1303. W każdym z zadań **1303.1-1303.25** podaj normę supremum funkcji f o podanym wzorze i dziedzinie.

1303.1. $f(x)=7\sin x, \quad D_f=\mathbb{R}, \quad \|f\|=\mathbf{7}$

1303.2. $f(x)=7\sin x-3, \quad D_f=\mathbb{R}, \quad \|f\|=\mathbf{10}$

1303.3. $f(x)=7\sin^2 x-3, \quad D_f=\mathbb{R}, \quad \|f\|=\mathbf{4}$

1303.4. $f(x)=7\sin^3 x-3, \quad D_f=\mathbb{R}, \quad \|f\|=\mathbf{10}$

1303.5. $f(x)=\log_2 x-2, \quad D_f=\left(\frac{1}{8}, 8\right), \quad \|f\|=\mathbf{5}$

1303.6. $f(x)=\log_2 x-2, \quad D_f=(2, 32), \quad \|f\|=\mathbf{3}$

1303.7. $f(x)=(\log_2 x)^2-6, \quad D_f=\left(\frac{1}{8}, 4\right), \quad \|f\|=\mathbf{6}$

1303.8. $f(x)=(\log_2 x)^3-6, \quad D_f=\left(\frac{1}{8}, 4\right), \quad \|f\|=\mathbf{33}$

1303.9. $f(x)=(\log_2 x)^4-6, \quad D_f=\left(\frac{1}{8}, 4\right), \quad \|f\|=\mathbf{75}$

1303.10. $f(x)=\sqrt{x^2+3x}-x$, $D_f=(1,+\infty)$, $\|f\|=\mathbf{3/2}$

1303.11. $f(x)=\sqrt{x^2+8x}-x$, $D_f=(1,+\infty)$, $\|f\|=\mathbf{4}$

1303.12. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+7x^2}-x$, $D_f=(1,+\infty)$, $\|f\|=\mathbf{7/3}$

1303.13. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+26x^2}-x$, $D_f=(1,+\infty)$, $\|f\|=\mathbf{26/3}$

1303.14. $f(x)=\sqrt[4]{x^4+15x^3}-x$, $D_f=(1,+\infty)$, $\|f\|=\mathbf{15/4}$

1303.15. $f(x)=\sqrt[4]{x^4+80x^3}-x$, $D_f=(1,+\infty)$, $\|f\|=\mathbf{20}$

1303.16. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+10x+29}$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=\mathbf{1/4}$

1303.17. $f(x)=\dfrac{1}{x^4+10x^2+31}$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=\mathbf{1/31}$

1303.18. $f(x)=\dfrac{1}{x^8-10x^4+33}$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=\mathbf{1/8}$

1303.19. $f(x)=\dfrac{1}{x^{12}+10x^6+37}$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=\mathbf{1/37}$

1303.20. $f(x)=\dfrac{1}{x^{14}+10x^7+39}$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=\mathbf{1/14}$

1303.21. $f(x)=2^x-7$, $D_f=(2,3)$, $\|f\|=\mathbf{3}$

1303.22. $f(x)=(2^x-7)^2-7$, $D_f=(2,3)$, $\|f\|=\mathbf{7}$

1303.23. $f(x)=(2^x-7)^2-17$, $D_f=(2,3)$, $\|f\|=\mathbf{17}$

1303.24. $f(x)=(2^x-7)^3+7$, $D_f=(2,3)$, $\|f\|=\mathbf{20}$

1303.25. $f(x)=(2^x-7)^3+17$, $D_f=(2,3)$, $\|f\|=\mathbf{18}$

1304. Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$f(x)=\frac{6x^6-x^2+7}{8x^8-x^4+11}\,.$$

Rozwiązanie:

Oszacujemy wyrażenie definiujące funkcję f rozważając dwa przypadki:

1° Gdy $|x|<1$, otrzymujemy:

$$\frac{6x^6-x^2+7}{8x^8-x^4+11}\leqslant\frac{6-0+7}{0-1+11}=\frac{13}{10}\,.$$

2° Gdy $|x|\geqslant 1$, otrzymujemy:

$$\frac{6x^6-x^2+7}{8x^8-x^4+11}\leqslant\frac{6x^6-0+7x^6}{8x^8-x^8+0}=\frac{13}{7x^2}\leqslant\frac{13}{7}\,.$$

Wobec tego dla każdej liczby rzeczywistej x mamy

$$|f(x)|=f(x)\leqslant\frac{13}{7}\,,$$

skąd wynika nierówność $\|f\|\leqslant 13/7$.

1305. Dany jest szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ o sumie F, gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x)=\frac{\sin 2^n x}{333^n}\,.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m-krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k\leqslant m$ zachodzi równość $F^{(k)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że $m=8$.

Dla liczb całkowitych nieujemnych $k\leqslant 8$ otrzymujemy

$$f_n^{(k)}(x)=\frac{2^{kn}\cdot\text{jakiśsinus}\,2^n x}{333^n}\,,$$

gdzie $f^{(0)}=f$, a "jakiśsinus" oznacza jedną z funkcji $\pm\sin$, $\pm\cos$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|f_n^{(k)}\right\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{kn}}{333^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^k}{333}\right)^n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{256}{333}\right)^n<+\infty\,,$$

skąd wynika jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}$, a w konsekwencji możliwość 8-krotnego różniczkowania danego w zadaniu szeregu funkcyjnego wyraz za wyrazem.

Ponadto

$$f_n^{(9)}(x)=\frac{2^{9n}\cos 2^n x}{333^n}=\left(\frac{512}{333}\right)^n\cdot\cos 2^n x\,,$$

co dla $x=0$ daje szereg rozbieżny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{512}{333}\right)^n$. Zatem szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(9)}$ nie jest zbieżny (nawet punktowo), co dowodzi, że liczba $m=9$ nie spełnia warunków zadania.

W rozwiązaniu wykorzystaliśmy zbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie $256/333$ bezwzględnie mniejszym od 1 i rozbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie $512/333$ większym od 1.

1306. Niech

$$f_n(x)=\frac{\cos\left(n^3\cdot x\right)}{n^{20}}\,.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Rozwiązanie:

Najpierw zauważmy, że

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{n^{3k} \cdot \mathrm{jsin}\,(n^3 \cdot x)}{n^{20}} = \frac{\mathrm{jsin}\,(n^3 \cdot x)}{n^{20-3k}}\,,$$

gdzie *jsin* jest jedną z funkcji $\pm\sin$ lub $\pm\cos$. Zatem

$$\left\| f_n^{(k)} \right\| = \frac{1}{n^{20-3k}} = n^{3k-20}\,.$$

Jeżeli szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\| f_n^{(k)} \right\|$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Ponieważ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| f_n^{(k)} \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{20-3k}}\,,$$

szereg ten jest zbieżny, o ile $20-3k>1$, czyli dla $k \leqslant 6$.

W szczególności szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(6)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Jeżeli $\left\| f_n^{(k)} \right\| \not\to 0$ przy $n\to\infty$, to szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ nie jest jednostajnie zbieżny. Taką sytuację mamy np. dla $k=7$, gdzie

$$\left\| f_n^{(7)} \right\| = n \to \infty\,.$$

Wobec tego szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(7)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k=6$.

1307. Dany jest szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F, gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{\cos n^8 x}{n^{60}}\,.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m-krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k \leqslant m$ zachodzi równość $F^{(k)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że $m=7$.

Dla liczb całkowitych nieujemnych $k \leqslant 7$ otrzymujemy

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{\text{jakiśsinus}\, n^8 x}{n^{60-8k}}\,,$$

gdzie $f^{(0)}=f$, a "jakiśsinus" oznacza jedną z funkcji $\pm\sin$, $\pm\cos$. Zatem
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|f_n^{(k)}\right\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{60-8k}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{60-8\cdot 7}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}<+\infty\,,$$
skąd wynika jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}$, a w konsekwencji możliwość 7-krotnego różniczkowania danego w zadaniu szeregu funkcyjnego wyraz za wyrazem.

Ponadto
$$f_n^{(8)}(x)=n^4\cos n^8x\,,$$
co dla $x=0$ daje szereg rozbieżny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4$. Zatem szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(8)}$ nie jest zbieżny (nawet punktowo), co dowodzi, że liczba $m=8$ nie spełnia warunków zadania.

