \frac{1}{12} \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 + 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 + 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 \right) = \frac{8 + 8 + 8}{12} = 2. \end{aligned}$$

**1217.** Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)}.$$

*Rozwiązanie:*

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(3 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{2}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{5}{n}\right)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 0}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi nierówność

$$\frac{(2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)} \geq \frac{(2n+1) \cdot (2n+3)}{(3n+2) \cdot (3n+5) \cdot (3n+8)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościami

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{3n-1} &\geq \frac{2n+3}{3n+8}, \\ (2n-1) \cdot (3n+8) &\geq (2n+3) \cdot (3n-1), \\ 6n^2 + 13n - 8 &\geq 6n^2 + 7n - 3, \\ 6n &\geq 5, \end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

**1218.** Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 2}.$$

*Rozwiązanie:*

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, które wymaga spełnienia następujących trzech warunków:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.

Spełnienie tego warunku jest oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\frac{n}{n^2+2} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}} \rightarrow \frac{0}{1+0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

W celu udowodnienia tego warunku udowodnimy nierówność

$$\frac{n}{n^2+2} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2+2},$$

która jest równoważna kolejnym nierównościami:

$$n \cdot (n^2 + 2n + 3) \geq (n+1) \cdot (n^2 + 2),$$

$$n^3 + 2n^2 + 3n \geq n^3 + n^2 + 2n + 2,$$

$$n^2 + n \geq 2,$$

co jest spełnione dla każdego  $n \geq 1$ .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

**1219.** Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)}.$$

*Rozwiązanie:*

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)} &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(3 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{4}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{7}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{10}{n}\right)} &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 0. \end{aligned}$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi nierówność

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)} \geq \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{(3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10) \cdot (3n+13)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned}\frac{n}{3n+1} &\geq \frac{n+3}{3n+13}, \\ n \cdot (3n+13) &\geq (n+3) \cdot (3n+1), \\ 3n^2 + 13n &\geq 3n^2 + 10n + 3, \\ 3n &\geq 3, \\ n &\geq 1,\end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

**1220.** Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+100}.$$

*Rozwiązanie:*

Spróbujemy udowodnić zbieżność danego szeregu korzystając z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Aby to udowodnić, musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne – oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{100}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  zachodzi nierówność

$$\frac{\sqrt{n}}{n+100} \geq \frac{\sqrt{n+1}}{n+101}, \quad (*)$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned}\sqrt{n} \cdot (n+101) &\geq \sqrt{n+1} \cdot (n+100), \\ n \cdot (n+101)^2 &\geq (n+1) \cdot (n+100)^2, \\ n \cdot (n^2 + 202n + 10201) &\geq (n+1) \cdot (n^2 + 200n + 10000), \\ n^3 + 202n^2 + 10201n &\geq n^3 + 201n^2 + 10200n + 10000, \\ n^2 + n &\geq 10000, \\ n \cdot (n+1) &\geq 100 \cdot 100,\end{aligned}$$

skąd wynika, że nierówność (\*) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 100$ .

Zatem szereg  $\sum_{n=100}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+100}$  spełnia warunki kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, wobec czego jest zbieżny.

Ponieważ zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu wyrazów, także szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+100}$  jest zbieżny.

**1221.** Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right).$$

*Rozwiązanie:*

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, które wymaga spełnienia następujących trzech warunków:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Warunki te stają się oczywiste po zapisaniu wartości bezwzględnych wyrazów szeregu w innej postaci:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

**1222.** Wiedząc, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2,$$

obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występuje 100 wyrazów dodatnich i jeden ujemny:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{2} + \frac{1}{201} + \frac{1}{203} + \dots + \frac{1}{399} - \frac{1}{4} + \frac{1}{401} + \frac{1}{403} + \dots + \frac{1}{599} - \frac{1}{6} + \\ & + \frac{1}{601} + \frac{1}{603} + \dots + \frac{1}{799} - \frac{1}{8} + \frac{1}{801} + \frac{1}{803} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{10} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1003} + \dots \end{aligned}$$

*Rozwiązanie:*

Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozważając tylko co 101-szą sumę częściową. Otrzymujemy

$$S_{101n} = \sum_{i=1}^{100n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{2i-1}.$$

