

Kolokwium¹ nr 8: piątek 12.06.2026, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 786–848 i 889–1280.

Kolokwium² nr 9: piątek 12.06.2026, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 786–848 i 889–1369.

Kolokwium³ nr 10: piątek 12.06.2026, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 786–848 i 889–1430.

Zadania do omówienia⁴ na ćwiczeniach 26.05, 2 i 9.06.2026 oraz wykładzie 10-11.06.2026.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami

Ciągi i szeregi funkcyjne⁵.

Podsumowanie najważniejszych wiadomości o normie supremum i zbieżności jednostajnej:

Normą supremum funkcji f nazywamy liczbę

$$\|f\| = \sup_{x \in D_f} |f(x)|.$$

Definicja zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego:

Ciąg funkcji (f_n) określonych na wspólnej dziedzinie nazywamy zbieżnym **jednostajnie** do funkcji f określonej na tej samej dziedzinie, co zapisujemy jako $f_n \rightrightarrows f$, jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , to f jest funkcją ciągłą.

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji mających ciągle pochodne jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , a ciąg pochodnych (f'_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g , to funkcja f jest różniczkowalna i przy tym $f' = g$.

Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami określonymi na wspólnej dziedzinie, nazywamy zbieżnym **jednostajnie**, jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) określony wzorem

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k.$$

jest zbieżny jednostajnie. Tak jak w przypadku szeregów liczbowych, granicę ciągu sum częściowych nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli $\|f_n\| \not\rightarrow 0$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nie jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami ciągłymi, jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją ciągłą.

¹Dla osób walczących o zaliczenie.

²Dla mających zapewnione zaliczenie, ale bez rewelacji.

³Tylko dla orłów.

⁴Zadania podobne do wcześniejszych będą pominięte.

⁵Do omówienia na ćwiczeniach 26.05.2026.

Jeżeli wyrazy jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mają ciągłe pochodne, a szereg

$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ też jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n.$$

Analogicznie w przypadku pochodnych wyższych rzędów.

Obliczyć normę supremum funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie.

1281. $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$, $D_f = \mathbb{R}$

1282. $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$, $D_f = \mathbb{R}$

1283. $f(x) = x^2$, $D_f = (-1, 2)$

1284. $f(x) = x^3$, $D_f = (-4, 3)$

1285. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $D_f = \mathbb{R}$

1286. $f(x) = \operatorname{arctg} \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$

1287. $f(x) = \sin x + \cos x$, $D_f = \mathbb{R}$

1288. $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x$, $D_f = \mathbb{R}$

1289. $f(x) = x^3 - x$, $D_f = (-1, 1)$

1290. $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^2+t}$, $D_f = (1, +\infty)$

Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie⁶.

1291. $f(x) = \frac{7x^4 + 11x^2 + 13}{2x^4 + 3x^2 + 5}$, $D_f = \mathbb{R}$

1292. $f(x) = \frac{11x^4 - 7x^2 + 13}{3x^4 - 2x^2 + 5}$, $D_f = \mathbb{R}$

1293. $f(x) = \frac{2^x + 5^x + 8^x}{2^x + 4^x + 8^x}$, $D_f = \mathbb{R}$

1294. $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^4+1}$, $D_f = (0, +\infty)$

1295. $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t dt}{t^2+1}$, $D_f = (0, +\infty)$

1296. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^3 x^4}{n^2+n}$, $D_f = \mathbb{R}$

1297. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją ciągłą.

1298. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3+8}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją różniczkowalną i ma ciągłą pochodną.

1299. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{\binom{3n}{n}^2}$$

⁶**Wskazówka do niektórych zadań:**

Oszacuj podane wyrażenie osobno w przypadkach $|x| < 1$ i $|x| \geq 1$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją pięciokrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu piątego włącznie.

1300. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n + 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

1301. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin nx + \cos n^2 x}{n^8 + 88}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją trzykrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie.

1302. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^{2020} x}{2^n}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