1308. Niech
$$f_n(x)=\frac{\cos\left(\binom{2n}{n}\cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4}\,.$$
Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że
$$f_n^{(k)}(x)=\frac{\binom{2n}{n}^k\cdot\mathrm{jsin}\left(\binom{2n}{n}\cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4}\,,$$
gdzie *jsin* jest jedną z funkcji $\pm\sin$ lub $\pm\cos$. Stąd
$$\left\|f_n^{(k)}\right\|=\frac{\binom{2n}{n}^k}{\binom{3n}{n}^4}\,. \tag{1}$$

Stosując kryterium d'Alemberta do szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|f_n^{(k)}\right\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}^k}{\binom{3n}{n}^4} \tag{2}$$
otrzymujemy
$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}^k}{\binom{3n+3}{n+1}^4}\cdot\frac{\binom{3n}{n}^4}{\binom{2n}{n}^k}=\frac{\binom{2n+2}{n+1}^k}{\binom{2n}{n}^k}\cdot\frac{\binom{3n}{n}^4}{\binom{3n+3}{n+1}^4}=$$
$$=\left(\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{(n+1)^2}\right)^k\cdot\left(\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot(n+1)}{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}\right)^4\to\frac{4^k\cdot 4^4}{27^4}=\frac{2^{2k+8}}{3^{12}}=\left(\frac{2^{k+4}}{3^6}\right)^2=g\,.$$
Ponieważ $3^6=729$, zachodzą nierówności $2^9<3^6<2^{10}$. Zatem dla $k=5$ otrzymujemy $g<1$. Wobec tego na mocy kryterium d'Alemberta szereg liczbowy (2) jest zbieżny, a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(5)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Odnosząc powyższe kryterium d'Alemberta do ciągu (1) otrzymujemy $g>1$ dla $k=6$, skąd wynika, że ciąg liczbowy (1) jest rozbieżny do $+\infty$. W szczególności
$$\left\|f_n^{(6)}\right\| \not\to 0\,,$$
a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(6)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k=5$.

1309. Niech
$$f_n(x)=\frac{\cos(n!\cdot x)}{(3n)!}\,.$$
Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Rozwiązanie:

Niech $k=3$. Wówczas
$$f_n^{(k)}(x)=f_n'''(x)=\frac{(n!)^3\cdot\sin(n!\cdot x)}{(3n)!}\,,$$
skąd
$$\|f_n'''\|=\frac{(n!)^3}{(3n)!}\,.$$

Stosując kryterium d'Alemberta do szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n'''\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!} \tag{3}$$
otrzymujemy
$$\frac{((n+1)!)^3}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{(n!)^3}=\frac{(n+1)^3}{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}\to\frac{1}{27}<1\,.$$
Zatem szereg liczbowy (3) jest zbieżny, a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'''$ jest jednostajnie zbieżny.

Ponadto
$$f_n^{(k+1)}(x)=f_n^{(4)}(x)=\frac{(n!)^4\cdot\cos(n!\cdot x)}{(3n)!}\,,$$
skąd
$$\left\|f_n^{(4)}\right\|=\frac{(n!)^4}{(3n)!}\,. \tag{4}$$

Stosując kryterium d'Alemberta do ciągu (4) otrzymujemy
$$\frac{((n+1)!)^4}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{(n!)^4}=\frac{(n+1)^4}{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}\to+\infty>1\,.$$

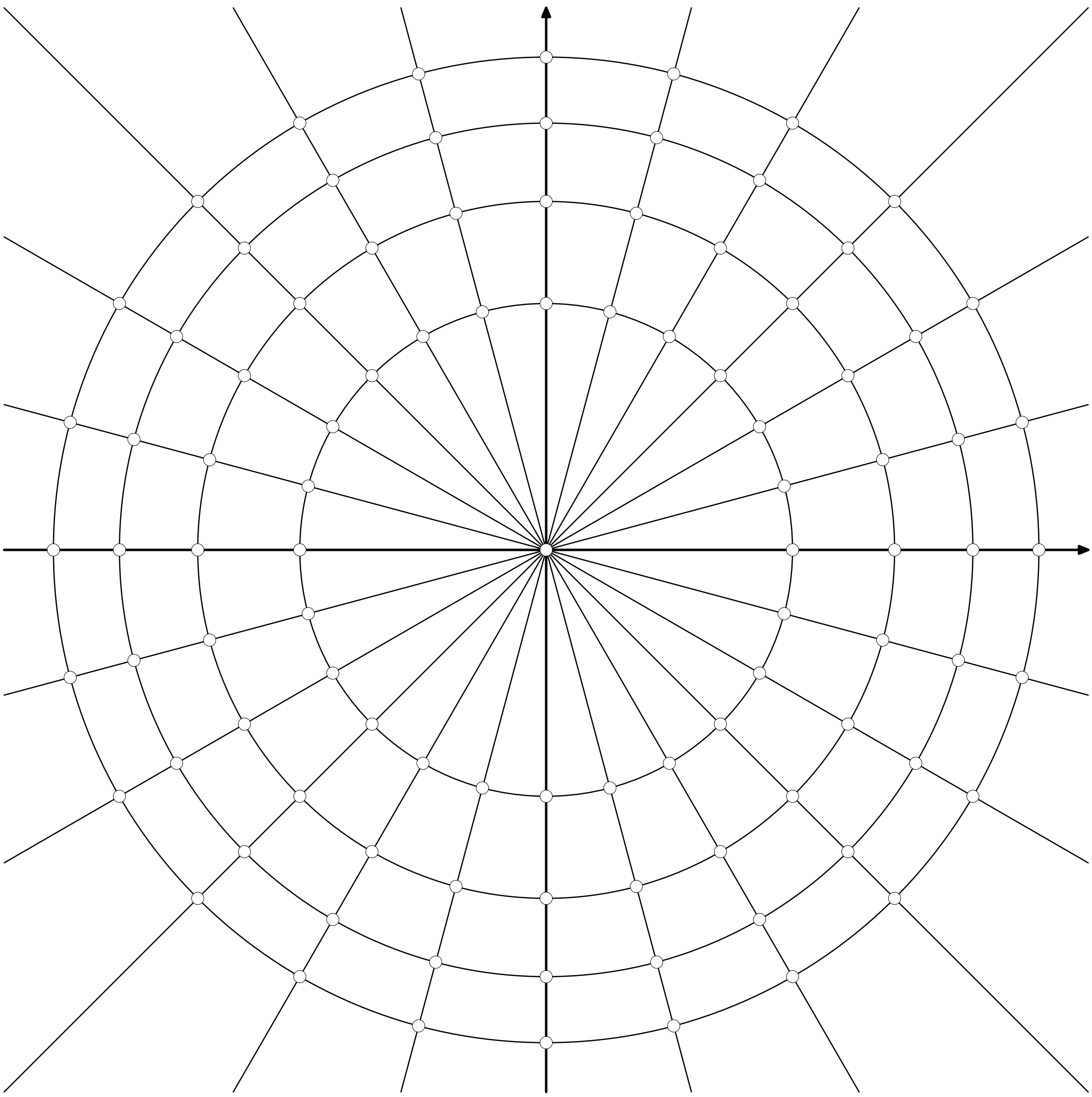
Zatem ciąg liczbowy (4) jest rozbieżny do $+\infty$, skąd w szczególności

$$\left\|f_n^{(4)}\right\| \not\to 0\,,$$

a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Inne wnioskowanie: Z kryterium d'Alemberta jak wyżej, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^4}{(3n)!}$ jest rozbieżny, więc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}$ nie jest nawet punktowo zbieżny, a co dopiero jednostajnie.

1310. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^4=-4$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n=1,2,3,4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.