Skoro wiemy, że  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ , definicja zbieżności szeregu daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \ln 2.$$

Ponadto oznaczając  $f(x) = 1/(2x)$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{2i-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{(2i-1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{100n} f\left(\frac{i-1/2}{n}\right) = \int_1^{100} f(x) dx = \\ &= \int_1^{100} \frac{dx}{2x} = \frac{\ln |x|}{2} \Big|_{x=1}^{100} = \frac{\ln 100}{2} - \frac{\ln 1}{2} = \frac{\ln 100}{2} = \ln 10. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{101n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{2i-1} \right) = \ln 2 + \ln 10 = \ln 20.$$

**Odpowiedź:** Suma danego szeregu jest równa  $\ln 20 \approx 2,9957$ .

**1223.** Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n^2} \cdot \binom{2n}{n}^n \cdot n^{n^2}}{(n!)^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego  $a$ . Dla jednej wartości  $a$  można nie udzielić odpowiedzi.

*Rozwiązanie:*

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do danego w zadaniu szeregu:

$$\sqrt[n]{\frac{a^{n^2} \cdot \binom{2n}{n}^n \cdot n^{n^2}}{(n!)^n}} = \frac{a^n \cdot \binom{2n}{n} \cdot n^n}{n!} = b_n.$$

Następnie stosujemy kryterium d'Alemberta do ciągu  $(b_n)$ :

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{a^{n+1} \cdot \binom{2n+2}{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n \cdot \binom{2n}{n} \cdot n^n} = \frac{a \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n+1)}{(n+1)^2 \cdot (n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \\ &= \frac{a \cdot (2n+1) \cdot 2}{(n+1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 4ea \end{aligned}$$

przy  $n \rightarrow \infty$ .

Jeżeli  $4e \cdot a < 1$ , czyli  $a < 1/4e$ , to na podstawie kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu  $(b_n)$  wnioskujemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 < 1,$$

wobec czego w oparciu o kryterium Cauchy'ego zastosowane do szeregu danego w treści zadania wnioskujemy, że szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli zaś  $4e \cdot a > 1$ , czyli  $a > 1/4e$ , to  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1$ , skąd wynika, że szereg jest rozbieżny.

**Odpowiedź:**

Dany szereg jest zbieżny dla liczb dodatnich  $a < \frac{1}{4e}$ , a rozbieżny dla  $a > \frac{1}{4e}$ .

**1224.** Wśród poniższych sześciu szeregów wskaż szereg zbieżny, a następnie udowodnij jego zbieżność. Jeśli potrafisz, oblicz jego sumę.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(A)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{7n+10} & \text{(B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{3n^2+n} & \text{(C)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n^2+n} \\
 \text{(D)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2+1)}{2n^2+1} & \text{(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n^2+1)}{77n-1} & \text{(F)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{2011n+2012}
 \end{array}$$

*Rozwiązanie:*

Szeregiem zbieżnym jest szereg **(C)**.

Aby to udowodnić, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych. W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0-0}{1+0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi nierówność

$$\frac{2n-1}{n(n+1)} \geq \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)},$$

czyli

$$\frac{2n-1}{n} \geq \frac{2n+1}{n+2},$$

co kolejno jest równoważne nierównościami

$$(2n-1)(n+2) \geq (2n+1)n$$

$$2n^2 + 3n - 2 \geq 2n^2 + n$$

$$2n \geq 2$$

$$n \geq 1,$$

a to jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych  $n$ .

Zatem na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych szereg **(C)** jest zbieżny.

W celu obliczenia sumy szeregu **(C)** rozkładamy jego wyrazy na ułamki proste:

$$\frac{2n-1}{n^2+n} = \frac{2n-1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

$$2n-1 = A(n+1) + Bn$$

$$2n-1 = An + A + Bn$$

$$2 = A + B, \quad -1 = A$$

$$A = -1, \quad B = 3.$$

Wykorzystujemy otrzymany rozkład do rozłożenia szeregu na sumę dwóch szeregów przypominających szereg anharmoniczny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-(-1)^n}{n} + \frac{3 \cdot (-1)^n}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

W drugim szeregu zmieniamy numerację podstawiając  $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 3 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 3 \cdot \left( \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) - 1 \right) = 4 \ln 2 - 3.$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy ze znajomości sumy szeregu anharmonicznego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