1303. W każdym z zadań **1303.1-1303.25** podaj normę supremum funkcji f o podanym wzorze i dziedzinie.

1303.1. $f(x) = 7 \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.2. $f(x) = 7 \sin x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.3. $f(x) = 7 \sin^2 x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.4. $f(x) = 7 \sin^3 x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.5. $f(x) = \log_2 x - 2$, $D_f = \left(\frac{1}{8}, 8\right)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.6. $f(x) = \log_2 x - 2$, $D_f = (2, 32)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.7. $f(x) = (\log_2 x)^2 - 6$, $D_f = \left(\frac{1}{8}, 4\right)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.8. $f(x) = (\log_2 x)^3 - 6$, $D_f = \left(\frac{1}{8}, 4\right)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.9. $f(x) = (\log_2 x)^4 - 6$, $D_f = \left(\frac{1}{8}, 4\right)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.11. $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.12. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x^2} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.13. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 26x^2} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.14. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 15x^3} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.15. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 80x^3} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.16. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 10x + 29}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.17. $f(x) = \frac{1}{x^4 + 10x^2 + 31}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.18. $f(x) = \frac{1}{x^8 - 10x^4 + 33}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.19. $f(x) = \frac{1}{x^{12} + 10x^6 + 37}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.20. $f(x) = \frac{1}{x^{14} + 10x^7 + 39}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.21. $f(x) = 2^x - 7$, $D_f = (2, 3)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.22. $f(x) = (2^x - 7)^2 - 7$, $D_f = (2, 3)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.23. $f(x) = (2^x - 7)^2 - 17$, $D_f = (2, 3)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.24. $f(x) = (2^x - 7)^3 + 7$, $D_f = (2, 3)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1303.25. $f(x) = (2^x - 7)^3 + 17$, $D_f = (2, 3)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1304. Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$f(x) = \frac{6x^6 - x^2 + 7}{8x^8 - x^4 + 11}.$$

1305. Dany jest szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F , gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{\sin 2^n x}{333^n}.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m -krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k \leq m$ zachodzi równość $F^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

1306. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos(n^3 \cdot x)}{n^{20}}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

1307. Dany jest szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F , gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{\cos n^8 x}{n^{60}}.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m -krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k \leq m$ zachodzi równość $F^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

1308. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos\left(\binom{2n}{n} \cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

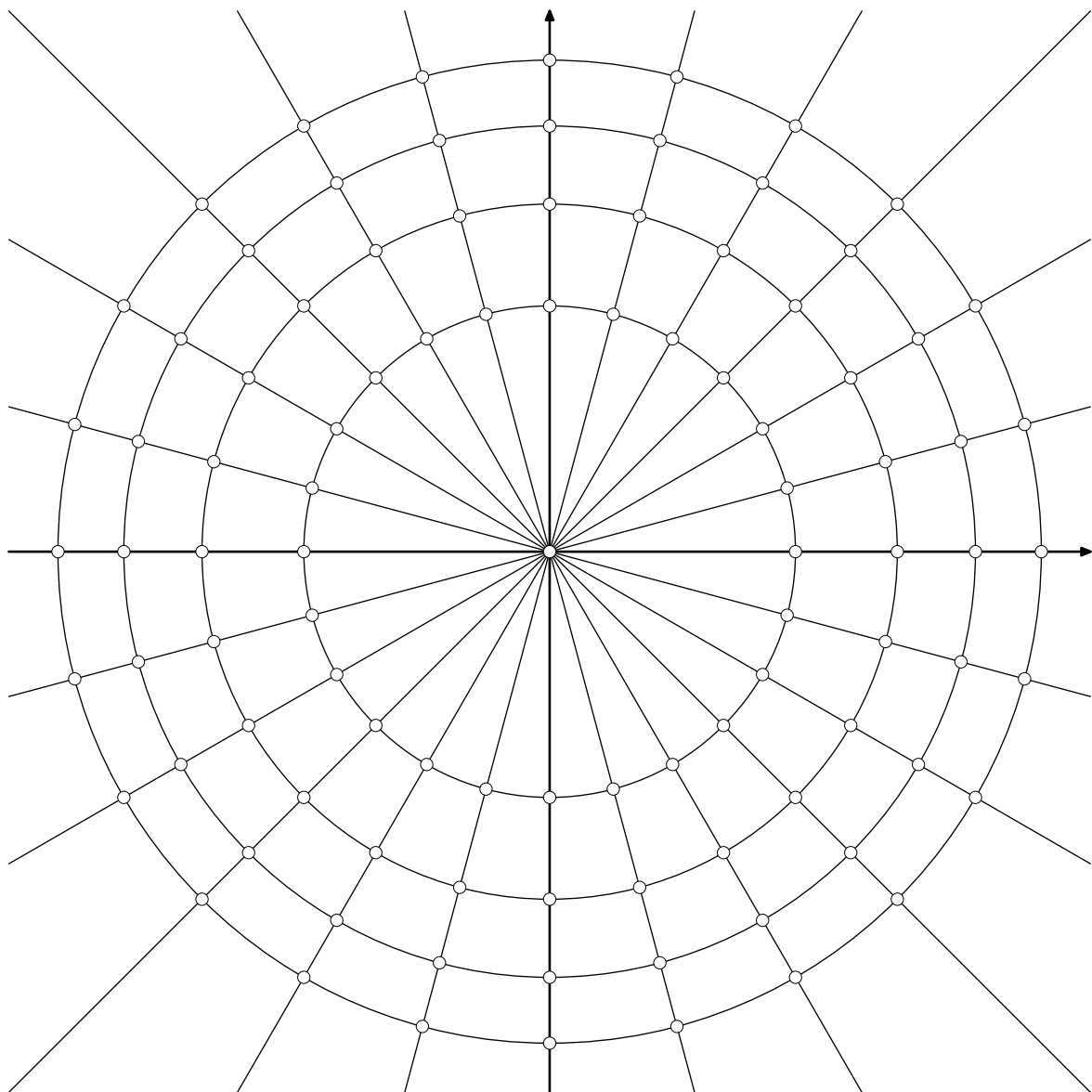
1309. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos(n! \cdot x)}{(3n)!}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