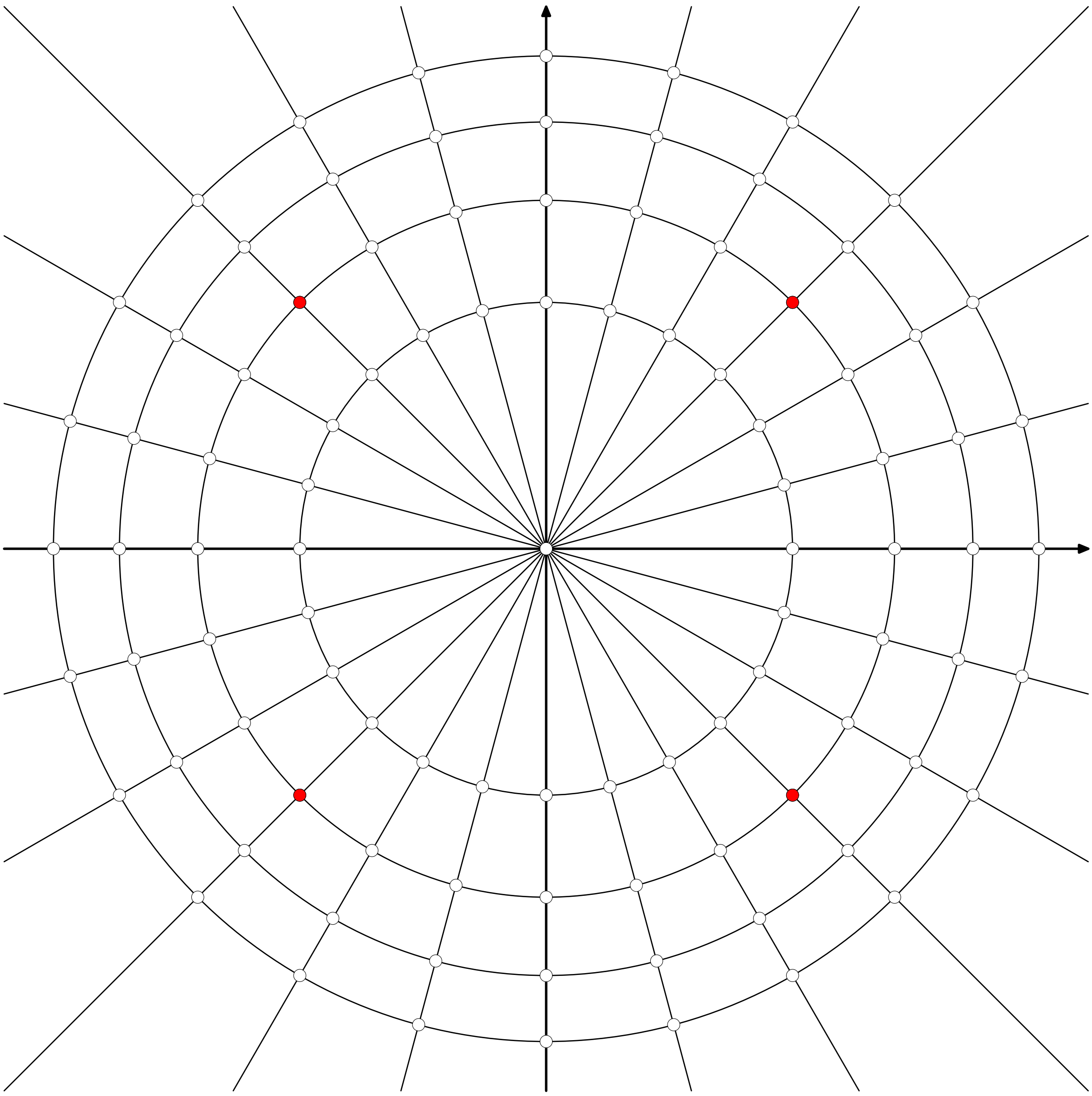


Rozwiązanie:

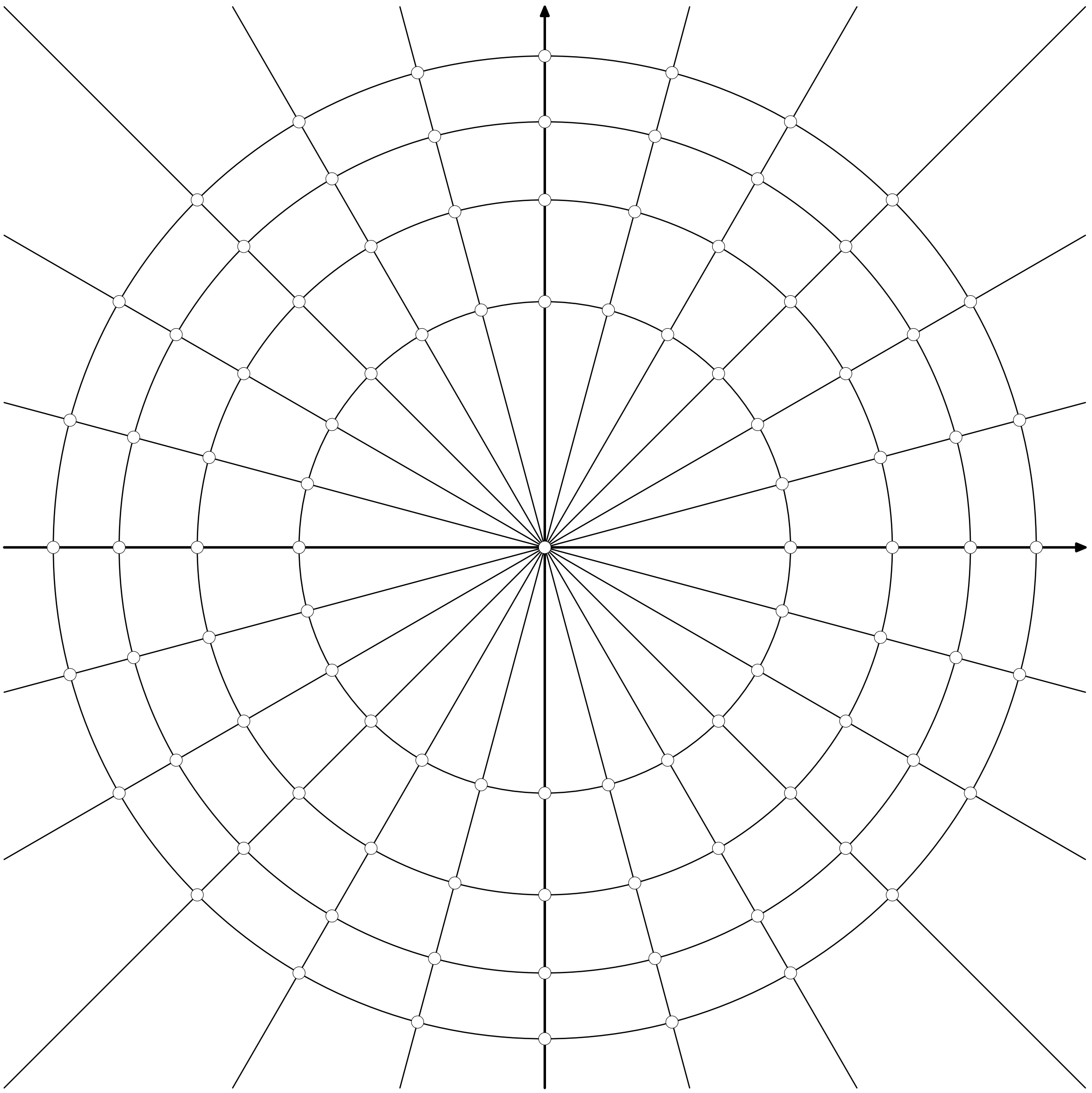
Liczba zespolona -4 ma moduł 4 i argument π, w związku z czym jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$, a jeden z nich ma argument $\pi/4$. Tym pierwiastkiem jest więc $\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i$. Pozostałe trzy rozwiązania danego w zadaniu równania leżą na okręgu o promieniu $\sqrt{2}$ co 90°.

Inaczej: liczba -4 ma moduł 4 i argument π, a zatem jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt{2}$ i argumenty $\pi/4+k\pi/2$ dla $k=0,1,2,3$, czyli odpowiednio $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 4 rozwiązania: $\pm_1 1\pm_2 i$.



1311. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^9 = 27z^3$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.



Rozwiązanie:

Przepisujemy dane równanie w postaci

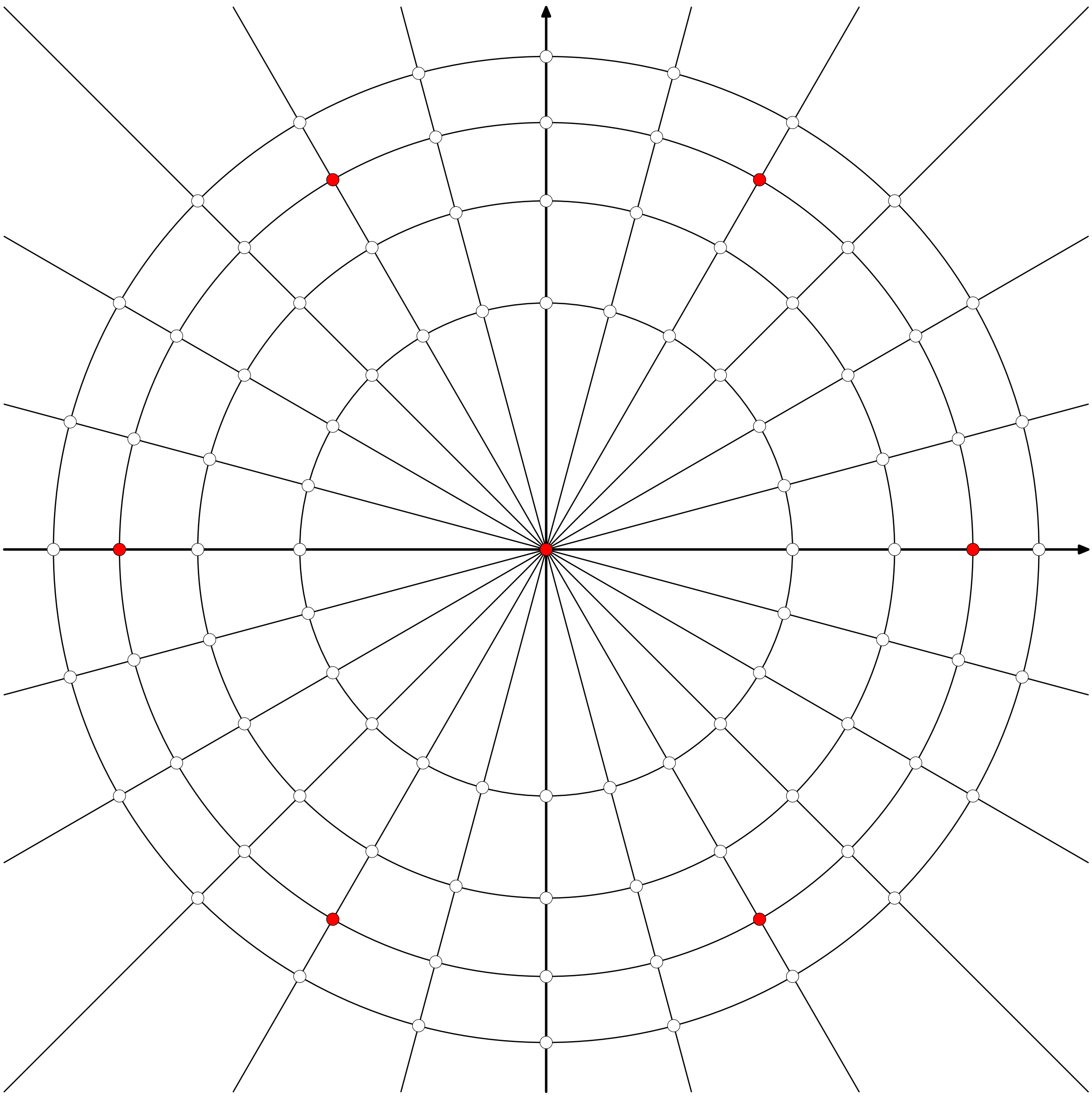
$$z^3\cdot\left(z^6-27\right)=0\,.$$

Powyższe równanie jest spełnione przez $z=0$ oraz przez takie liczby zespolone z, że $z^6=27$.

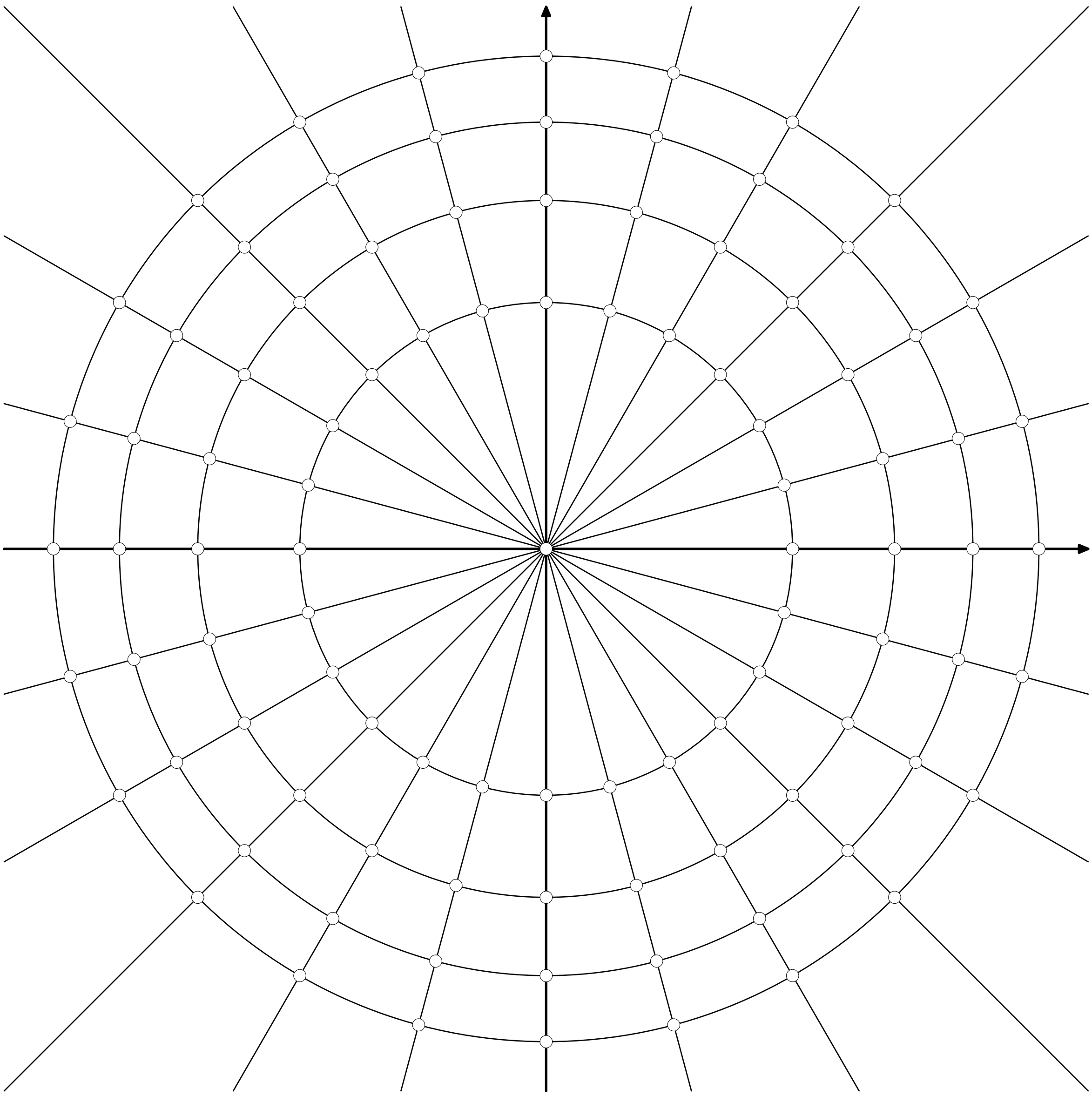
Zauważmy, że jednym z rozwiązań równania $z^6=27$ jest $z=\sqrt{3}$, a pozostałe pięć rozwiązań tego równania leży na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$ co 60°.

Inaczej: liczba 27 ma moduł 27 i argument 0, a zatem jej pierwiastki szóstego stopnia mają moduł $\sqrt{3}$ i argumenty $2k\pi/6$ dla $k=0,1,2,3,4,5$, czyli odpowiednio 0, $\pi/3$, $2\pi/3$, π, $4\pi/3$, $5\pi/3$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 7 rozwiązań: 0, $\pm\sqrt{3}$ oraz $\pm_1\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm_2\dfrac{3i}{2}$.



1312. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^7+4z^3=8z^4+32$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n=1,2,3,4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co $15°$.



Rozwiązanie:

Przepisujemy dane równanie w postaci

$$z^3 \cdot \left(z^4+4\right) = 8 \cdot \left(z^4+4\right) ,$$

czyli

$$\left(z^3-8\right) \cdot \left(z^4+4\right) = 0 .$$

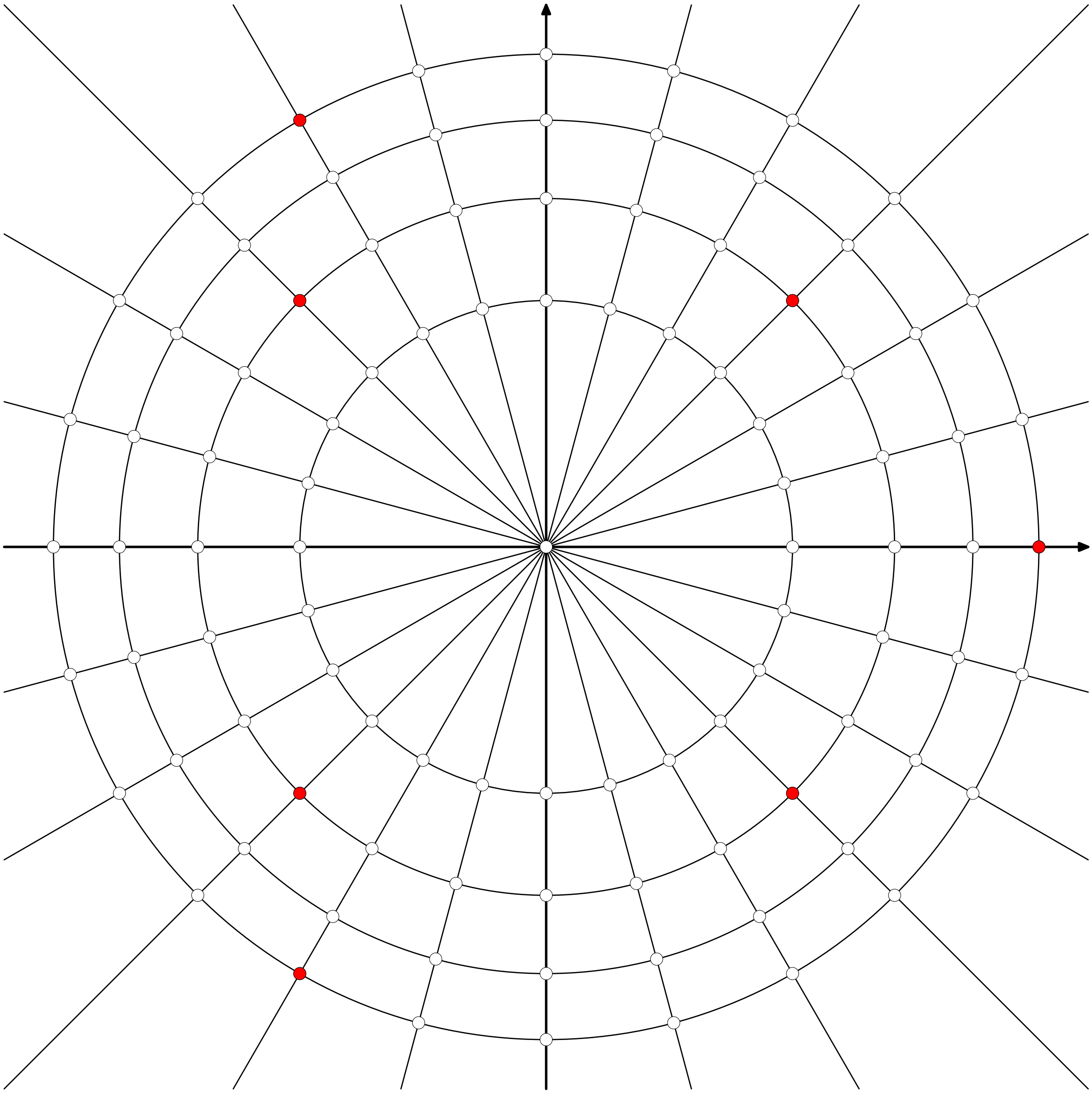
Rozwiązując równanie $z^4+4=0$, czyli $z^4=-4$, stwierdzamy, że liczba zespolona -4 ma moduł 4 i argument π, w związku z czym jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$, a jeden z nich ma argument $\pi/4$. Tym pierwiastkiem jest więc $\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i$. Pozostałe trzy rozwiązania tego równania leżą na okręgu o promieniu $\sqrt{2}$ co 90°.

Inaczej: liczba -4 ma moduł 4 i argument π, a zatem jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt{2}$ i argumenty $\pi/4+k\pi/2$ dla $k=0,1,2,3$, czyli odpowiednio $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$.

Z kolei rozwiązując równanie $z^3-8=0$, czyli $z^3=8$, zauważamy, że jego rozwiązaniem jest $z=2$, a pozostałe dwa rozwiązania tego równania leżą na okręgu o promieniu 2 co 120°.

Inaczej: liczba 8 ma moduł 8 i argument 0, a zatem jej pierwiastki trzeciego stopnia mają moduł 2 i argumenty $2k\pi/3$ dla $k=0,1,2$, czyli odpowiednio 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 7 rozwiązań: $\pm_1 1 \pm_2 i$, 2 oraz $-1\pm\sqrt{3}i$.



1313. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^\pi \sin^7 x\,dx\,.$$

Przedstawić wynik w postaci ułamka nieskracalnego o dwucyfrowym liczniku i mianowniku.

Rozwiązanie:

Sposób I

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy

$$z=\cos x+i\sin x\,,$$

co daje

$$z^n=\cos nx+i\sin nx, \qquad z^{-n}=\cos nx-i\sin nx, \qquad \sin nx=\frac{z^n-z^{-n}}{2i}\,.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\sin^7 x=\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^7=\frac{z^7-7z^5+21z^3-35z+35z^{-1}-21z^{-3}+7z^{-5}-z^{-7}}{-128i}=$$

$$=-\frac{\sin 7x}{64}+\frac{7\sin 5x}{64}-\frac{21\sin 3x}{64}+\frac{35\sin x}{64}\,.$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę:

$$\int_0^\pi \sin^7 x\,dx=\int_0^\pi -\frac{\sin 7x}{64}+\frac{7\sin 5x}{64}-\frac{21\sin 3x}{64}+\frac{35\sin x}{64}\,dx=$$

$$=\frac{\cos 7x}{7\cdot 64}-\frac{7\cos 5x}{5\cdot 64}+\frac{21\cos 3x}{3\cdot 64}-\frac{35\cos x}{64}\Bigg|_{x=0}^{\pi}=\frac{\cos 7x}{7\cdot 64}-\frac{7\cos 5x}{5\cdot 64}+\frac{7\cos 3x}{64}-\frac{35\cos x}{64}\Bigg|_{x=0}^{\pi}=$$

$$=\frac{\cos 7\pi}{7\cdot 64}-\frac{7\cos 5\pi}{5\cdot 64}+\frac{7\cos 3\pi}{64}-\frac{35\cos \pi}{64}-\frac{\cos 0}{7\cdot 64}+\frac{7\cos 0}{5\cdot 64}-\frac{7\cos 0}{64}+\frac{35\cos 0}{64}=$$

$$=-\frac{1}{7\cdot 64}+\frac{7}{5\cdot 64}-\frac{7}{64}+\frac{35}{64}-\frac{1}{7\cdot 64}+\frac{7}{5\cdot 64}-\frac{7}{64}+\frac{35}{64}=\frac{1}{32}\cdot\left(-\frac{1}{7}+\frac{7}{5}-7+35\right)=$$

$$=\frac{1}{32}\cdot\left(-\frac{1}{7}+\frac{7}{5}+28\right)=\frac{1}{32}\cdot\left(-\frac{1}{7}+\frac{7}{5}+28\right)=\frac{-5+49+980}{1120}=\frac{1024}{1120}=\frac{32}{35}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość 32/35.

Sposób II

Podstawienie $t=\cos x$ i formalnie $dt=-\sin x\,dx$ prowadzi do

$$\int_0^\pi \sin^7 x\,dx=-\int_1^{-1}\left(1-t^2\right)^3\,dt=\int_{-1}^1 -t^6+3t^4-3t^2+1\,dt=2\cdot\int_0^1 -t^6+3t^4-3t^2+1\,dt=$$

$$=2\cdot\left(-\frac{t^7}{7}+\frac{3t^5}{5}-t^3+t\right)\Bigg|_{t=0}^{1}=2\cdot\left(-\frac{1}{7}+\frac{3}{5}\right)=2\cdot\frac{-5+21}{35}=2\cdot\frac{16}{15}=\frac{32}{35}\,.$$

1314. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{\pi/6} \cos^6 x\, dx\,.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z = \cos x + i\sin x$. Wówczas

$$z^n = \cos nx + i\sin nx, \qquad z^{-n} = \cos nx - i\sin nx, \qquad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}\,.$$

Zatem

$$\cos^6 x = \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^6 = \frac{z^6+6z^4+15z^2+20+15z^{-2}+6z^{-4}+z^{-6}}{64} =$$

$$= \frac{\cos 6x}{32} + \frac{3\cos 4x}{16} + \frac{15\cos 2x}{32} + \frac{5}{16}\,.$$

Wobec tego

$$\int_0^{\pi/6} \cos^6 x\, dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 6x}{32} + \frac{3\cos 4x}{16} + \frac{15\cos 2x}{32} + \frac{5}{16}\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 6x}{32} + \frac{3\cos 4x}{16} + \frac{15\cos 2x}{32}\, dx + \int_0^{\pi/6} \frac{5}{16}\, dx = \left.\frac{\sin 6x}{192} + \frac{3\sin 4x}{64} + \frac{15\sin 2x}{64}\right|_{x=0}^{\pi/6} + \frac{\pi}{6}\cdot\frac{5}{16} =$$

$$= \frac{\sin\pi}{192} + \frac{3\sin(2\pi/3)}{64} + \frac{15\sin(\pi/3)}{64} + \frac{5\pi}{96} = \frac{0}{192} + \frac{3\cdot\left(\sqrt{3}/2\right)}{64} + \frac{15\cdot\left(\sqrt{3}/2\right)}{64} + \frac{5\pi}{96} =$$

$$= \frac{18\cdot\left(\sqrt{3}/2\right)}{64} + \frac{5\pi}{96} = \frac{9\sqrt{3}}{64} + \frac{5\pi}{96}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{5\pi}{96} + \frac{9\sqrt{3}}{64}$.