**Odpowiedź:** Suma szeregu (C) jest równa  $4 \ln 2 - 3$ .

W każdym z czterech kolejnych zadań udziel siedmiu **niezależnych** odpowiedzi:

**Z** - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

**R** - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

**N** - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

**X** - nie istnieje szereg spełniający podany warunek

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , jeżeli wiadomo, że jego wyrazy są różne od zera, a ponadto ciąg jego wyrazów  $(a_n)$  spełnia podany warunek

1225.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ , gdzie

- |                      |                       |                        |
|----------------------|-----------------------|------------------------|
| a) $g = -3$ <b>R</b> | b) $g = -1$ <b>R</b>  | c) $g = -1/3$ <b>R</b> |
| d) $g = 0$ <b>N</b>  | e) $g = 1/3$ <b>R</b> | f) $g = 1$ <b>R</b>    |
|                      |                       | g) $g = 3$ <b>R</b>    |

1226.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$ , gdzie

- |                      |                       |                        |
|----------------------|-----------------------|------------------------|
| a) $g = -3$ <b>R</b> | b) $g = -1$ <b>N</b>  | c) $g = -1/3$ <b>Z</b> |
| d) $g = 0$ <b>Z</b>  | e) $g = 1/3$ <b>Z</b> | f) $g = 1$ <b>N</b>    |
|                      |                       | g) $g = 3$ <b>R</b>    |

1227.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = g$ , gdzie

- |                      |                       |                        |
|----------------------|-----------------------|------------------------|
| a) $g = -3$ <b>Z</b> | b) $g = -1$ <b>N</b>  | c) $g = -1/3$ <b>R</b> |
| d) $g = 0$ <b>R</b>  | e) $g = 1/3$ <b>R</b> | f) $g = 1$ <b>N</b>    |
|                      |                       | g) $g = 3$ <b>Z</b>    |

1228.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$ , gdzie

- |                      |                       |                        |
|----------------------|-----------------------|------------------------|
| a) $g = -3$ <b>X</b> | b) $g = -1$ <b>X</b>  | c) $g = -1/3$ <b>X</b> |
| d) $g = 0$ <b>Z</b>  | e) $g = 1/3$ <b>Z</b> | f) $g = 1$ <b>N</b>    |
|                      |                       | g) $g = 3$ <b>R</b>    |

**1229.** Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru  $p$ , dla których podany szereg liczbowy jest zbieżny.

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (p^2 - 3)^n$  jest zbieżny  $\Leftrightarrow p \in (-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$
- b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^2 - 5)^n}{\sqrt{n}}$  jest zbieżny  $\Leftrightarrow p \in (-\sqrt{6}, -2] \cup [2, \sqrt{6})$
- c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^2 - 8)^n}{n}$  jest zbieżny  $\Leftrightarrow p \in (-3, -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}, 3)$
- d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^2 - 10)^n}{n^2}$  jest zbieżny  $\Leftrightarrow p \in [-\sqrt{11}, -3] \cup [3, \sqrt{11}]$

**1230.** W każdym z poniższych 16 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

**Z** - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)

**R** - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

**N** - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  jest rozbieżny, ciąg  $(c_n)$  jest zbieżny, ciąg  $(d_n)$  jest rozbieżny. Co można wywnioskować o zbieżności

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| a) ciągu $(a_n)$ <b>Z</b>       | b) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ <b>N</b>         |
| c) ciągu $(b_n)$ <b>N</b>       | d) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ <b>R</b>         |
| e) ciągu $(a_n + b_n)$ <b>N</b> | f) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ <b>R</b> |
| g) ciągu $(c_n + d_n)$ <b>R</b> | h) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)$ <b>R</b> |
| i) ciągu $(a_n + c_n)$ <b>Z</b> | j) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n)$ <b>N</b> |
| k) ciągu $(a_n + d_n)$ <b>R</b> | l) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + d_n)$ <b>R</b> |
| m) ciągu $(b_n + c_n)$ <b>N</b> | n) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$ <b>N</b> |
| o) ciągu $(b_n + d_n)$ <b>N</b> | p) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + d_n)$ <b>N</b> |