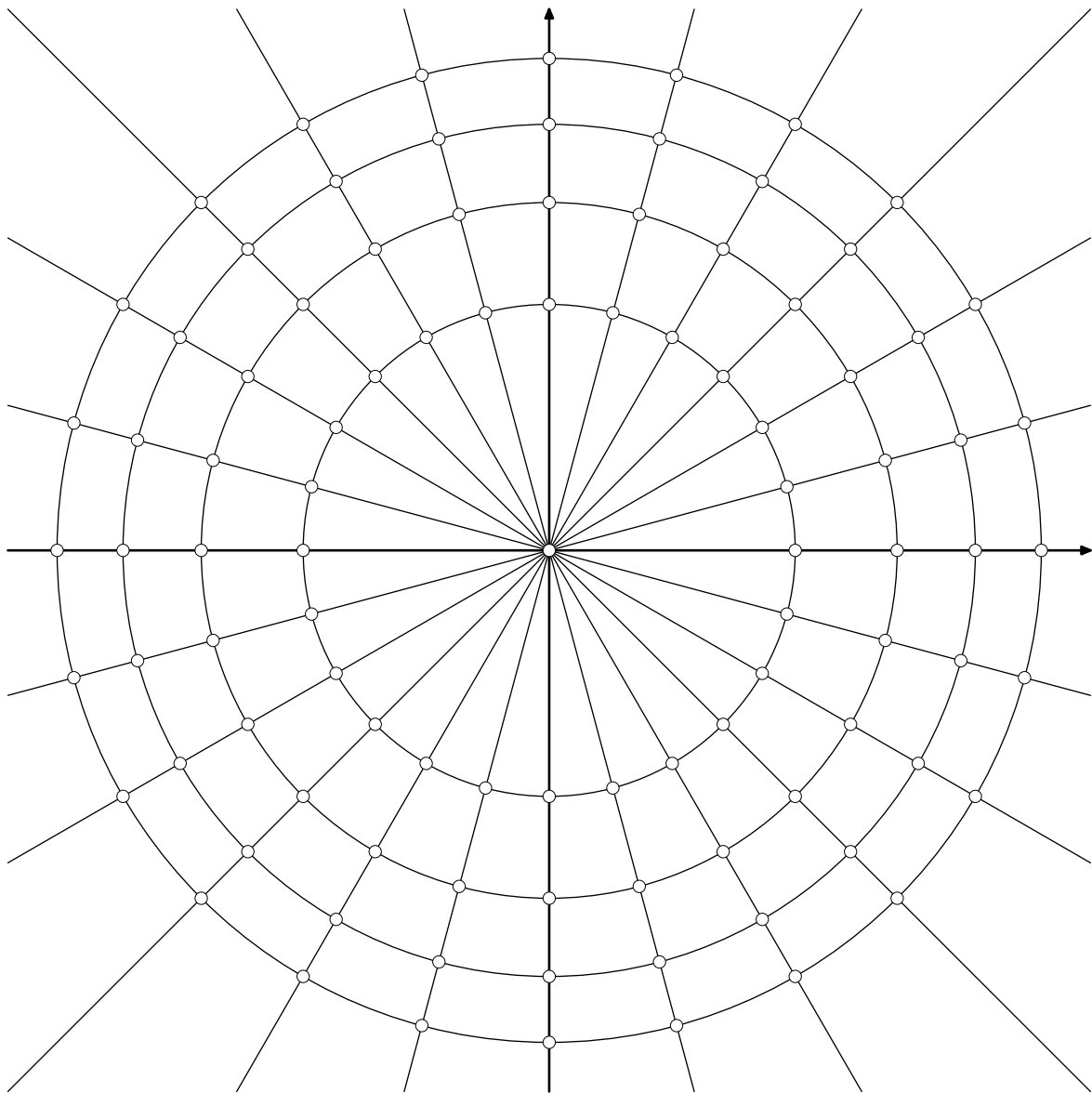
Liczby zespolone i ich zastosowanie do wyprowadzania tożsamości trygonometrycznych⁷.

1310. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^4 = -4$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach \sqrt{n} dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .

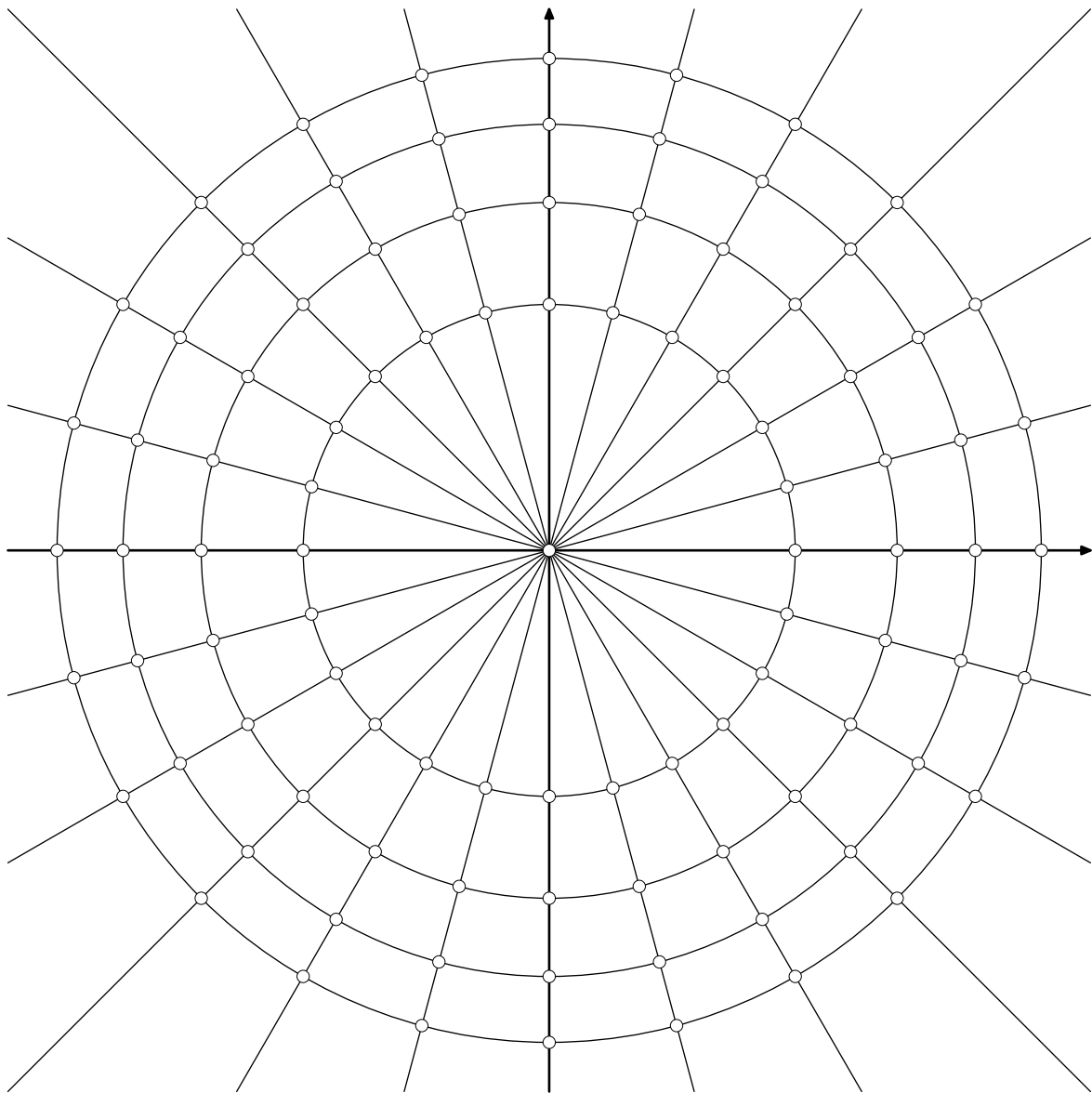


⁷Do omówienia na części ćwiczeń 2.06.2026.

1311. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^9 = 27z^3$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach \sqrt{n} dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



1312. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^7 + 4z^3 = 8z^4 + 32$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach \sqrt{n} dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



1313. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^{\pi} \sin^7 x \, dx .$$

Przedstawić wynik w postaci ułamka nieskracalnego o dwucyfrowym liczniku i mianowniku.

1314. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{\pi/6} \cos^6 x \, dx .$$

1315. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\pi} \sin^8 x \, dx .$$

1316. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx .$$

Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \pi$, gdzie w liczbą wymierną.

1317. Udowodnić nierówność

$$\int_0^{4\pi} \cos^{10} x \, dx < \pi .$$

1318. Znaleźć taką funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$f''(x) = \cos^4 x \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R} ,$$

a ponadto $f(0) = f(\pi) = 0$. Obliczyć $f(2\pi)$.