1315. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\pi} \sin^8 x\, dx\,.$$

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy

$$z = \cos x + i\sin x\,,$$

co daje

$$z^n = \cos nx + i\sin nx, \qquad z^{-n} = \cos nx - i\sin nx, \qquad \sin x = \frac{z-z^{-1}}{2i}, \qquad \cos nx = \frac{z^n+z^{-n}}{2}\,.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\sin^8 x = \left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^8 = \frac{z^8-8z^6+28z^4-56z^2+70-56z^{-2}+28z^{-4}-8z^{-6}+z^{-8}}{256} =$$

$$= \frac{\cos 8x}{128} - \frac{\cos 6x}{16} + \frac{7\cos 4x}{32} - \frac{7\cos 2x}{16} + \frac{35}{128}\,.$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^\pi \sin^8 x\,dx = \int_0^\pi \frac{\cos 8x}{128} - \frac{\cos 6x}{16} + \frac{7\cos 4x}{32} - \frac{7\cos 2x}{16} + \frac{35}{128}\,dx = \frac{35\pi}{128}\,.$$

Odpowiedź
Dana całka ma wartość $35\pi/128$.

1316. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,dx\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\pi$, gdzie w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy $z=\cos x + i\sin x$, co daje

$$z^n = \cos nx + i\sin nx, \qquad z^{-n} = \cos nx - i\sin nx, \qquad \cos nx = \frac{z^n+z^{-n}}{2}, \qquad \sin nx = \frac{z^n-z^{-n}}{2i}\,.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\sin^2 x\cdot\cos^4 x = \left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2\cdot\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^4 = \frac{(z^2-2+z^{-2})\cdot(z^4+4z^2+6+4z^{-2}+z^{-4})}{-64} =$$

$$= \frac{z^6+2z^4-z^2-4-z^{-2}+2z^{-4}+z^{-6}}{-64} = -\frac{\cos 6x}{32} - \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 2x}{32} + \frac{1}{16}\,.$$

Inna wersja najbardziej uciążliwego fragmentu powyższych rachunków:

$$\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2\cdot\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^4 = \left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2 = \left(\frac{z^2-z^{-2}}{4i}\right)^2\cdot\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(z^4-2+z^{-4})\cdot(z^2+2+z^{-2})}{-64} = \frac{z^6+2z^4-z^2-4-z^{-2}+2z^{-4}+z^{-6}}{-64}\,.$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\cdot\cos^4 x\,dx = \int_0^{2\pi} -\frac{\cos 6x}{32} - \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 2x}{32} + \frac{1}{16}\,dx = \frac{\pi}{8}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\pi/8$.

1317. Udowodnić nierówność
$$\int_0^{4\pi}\cos^{10}x\,dx<\pi\,.$$

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy
$$z=\cos x+i\sin x\,,$$
co daje
$$z^n=\cos nx+i\sin nx,\qquad z^{-n}=\cos nx-i\sin nx,\qquad \cos nx=\frac{z^n+z^{-n}}{2}\,.$$
Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:
$$\cos^{10}x=\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^{10}=$$
$$=\frac{z^{10}+10z^8+45z^6+120z^4+210z^2+252+210z^{-2}+120z^{-4}+45z^{-6}+10z^{-8}+z^{-10}}{1024}=$$
$$=\frac{\cos 10x}{512}+\frac{5\cos 8x}{256}+\frac{45\cos 6x}{512}+\frac{15\cos 4x}{64}+\frac{105\cos 2x}{256}+\frac{63}{256}\,.$$
Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):
$$\int_0^{4\pi}\cos^{10}x\,dx=\int_0^{4\pi}\frac{\cos 10x}{512}+\frac{5\cos 8x}{256}+\frac{45\cos 6x}{512}+\frac{15\cos 4x}{64}+\frac{105\cos 2x}{256}+\frac{63}{256}\,dx=\frac{63\pi}{64}<\pi\,.$$

1318. Znaleźć taką funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że
$$f''(x)=\cos^4 x\quad \text{dla każdego}\quad x\in\mathbb{R}\,,$$
a ponadto $f(0)=f(\pi)=0$. Obliczyć $f(2\pi)$.

Rozwiązanie:

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z=\cos x+i\sin x$. Wówczas
$$z^n=\cos nx+i\sin nx,\qquad z^{-n}=\cos nx-i\sin nx,\qquad \cos nx=\frac{z^n+z^{-n}}{2}\,.$$
Zatem
$$\cos^4 x=\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^4=\frac{z^4+4z^2+6+4z^{-2}+z^{-4}}{16}=\frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{8}\,.$$
W konsekwencji
$$f'(x)=\int\frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{8}\,dx=\frac{\sin 4x}{32}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3x}{8}+C$$
oraz
$$f(x)=\int\frac{\sin 4x}{32}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3x}{8}+C\,dx=-\frac{\cos 4x}{128}-\frac{\cos 2x}{8}+\frac{3x^2}{16}+Cx+D\,.$$

Z warunku $f(0)=0$ otrzymujemy
$$-\frac{1}{128}-\frac{1}{8}+D=0\,,$$
skąd $\mathbf{D=17/128}$. Natomiast z warunku $f(\pi)=0$ otrzymujemy
$$-\frac{1}{128}-\frac{1}{8}+\frac{3\pi^2}{16}+C\pi+\frac{17}{128}=0\,,$$
co daje $\mathbf{C=-3\boldsymbol{\pi}/16}$.

Szukana funkcja jest więc dana wzorem
$$\mathbf{f(x)=-\frac{\cos 4x}{128}-\frac{\cos 2x}{8}+\frac{3x^2}{16}-\frac{3\boldsymbol{\pi} x}{16}+\frac{17}{128}\,,}$$
a przy tym
$$\mathbf{f(2\boldsymbol{\pi})}=-\frac{\cos 8\pi}{128}-\frac{\cos 4\pi}{8}+\frac{3(2\pi)^2}{16}-\frac{3\pi(2\pi)}{16}+\frac{17}{128}=\mathbf{\frac{3\boldsymbol{\pi}^2}{8}}\,.$$

1319. Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a<7$, że
$$\int_a^7\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ
$$\int_a^7\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg} x\Big|_{x=a}^{7}=\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} a\,,$$
pozostaje znaleźć liczbę a spełniającą równanie
$$\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} a=\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg} 1\,,$$
czyli
$$\operatorname{arctg} a=\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 1\,.$$
Ponieważ $\operatorname{arctg} t$ jest argumentem liczby zespolonej $1+ti$, otrzymujemy
$$\operatorname{arctg} a=\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 1=\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg}(-1)=\arg(1+7i)+\arg(1-i)=$$
$$=\arg\left((1+7i)\cdot(1-i)\right)+2k\pi=\arg(8+6i)+2k\pi=\arg\left(1+\frac{3}{4}i\right)+2k\pi=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+2k\pi\,,$$
skąd po uwzględnieniu nierówności
$$0<\operatorname{arctg}\frac{3}{4}<\frac{\pi}{2}$$
i
$$0<\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 1<\frac{\pi}{2}$$
wynika $k=0$ oraz $a=3/4$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia liczba $a=3/4$.

