

Kolokwium nr 7: piątek 22.05.2026, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 786–848 i 889–1280.

Zadania do omówienia¹ na ćwiczeniach we wtorek 19.05.2026.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami

Szeregi potęgowe.

Początkowe 5 zadań jest przeznaczonych do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

1259. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^{2n}}{(2n)! \cdot n! \cdot n^n}.$$

1260. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}}{n! \cdot n^n}.$$

1261. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{2n}{n}^3 \cdot x^{5n}}{n! \cdot 2^n}.$$

1262. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{(n!)^n}.$$

1263. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (2n)! \cdot (8n)! \cdot x^{pn}}{n! \cdot n^{pn}}$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p , aby promień ten był dodatni i skończony.

1264. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^4} \cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}}.$$

1265. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot (4n)! \cdot x^{pn}}{n! \cdot n^{pn}}$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p , aby promień ten był dodatni i skończony.

1266. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot 64^n \cdot x^{3n}}{5n+7}.$$

¹Zadania podobne do wcześniejszych będą pominięte.

1267. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+2)^n \cdot x^n}{(7n+3)^n}.$$

Jeśli nie potrafisz, to przynajmniej wyznacz promień zbieżności.

1268. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{22} \cdot e^{x^7}.$$

Obliczyć $f^{(k)}(0)$ dla $k = 50, 51, 52, \dots, 60$.

1269. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą zdefiniowaną dla $x \neq 0$ wzorem

$$f(x) = \frac{e^x - \sum_{n=0}^{2020} \frac{x^n}{n!}}{x^{2021}}.$$

Obliczyć $f(0)$ oraz $f'(0)$.

1270. Obliczyć sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Wskazówka: Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

W tym celu zastanowić się, jakiego prostego szeregu pochodną jest ten szereg lub szereg bardzo do niego zbliżony.

W poniższym zadaniu masz podany szkielet rozwiązania. Twoje zadanie to uzupełnić brakujące fragmenty w miejscu kropek.

1271. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}. \quad (1)$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{1 - x^3} dx =$$

$$= (c - b) \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + 2x}{\sqrt{3}} \right) - \frac{(b + c) \ln |1 - x|}{3} + \frac{(b + c) \ln (x^2 + x + 1)}{6} - \frac{a \ln |1 - x^3|}{3} + C$$

dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$ otrzymujemy

$$f(x) = \int f'(x) dx = \dots\dots\dots \quad (2)$$

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x = \dots\dots\dots$

Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(\dots\dots) = \dots\dots\dots,$$

natomiast wzór (2) daje

$$f(\dots\dots) = \dots\dots\dots + C =$$

$$= \dots\dots\dots + C.$$

Stąd

$$C = \dots\dots\dots$$

i ostatecznie

$$f(x) = \dots\dots\dots \quad (3)$$

Przyjmując $x = \dots\dots\dots$ we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy $\dots\dots\dots$. Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(\dots\dots) = \dots\dots\dots =$$

$$= \dots\dots\dots =$$

$$= \dots\dots\dots$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa

$\dots\dots\dots$

1272. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}.$$

1273. Podać przykład szeregu potęgowego o promieniu zbieżności 2 i sumie równej 7 dla $x = 1$.

1274. Podać przykład dwóch szeregów potęgowych o promieniach zbieżności 1, których suma jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 2.

1275. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(54n+1)^n \cdot x^{3n}}{(81n+2)^n}.$$

1276. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n \cdot x^n,$$

gdzie (L_n) jest ciągiem Lucasa:

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_n = L_{n-2} + L_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

lub równoważnie

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

1277. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^n.$$

1278. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

1279. Obliczyć dwoma sposobami sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot (n+1)}.$$

Wyliczyć wartość sumy szeregu na końcach przedziału zbieżności.

1° Wykorzystać szereg z poprzedniego zadania – zastosować do niego mnożenie/dzielenie przez x oraz całkowanie wyraz po wyrazie.

2° Przedstawić dany szereg w postaci sumy szeregów potęgowych o znanych sumach.

1280. Różnicą szeregów potęgowych $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ nazywamy szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \cdot x^n.$$

Rozważamy szereg potęgowy będący różnicą szeregów potęgowych $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}$. Obliczyć jego sumę dla $x = 1$.

Przypomnij sobie listę 8 z AM-1 od zadania 786 !