1319. Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a < 7$, że

$$\int_a^7 \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{4} .$$

1320. Podaj wartość całki oznaczonej. Wynik zapisz w postaci w albo $w \cdot \sqrt{p}$, gdzie w jest liczbą wymierną zapisaną w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, a p jest liczbą pierwszą.

a) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx = \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x \, dx = \dots\dots\dots$

c) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3 x \, dx = \dots\dots\dots$

d) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 x \, dx = \dots\dots\dots$

1321. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych dodatnich parametru p , dla których podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z - 1| > |z - 3|$.

a) $z = \log_2 p + i \cdot \log_3 p, \dots\dots\dots$

b) $z = \log_3 p + i \cdot \log_5 p, \dots\dots\dots$

c) $z = \log_5 p + i \cdot \log_7 p, \dots\dots\dots$

d) $z = \log_7 p + i \cdot \log_2 p, \dots\dots\dots$

1322. Niech $z = 1 - i$. Podaj w postaci kartezjańskiej:

a) $z^7 = \dots\dots\dots$

b) $z^8 = \dots\dots\dots$

c) $z^9 = \dots\dots\dots$

d) $z^{10} = \dots\dots\dots$

1323. Niech $z = \sqrt{3} + i$. Podaj część rzeczywistą potęgi liczby z :

a) $\operatorname{Re}(z^5) = \dots\dots\dots$

b) $\operatorname{Re}(z^6) = \dots\dots\dots$

c) $\operatorname{Re}(z^7) = \dots\dots\dots$

d) $\operatorname{Re}(z^8) = \dots\dots\dots$

1324. Podaj taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\bar{z} = z^{-1}$.

a) $z = \frac{2}{3} + ai, \quad a = \dots\dots\dots$

b) $z = \frac{3}{5} + ai, \quad a = \dots\dots\dots$

c) $z = \frac{1}{4} + ai, \quad a = \dots\dots\dots$

d) $z = \frac{4}{5} + ai, \quad a = \dots\dots\dots$

1325. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w , że

$$\operatorname{arctg} n + \operatorname{arctg} w = \operatorname{arctg}(n+1).$$

a) $n = 2, \quad w = \dots\dots\dots$

b) $n = 3, \quad w = \dots\dots\dots$

c) $n = 4, \quad w = \dots\dots\dots$

d) $n = 5, \quad w = \dots\dots\dots$

1326. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w , że

$$\operatorname{arctg} n + \operatorname{arctg} w = \operatorname{arctg}(2n).$$

a) $n = 1, \quad w = \dots\dots\dots$

b) $n = 2, \quad w = \dots\dots\dots$

c) $n = 3, \quad w = \dots\dots\dots$

d) $n = 4, \quad w = \dots\dots\dots$

Szeregi trygonometryczne⁸.

Najważniejsze definicje i twierdzenia związane z szeregami Fouriera.

Iloczyn skalarny w przestrzeni funkcji⁹:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx .$$

Iloczyn skalarny w języku bazy¹⁰ ortogonalnej sinusów i cosinusów:

Jeżeli

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

oraz

$$g(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx) ,$$

to

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx = 2\pi \cdot a_0 \cdot c_0 + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot c_n + b_n \cdot d_n) .$$

Równość Parsewala:

$$\langle f, f \rangle = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 2\pi \cdot a_0^2 + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) .$$

Szereg Fouriera funkcji¹¹ f :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) , \tag{F}$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx , \tag{F0}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \langle f, \cos nx \rangle = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos nx dx \tag{FA}$$

oraz

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \langle f, \sin nx \rangle = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin nx dx . \tag{FB}$$

Przy założeniach, które są spełnione przez używane przez nas funkcje, szereg Fouriera (F) jest punktowo zbieżny do funkcji f .

⁸Do omówienia na części ćwiczeń 2.06.2026 i ćwiczeniach 9.06.2026.

⁹Nie precyzujemy dokładnie, jak regularne mają być funkcje. Na pewno muszą być okresowe o okresie 2π .

¹⁰To nie jest baza w sensie algebry liniowej, bo potrzebujemy przejścia granicznego do wysumowania szeregu.

¹¹Okresowej o okresie 2π , w punktach nieciągłości mającej wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych.

1327. Obliczyć współczynniki szeregu Fouriera funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ okresowej o okresie 2π określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi/2, 2\pi) \end{cases}$$

Doprowadzić wzory na współczynniki szeregu Fouriera do postaci niezawierającej funkcji trygonometrycznych (czyli w ostatecznej postaci nie powinny występować w tych wzorach wyrażenia typu $\sin n\pi$ czy $\cos n\pi$).