1320. Podaj wartość całki oznaczonej. Wynik zapisz w postaci w albo $w\cdot\sqrt{p}$, gdzie w jest liczbą wymierną zapisaną w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, a p jest liczbą pierwszą.

a) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 x\,dx=\mathbf{2/3}$ **b)** $\int\limits_0^{\pi/3}\sin^3 x\,dx=\mathbf{5/24}$

c) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\sin^3 x\,dx=\mathbf{3/8\cdot\sqrt{3}}$ **d)** $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^3 x\,dx=\mathbf{5/12\cdot\sqrt{2}}$

1321. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych dodatnich parametru p, dla których podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z-1|>|z-3|$.

a) $z=\log_2 p+i\cdot\log_3 p$, $\left(\mathbf{4,\,\infty}\right)$ **b)** $z=\log_3 p+i\cdot\log_5 p$, $\left(\mathbf{9,\,\infty}\right)$

c) $z=\log_5 p+i\cdot\log_7 p$, $\left(\mathbf{25,\,\infty}\right)$ **d)** $z=\log_7 p+i\cdot\log_2 p$, $\left(\mathbf{49,\,\infty}\right)$

1322. Niech $z=1-i$. Podaj w postaci kartezjańskiej:

a) $z^7=\mathbf{8+8\cdot i}$ **b)** $z^8=\mathbf{16}$

c) $z^9=\mathbf{16-16\cdot i}$ **d)** $z^{10}=\mathbf{-32\cdot i}$

1323. Niech $z=\sqrt{3}+i$. Podaj część rzeczywistą potęgi liczby z:

a) $\mathrm{Re}\left(z^5\right)=\mathbf{-16\cdot\sqrt{3}}$ **b)** $\mathrm{Re}\left(z^6\right)=\mathbf{-64}$

c) $\mathrm{Re}\left(z^7\right)=\mathbf{-64\cdot\sqrt{3}}$ **d)** $\mathrm{Re}\left(z^8\right)=\mathbf{-128}$

1324. Podaj taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\overline{z}=z^{-1}$.

a) $z=\frac{2}{3}+ai$, $a=\mathbf{\sqrt{5}/3}$ **b)** $z=\frac{3}{5}+ai$, $a=\mathbf{4/5}$

c) $z=\frac{1}{4}+ai$, $a=\mathbf{\sqrt{15}/4}$ **d)** $z=\frac{4}{5}+ai$, $a=\mathbf{3/5}$

1325. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że

$$\operatorname{arctg} n+\operatorname{arctg} w=\operatorname{arctg}(n+1)\,.$$

a) $n=2$, $w=\mathbf{1/7}$ **b)** $n=3$, $w=\mathbf{1/13}$

c) $n=4$, $w=\mathbf{1/21}$ **d)** $n=5$, $w=\mathbf{1/31}$

1326. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że

$$\operatorname{arctg} n+\operatorname{arctg} w=\operatorname{arctg}(2n)\,.$$

a) $n=1$, $w=\mathbf{1/3}$ **b)** $n=2$, $w=\mathbf{2/9}$

c) $n=3$, $w=\mathbf{3/19}$ **d)** $n=4$, $w=\mathbf{4/33}$

1327. Obliczyć współczynniki szeregu Fouriera funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ okresowej o okresie 2π określonej wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x\in[0,\,\pi/2] \\ 0 & \text{dla} \quad x\in(\pi/2,\,2\pi) \end{cases}$$

Doprowadzić wzory na współczynniki szeregu Fouriera do postaci niezawierającej funkcji trygonometrycznych (czyli w ostatecznej postaci nie powinny występować w tych wzorach wyrażenia typu $\sin n\pi$ czy $\cos n\pi$).

Rozwiązanie:

Stosując wzory na współczynniki szeregu Fouriera otrzymujemy:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} dx=\frac{\pi/2}{2\pi}=\frac{1}{4}\,,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,dx=\frac{\sin nx}{n\pi}\Bigg|_{x=0}^{\pi/2}=\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n\equiv 0 \pmod 2 \\ \dfrac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} & \text{dla} \quad n\equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin nx\,dx=-\frac{\cos nx}{n\pi}\Bigg|_{x=0}^{\pi/2}=\frac{1-\cos(n\pi/2)}{n\pi}=$$

$$=\left\{\begin{matrix} \dfrac{1}{n\pi} & \text{dla} \quad n\equiv 1 \pmod 2 \\ \dfrac{1-(-1)^{n/2}}{n\pi} & \text{dla} \quad n\equiv 0 \pmod 2 \end{matrix}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{matrix} \dfrac{1}{n\pi} & \text{dla} \quad n\equiv 1 \pmod 2 \\ 0 & \text{dla} \quad n\equiv 0 \pmod 4 \\ \dfrac{2}{n\pi} & \text{dla} \quad n\equiv 2 \pmod 4 \end{matrix}\right\}=\begin{cases} \dfrac{1}{n\pi} & \text{dla} \quad n\equiv 1 \pmod 2 \\ 0 & \text{dla} \quad n\equiv 0 \pmod 4 \\ \dfrac{1}{(n/2)\pi} & \text{dla} \quad n\equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

1328. Niech

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{3^n}\,.$$

Zakładając pełną beztroskę w manipulowaniu szeregami funkcyjnymi, obliczyć wartość całki

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Korzystamy z tego, że sinusy o różnych częstotliwościach są prostopadłe, czyli całka z ich iloczynu jest zerem:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{dla} \quad m=n \\ 0 & \text{dla} \quad m \neq n \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{3^m}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \frac{\sin mx}{3^m}\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \frac{\sin nx}{3^n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 nx}{6^n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{6^n} = \frac{\pi}{5}\,.$$

Uwaga: Idea powyższych rachunków jest następująca: iloczyn skalarny dwóch wektorów jest sumą iloczynów odpowiednich współrzędnych – tutaj rolę współrzędnych spełniają współczynniki szeregu trygonometrycznego (z dokładnością do stałego czynnika).

W rozwiązaniu można też powołać się bezpośrednio na postać iloczynu skalarnego w bazie ortogonalnej sinusów i cosinusów.

1329. Obliczyć wartość sumy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$. Wolno skorzystać z gotowych wartości calek:

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}}\,dx = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{\sqrt{2}}\,,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{2x\sqrt{2}}\,dx = \frac{e^{4\pi\sqrt{2}}-1}{2\sqrt{2}}\,,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \cos nx\,dx = \left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2+2}\,,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \sin nx\,dx = \left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right) \cdot \frac{-n}{n^2+2}\,.$$

W miarę możliwości rozwiązać zadanie dwoma sposobami i porównać wyniki. Dla czytelności przeprowadzanych rachunków oraz podanej odpowiedzi można użyć oznaczeń:

$$A = e^{2\pi\sqrt{2}}-1 \qquad \text{oraz} \qquad B = e^{2\pi\sqrt{2}}+1\,.$$

Wskazówka: Wykorzystać szereg Fouriera funkcji $f(x) = e^{x\sqrt{2}}$ dla $x \in (0, 2\pi)$. Powołać się na zbieżność tego szeregu w wybranym punkcie lub wykorzystać równość Parsevala.

Rozwiązanie:

Na wstępie zauważmy, że na mocy podanych równości szereg Fouriera funkcji f okresowej z okresem 2π i określonej na przedziale $[0, 2\pi)$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^{x\sqrt{2}} & \text{dla} \quad x \in (0, 2\pi) \\ \frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2} & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

ma współczynniki

$$a_0=\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{2\pi\sqrt{2}}\,,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{n^2+2}\,,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{-n}{n^2+2}\,,$$

a ponadto jest on punktowo zbieżny do funkcji f, gdyż f ma w punkcie nieciągłości wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych.

Sposób I

Porównując wartość funkcji f w punkcie $x=0$ z sumą jej szeregu Fouriera w tym punkcie otrzymujemy

$$f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,,$$

czyli

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2}=\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{2\pi\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,.$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2}-\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{2\pi\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}}+\pi\sqrt{2}-e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2\pi\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}}+\pi\sqrt{2}-e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{4\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}B-A}{4A}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,.$$

Sposób II

Korzystając z równości Parsevala:

$$\int_0^{2\pi}f(x)^2\,dx=2\pi a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

otrzymujemy

$$\frac{e^{4\pi\sqrt{2}}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)^2}{4\pi}+\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{n^2+2}\right)^2+\left(\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{-n}{n^2+2}\right)^2\right)\,,$$

co przepisujemy kolejno jako:

$$\frac{\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}+1\right)}{2\sqrt{2}}=\frac{\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)^2}{4\pi}+\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{4\pi}+\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2\sqrt{2}}-\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{4\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}}+\pi\sqrt{2}-e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{4\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}}+\pi\sqrt{2}-e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{4\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}B-A}{4A}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,.$$

1330. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}\qquad \text{dla}\qquad 0\leqslant x\leqslant 2\pi\,.$$

Obliczyć wartość sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\ldots$$

Wskazówka: Scałkować podany w zadaniu szereg trygonometryczny i wstawić $x=\pi/2$.

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f będącą sumą szeregu funkcyjnego

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,, \tag{5}$$

gdzie $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^3}$, a więc $f_n'(x)=\dfrac{\cos nx}{n^2}$. Ponieważ szeregi liczbowe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n'\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

są zbieżne, szeregi funkcyjne $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n'$ są zbieżne jednostajnie i w konsekwencji szereg (5) można różniczkować wyraz za wyrazem. Zatem dla $x\in[0,\,2\pi]$ mamy

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}\,,$$

skąd

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}\,dx=\frac{x^3}{12}-\frac{\pi x^2}{4}+\frac{\pi^2 x}{6}+C\,.$$

Zauważmy, że ze wzoru (5) wynika $f(0)=0$, skąd $C=0$ i w konsekwencji

$$f(x)=\frac{x^3}{12}-\frac{\pi x^2}{4}+\frac{\pi^2 x}{6} \qquad \text{dla} \qquad 0\leqslant x\leqslant 2\pi\,. \tag{6}$$

Przyjmując $x=\pi/2$ we wzorze (6) otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{96}-\frac{\pi^3}{16}+\frac{\pi^3}{12}=\pi^3\cdot\frac{1-6+8}{96}=\pi^3\cdot\frac{3}{96}=\frac{\pi^3}{32}\,.$$

Odpowiedź: Suma szeregu liczbowego podanego w treści zadania jest równa $\pi^3/32$.

1331. W każdym z zadań **1331.1-1331.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{4^n}, \qquad B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{5^n},$$

$$C(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{10^n}, \qquad D(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{10^n}.$$

1331.1. $\int_0^{2\pi} A(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{15}}$

1331.2. $\int_0^{2\pi} B(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{24}}$

1331.3. $\int_0^{2\pi} C(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{99}}$

1331.4. $\int_0^{2\pi} D(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{99}}$

1331.5. $\int_0^{2\pi} A(x)B(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{19}}$

1331.6. $\int_0^{2\pi} A(x)C(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{39}}$

1331.7. $\int_0^{2\pi} A(x)D(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{159}}$

1331.8. $\int_0^{2\pi} B(x)C(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{49}}$

1331.9. $\int_0^{2\pi} B(x)D(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{249}}$

1331.10. $\int_0^{2\pi} C(x)D(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{999}}$

1332. W każdym z zadań **1332.1-1332.21** podaj w postaci uproszczonej wartość całki (jako liczbę wymierną lub jako iloczyn liczby wymiernej i liczby π).

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n},\qquad B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{3^n},\qquad C(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{3^n},$$

$$D(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3nx}{10^n},\qquad E(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(3n+1)x}{10^n},\qquad F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(3n+2)x}{10^n}.$$

1332.1. $\int\limits_0^{2\pi} A(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

1332.2. $\int\limits_0^{2\pi} B(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$

1332.3. $\int\limits_0^{2\pi} C(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$

1332.4. $\int\limits_0^{2\pi} D(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{99}}$

1332.5. $\int\limits_0^{2\pi} E(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{99}}$

1332.6. $\int\limits_0^{2\pi} F(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{99}}$

1332.7. $\int\limits_0^{2\pi} A(x)B(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{11}}$

1332.8. $\int\limits_0^{2\pi} A(x)C(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{22}}$

1332.9. $\int\limits_0^{2\pi} A(x)D(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{79}}$

1332.10. $\int\limits_0^{2\pi} A(x)E(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{158}}$

1332.11. $\int\limits_0^{2\pi} A(x)F(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{316}}$

1332.12. $\int\limits_0^{2\pi} B(x)C(x)\,dx=\boldsymbol{0}$

1332.13. $\int\limits_0^{2\pi} B(x)D(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{2699}}$

1332.14. $\int\limits_0^{2\pi} B(x)E(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{30\pi}{2699}}$

1332.15. $\int\limits_0^{2\pi} B(x)F(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{8097}}$

1332.16. $\int\limits_0^{2\pi} C(x)D(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{90\pi}{2699}}$

1332.17. $\int\limits_0^{2\pi} C(x)E(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{2699}}$

1332.18. $\int\limits_0^{2\pi} C(x)F(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{30\pi}{2699}}$

1332.19. $\int\limits_0^{2\pi} D(x)E(x)\,dx=\boldsymbol{0}$

1332.20. $\int\limits_0^{2\pi} D(x)F(x)\,dx=\boldsymbol{0}$

1332.21. $\int\limits_0^{2\pi} E(x)F(x)\,dx=\boldsymbol{0}$

1333. W każdym z zadań **1333.1-1333.16** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

Wskazówka: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{p^n} = \frac{p \cdot \sin x}{p^2+1-2p \cdot \cos x}$ dla $p>1$.

1333.1. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{5-4\cos x} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

1333.2. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{5-3\cos x} = \boldsymbol{\frac{2\pi}{9}}$

1333.3. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 2x\, dx}{5-4\cos x} = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$

1333.4. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 2x\, dx}{5-3\cos x} = \boldsymbol{\frac{2\pi}{27}}$

1333.5. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 3x\, dx}{5-4\cos x} = \boldsymbol{\frac{\pi}{16}}$

1333.6. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 3x\, dx}{5-3\cos x} = \boldsymbol{\frac{2\pi}{81}}$

1333.7. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{13-5\cos x} = \boldsymbol{\frac{2\pi}{25}}$

1333.8. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{17-8\cos x} = \boldsymbol{\frac{\pi}{16}}$

1333.9. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(5-4\cos x)^2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$

1333.10. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(5-3\cos x)^2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{18}}$

1333.11. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(13-5\cos x)^2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{150}}$

1333.12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(17-8\cos x)^2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{240}}$

1333.13. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(5-4\cos x)\cdot(5-3\cos x)} = \boldsymbol{\frac{\pi}{15}}$

1333.14. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(13-5\cos x)\cdot(17-8\cos x)} = \boldsymbol{\frac{\pi}{190}}$

1333.15. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(5-4\cos x)\cdot(13-5\cos x)} = \boldsymbol{\frac{\pi}{45}}$

1333.16. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(5-3\cos x)\cdot(13-5\cos x)} = \boldsymbol{\frac{2\pi}{105}}$

1358. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$$

sprowadzając wynik do postaci

$$\frac{a+b\cos x}{c+d\cos x},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy

$$z=\cos x+i\sin x\,.$$

Wówczas dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$z^n=\cos nx+i\sin nx$$

i w konsekwencji

$$\cos nx=\operatorname{Re} z^n\,.$$

Przekształcamy dany w zadaniu szereg, korzystając po drodze ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} z^n}{3^n}=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n=\operatorname{Re}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=\operatorname{Re}\frac{3}{3-z}=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{3}{3-\cos x-i\sin x}=\operatorname{Re}\frac{3\cdot(3-\cos x+i\sin x)}{(3-\cos x)^2+\sin^2 x}=\frac{3\cdot(3-\cos x)}{9-6\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}=$$

$$=\frac{9-3\cos x}{10-6\cos x}\,.$$

Odpowiedź: Suma szeregu danego w treści zadania jest równa $\dfrac{9-3\cos x}{10-6\cos x}$.

1366. Dla podanej liczby b podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych a, że potęgowy szereg zespolony

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny dla $z=a+bi$.

Uwaga: Istotną częścią zadania jest określenie przynależności do przedziału jego końców.

a) $b=0$, $\quad a\in[\mathbf{-1,\,1})$

b) $b=\dfrac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$, $\quad a\in\left[\mathbf{-\dfrac{1}{3},\,\dfrac{1}{3}}\right]$

c) $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad a\in\left(\mathbf{-\dfrac{1}{2},\,\dfrac{1}{2}}\right]$

d) $b=\dfrac{1}{2}$, $\quad a\in\left[\mathbf{-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\right]$

1367. Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n\cdot z^n}{(3n+2)^n}\,.$$

Jeśli nie potrafisz, to przynajmniej wyznacz promień zbieżności.

Rozwiązanie:

Zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności danego w zadaniu szeregu traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem z. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(2n+1)^n\cdot z^n}{(3n+2)^n}\right|}=\frac{(2n+1)\cdot|z|}{3n+2}\to\frac{2\cdot|z|}{3}\,.$$

Jeżeli $\frac{2\cdot|z|}{3}<1$, czyli $|z|<\frac{3}{2}$, to dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{2\cdot|z|}{3}>1$, czyli $|z|>\frac{3}{2}$, to dany w zadaniu szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego jest równy $\frac{3}{2}$.

Pozostaje rozstrzygnąć zbieżność szeregu na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności, czyli dla $|z|=3/2$. W tym przypadku rozważymy ciąg wartości bezwzględnych wyrazów szeregu:

$$\left|\frac{(2n+1)^n\cdot z^n}{(3n+2)^n}\right|=\frac{(2n+1)^n\cdot 3^n}{(3n+2)^n\cdot 2^n}=\frac{(6n+3)^n}{(6n+4)^n}=\left(1-\frac{1}{6n+4}\right)^n=$$

$$=\left(\left(1-\frac{1}{6n+4}\right)^{6n+4}\right)^{\frac{n}{6n+4}}\to\left(e^{-1}\right)^{1/6}=\frac{1}{\sqrt[6]{e}}\neq 0\,.$$

Ponieważ wartości bezwzględne wyrazów szeregu dążą do liczby różnej od zera, szereg jest rozbieżny.

Odpowiedź: Obszarem zbieżności danego szeregu potęgowego jest koło o środku w zerze i promieniu 3/2 bez brzegu.