1328. Niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n}.$$

Zakładając pełną beztroškę w manipulowaniu szeregami funkcyjnymi, obliczyć wartość całki

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx.$$

1329. Obliczyć wartość sumy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$. Wolno skorzystać z gotowych wartości całek:

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} dx = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{2x\sqrt{2}} dx = \frac{e^{4\pi\sqrt{2}} - 1}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \cos nx dx = \left(e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2+2},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \sin nx dx = \left(e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \right) \cdot \frac{-n}{n^2+2}.$$

W miarę możliwości rozwiązać zadanie dwoma sposobami i porównać wyniki. Dla czytelności przeprowadzanych rachunków oraz podanej odpowiedzi można użyć oznaczeń:

$$A = e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \quad \text{oraz} \quad B = e^{2\pi\sqrt{2}} + 1.$$

Wskazówka: Wykorzystać szereg Fouriera funkcji $f(x) = e^{x\sqrt{2}}$ dla $x \in (0, 2\pi)$. Powołać się na zbieżność tego szeregu w wybranym punkcie lub wykorzystać równość Parsewala.

1330. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Obliczyć wartość sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \dots$$

Wskazówka: Scałkować podany w zadaniu szereg trygonometryczny i wstawić $x = \pi/2$.

1331. W każdym z zadań **1331.1-1331.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{4^n},$$

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{5^n},$$

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{10^n},$$

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{10^n}.$$

1331.1. $\int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \dots\dots\dots$

1331.2. $\int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \dots\dots\dots$

1331.3. $\int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \dots\dots\dots$

1331.4. $\int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \dots\dots\dots$

1331.5. $\int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \dots\dots\dots$

1331.6. $\int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$

1331.7. $\int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$

1331.8. $\int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$

1331.9. $\int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$

1331.10. $\int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$

1332. W każdym z zadań **1332.1-1332.21** podaj w postaci uproszczonej wartość całki (jako liczbę wymierną lub jako iloczyn liczby wymiernej i liczby π).

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n},$$

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{3^n},$$

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{3^n},$$

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3nx}{10^n},$$

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+1)x}{10^n},$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+2)x}{10^n}.$$

$$\mathbf{1332.1.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.2.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.3.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.4.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.5.} \quad \int_0^{2\pi} E(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.6.} \quad \int_0^{2\pi} F(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.7.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.8.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.9.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.10.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.11.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.12.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.13.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.14.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.15.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.16.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.17.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.18.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.19.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.20.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{1332.21.} \quad \int_0^{2\pi} E(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

1333. W każdym z zadań **1333.1-1333.16** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

Wskazówka: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{p^n} = \frac{p \cdot \sin x}{p^2 + 1 - 2p \cdot \cos x}$ dla $p > 1$.

1333.1. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{5 - 4 \cos x} = \dots\dots\dots$

1333.2. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{5 - 3 \cos x} = \dots\dots\dots$

1333.3. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \, dx}{5 - 4 \cos x} = \dots\dots\dots$

1333.4. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \, dx}{5 - 3 \cos x} = \dots\dots\dots$

1333.5. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 3x \, dx}{5 - 4 \cos x} = \dots\dots\dots$

1333.6. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 3x \, dx}{5 - 3 \cos x} = \dots\dots\dots$

1333.7. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{13 - 5 \cos x} = \dots\dots\dots$

1333.8. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{17 - 8 \cos x} = \dots\dots\dots$

1333.9. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 4 \cos x)^2} = \dots\dots\dots$

1333.10. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 3 \cos x)^2} = \dots\dots\dots$

1333.11. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(13 - 5 \cos x)^2} = \dots\dots\dots$

1333.12. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(17 - 8 \cos x)^2} = \dots\dots\dots$

1333.13. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 4 \cos x) \cdot (5 - 3 \cos x)} = \dots\dots\dots$

1333.14. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(13 - 5 \cos x) \cdot (17 - 8 \cos x)} = \dots\dots\dots$

1333.15. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 4 \cos x) \cdot (13 - 5 \cos x)} = \dots\dots\dots$

1333.16. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 3 \cos x) \cdot (13 - 5 \cos x)} = \dots\dots\dots$

W kolejnych pięciu zadaniach zakładamy, że funkcja f jest na tyle regularna, że nie ma problemu z obliczeniem współczynników jej szeregu Fouriera, a przy tym f jest sumą swojego szeregu Fouriera.

1334. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie π , to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n nieparzystych.

1335. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $\frac{\pi}{2}$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 4.

1336. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $2\pi/3$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 3.

1337. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $2\pi/5$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 5.

1338. Obliczyć¹²

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

stosując wzór Parsewala do

$$f(x) = e^x$$

na $(0, 2\pi)$ oraz wstawiając $x = 0$ do szeregu Fouriera tej funkcji. Porównać obydwie wyniki.

1339. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2}$$

wstawiając $x = 0$ do szeregu Fouriera funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \cos(x\sqrt{2})$$

na $(0, 2\pi)$.

1340. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

używając

$$f(x) = x(\pi - |x|)$$

na $(-\pi, \pi)$.

¹²W tym i w następnych dwóch zadaniach nie prezentować na ćwiczeniach żmudnego obliczania współczynników szeregu Fouriera – skorzystać z wyniku obliczeń przeprowadzonych przed ćwiczeniami.

Zespolone szeregi liczbowe¹³.

DEFINICJA: Ciąg (z_n) o wyrazach zespolonych jest zbieżny do granicy¹⁴ g wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |z_n - g| < \varepsilon.$$

Można przepisać większość torii zbieżności ciągów z przypadku rzeczywistego:

- suma, różnica, iloczyn, iloraz¹⁵ ciągów zbieżnych jest ciągiem zbieżnym i granica sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu ciągów jest odpowiednio sumą, różnicą, iloczynem, ilorazem granic,
- zmiana skończenia wielu wyrazów nie wpływa na zbieżność i granicę,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$,
- jeżeli $|z| < 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$,
- jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = g$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |g|$.

Niech

$$z_n = x_n + y_n i,$$

gdzie x_n, y_n są liczbami rzeczywistymi. Wówczas ciąg zespolony (z_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy **obydwa**¹⁶ ciągi rzeczywiste $(x_n), (y_n)$ są zbieżne. W takim wypadku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Innymi słowy, zbieżność ciągu zespolonego sprowadza się do zbieżności dwóch ciągów rzeczywistych: ciągu części rzeczywistych oraz ciągu części urojonych.

Jeśli chodzi o **zespolone szeregi liczbowe**, to z teorii szeregów rzeczywistych przenoszą się następujące kryteria zbieżności:

- **Warunek konieczny zbieżności:** Jeżeli $z_n \not\rightarrow 0$, czyli $|z_n| \not\rightarrow 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest **rozbieżny**.
- **Zmiana wyrazów:** Zmiana lub pominięcie skończenia wielu wyrazów nie wpływa na zbieżność szeregu, ale może wpłynąć na wartość jego sumy.
- **Dodawanie/odejmowanie szeregów:** Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ są zbieżne, to zbieżne są szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n)$ i przy tym

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

¹³Do omówienia na wykładzie 10.06.2026.

¹⁴Oczywiście g jest liczbą zespoloną.

¹⁵W przypadku ilorazu musimy zadbać o to, aby do mianownika nie dostało się zero. W szczególności granica mianownika musi być niezerowa.

¹⁶Jeśli jeden z ciągów $(x_n), (y_n)$ jest rozbieżny, to ciąg (z_n) jest rozbieżny niezależnie od zachowania drugiego z tych ciągów.

- **Mnożenie przez stałą:** Jeżeli c jest liczbą zespoloną różną od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n$. Jeśli te szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

- **Szereg geometryczny:** Jeżeli c jest liczbą zespoloną różną od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} cz^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| < 1$. W takim przypadku

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz^n = \frac{cz}{1-z}.$$

- **Zbieżność bezwzględna:** Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny i wówczas

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

- **Kryterium d'Alemberta:** Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = g \in [0, \infty]$, to:

W przypadku $g < 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny oraz $z_n \rightarrow 0$.

W przypadku $g > 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny oraz $|z_n| \rightarrow \infty$.

- **Kryterium Cauchy'ego:** Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = g \in [0, \infty]$, to konkluzja jak wyżej.

Kryterium nie mające odpowiednika w teorii szeregów rzeczywistych:

- **Rozkład na części rzeczywistą i urojoną:** Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n i)$, gdzie x_n oraz y_n są rzeczywiste, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy **obydwa** szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne. Jak się można spodziewać, w przypadku szeregów zbieżnych zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n i) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

- **Uogólnienie kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych:**

Niech w będzie taką liczbą zespoloną, że $|w| = 1$ oraz $w \neq 1$. Niech (a_n) będzie nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich zbieżnym do zera. Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$$

jest zbieżny.

1341. Ciąg (z_n) o wyrazach zespolonych dany jest wzorem:

$$z_n = \sqrt{n^2 + ni} - n.$$

Wyjaśnić, dlaczego powyższa definicja nie jest jednoznaczna i zaproponować możliwe sposoby jej doprecyzowania. Wybrać taki sposób jej doprecyzowania, aby podany ciąg był zbieżny i obliczyć jego granicę.

1342. To samo dla ciągu zespolonego danego wzorem:

$$z_n = \sqrt{n^2 + 2ni} + n.$$

Zbadać zbieżność zespolonych szeregów liczbowych¹⁷:

$$\mathbf{1343.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + in + 1}$$

$$\mathbf{1344.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^6 + i}$$

$$\mathbf{1345.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^5 + i}$$

$$\mathbf{1346.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+3i)^n}{\binom{2n}{n}}$$

$$\mathbf{1347.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+6i)^n}{\binom{3n}{n}}$$

$$\mathbf{1348.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+9i)^n}{\binom{4n}{n}}$$

1349. Obliczyć sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n}.$$

Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej kilka jego początkowych sum częściowych.

Zapisać szeregi (o wyrazach rzeczywistych) części rzeczywistych i urojonych jego wyrazów. Podać sumy tych szeregów (z jednej strony uzyskać je z sumy danego szeregu zespolonego, a z drugiej strony wyliczyć bezpośrednio).

1350. To samo dla szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}.$$

Zbadać zbieżność zespolonych szeregów liczbowych w zależności od parametru¹⁸ zespolonego z . Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej zbiór tych z , dla których szereg jest zbieżny.

$$\mathbf{1351.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

$$\mathbf{1352.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{8n}}{n}$$

$$\mathbf{1353.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{12n}}{n}$$

$$\mathbf{1354.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{\sqrt{n}}$$

$$\mathbf{1355.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{3n}}{\sqrt[3]{n}}$$

$$\mathbf{1356.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{\sqrt[4]{n^2 + 1} \cdot (-4)^n}$$

$$\mathbf{1357.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^{6n}}{\sqrt[n]{n^e + 1}}$$

¹⁷W ostatnim zadaniu można użyć kalkulatora do porównania pięciocyfrowych liczb całkowitych.

¹⁸Staram się unikać w tym momencie pojęcia "zespolony szereg potęgowy", które pojawi się na kolejnym wykładzie.

Poniższe zadanie jest przeznaczone do samodzielnej analizy (jego rozwiązanie jest wzorcem dla kolejnych dwóch zadań).

1358. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$$

sprowadzając wynik do postaci

$$\frac{a + b \cos x}{c + d \cos x},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

1359. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{5^n}$$

sprowadzając wynik do postaci

$$\frac{a + b \cdot \cos x}{c + d \cdot \cos x},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

1360. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{7^n}$$

sprowadzając wynik do postaci

$$\frac{a \cdot \sin x}{b + c \cdot \cos x},$$

gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi.

1361. Rozważmy następujący szereg zespolony z parametrem¹⁹ z :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n \cdot 3^n}}{n}.$$

Obliczyć²⁰ sumę tego szeregu dla następujących wartości parametru²¹:

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}, \quad z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}, \quad z = \cos \frac{\pi}{9} + i \cdot \sin \frac{\pi}{9}, \quad z = \cos \frac{2\pi}{9} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{9} \quad \text{oraz} \quad z = i.$$

¹⁹Nadal unikam pojęcia "zespolony szereg potęgowy".

²⁰Przypomnienie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

²¹Dla uproszczenia zapisu można używać w rozwiązaniu oznaczenia

$$\cos x + i \cdot \sin x = e^{ix},$$

którego sens zostanie wkrótce wyjaśniony.

Zespólone szeregi potęgowe²².

Wyznaczyć obszary zbieżności zespolonych szeregów potęgowych:

$$1362. \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$$

$$1363. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n z^n}{\sqrt{n}}$$

$$1364. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n z^{3n}}{\sqrt[3]{n}}$$

$$1365. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{24n}}{n}$$

1366. Dla podanej liczby b podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych a , że potęgowy szereg zespolony

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny dla $z = a + bi$.

Uwaga: Istotną częścią zadania jest określenie przynależności do przedziału jego końców.

a) $b = 0$, $a \in \dots\dots\dots$

b) $b = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$, $a \in \dots\dots\dots$

c) $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a \in \dots\dots\dots$

d) $b = \frac{1}{2}$, $a \in \dots\dots\dots$

1367. Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n \cdot z^n}{(3n+2)^n}.$$

Jeśli nie potrafisz, to przynajmniej wyznacz promień zbieżności.

1368. Zapewne pamiętacie, że suma wyrazów stojących w n -tym wierszu trójkąta Pascala jest równa 2^n , a suma co drugiego wyrazu jest równa połowie tej liczby, czyli 2^{n-1} . A ile jest równa suma²³ co trzeciego wyrazu n -tego wiersza trójkąta Pascala?

Wskazówka: Dodać sumy $(1+z)^n$ dla²⁴ $z \in \left\{ 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right\}$, przemnożone przez odpowiednie współczynniki.

1369. To samo pytanie dla sumy co czwartego wyrazu trójkąta Pascala.

²²Do omówienia na wykładzie 11.06.2026.

²³Faktycznie są 3 takie sumy, zależnie od tego, od którego wyrazu zaczniemy.

²⁴To są pierwiastki sześcienne z jedynki.