1370. Funkcje $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są określone wzorami

$$f(x)=e^{x^9} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=e^{x^7} .$$

Podaj wartość ilorazu pochodnych

$$\frac{f^{(63)}(0)}{g^{(63)}(0)} .$$

Odpowiedź: 72

1371. Funkcje $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są określone wzorami

$$f(x)=e^{x^{12}} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=e^{x^{10}} .$$

Podaj wartość ilorazu pochodnych

$$\frac{f^{(60)}(0)}{g^{(60)}(0)} .$$

Odpowiedź: 6

1372. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=e^{x^2} .$$

Podaj wartość $f^{(30)}(0)$.

Odpowiedź: 30!/15!

1373. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=e^{x^3} .$$

Podaj wartość $f^{(30)}(0)$.

Odpowiedź: 30!/10!

1374. Podaj wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{99n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} .$$

Odpowiedź: 18

1375. Podaj wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{30n}\frac{1}{\sqrt{n^2+4kn}} .$$

Odpowiedź: 5

1376. Podaj wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{9n}\frac{n}{k^2} .$$

Odpowiedź: 8/9

1377. Podaj wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{11n}\frac{n^2}{k^3} .$$

Odpowiedź: 60/121

1378. Wiadomo, że dla funkcji różniczkowalnej $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, gdzie $0\leqslant a<b$, pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej

$$\{(x,\, f(x)):\; x\in[a,\, b]\}$$

wokół osi OY (krzywa jest w płaszczyźnie XY) jest równe

$$2\pi\cdot\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

Wyznaczyć pole powierzchni (fragmentu paraboloidy obrotowej)

$$\left\{(x,\, y,\, z):\; x^2+y^2=z\leqslant 7\right\}\,.$$

Wskazówka: Dana w zadaniu powierzchnia obrotowa powstaje przez obrót wokół osi OZ łuku paraboli o równaniu $z=x^2$, $0\leqslant x\leqslant ???$, umieszczonego w płaszczyźnie XZ. *Rozwiązanie:*

Ponieważ dana w zadaniu paraboloida obrotowa powstaje przez obrót wokół osi OZ łuku paraboli o równaniu $z=x^2$, $0\leqslant x\leqslant\sqrt{7}$, umieszczonego w płaszczyźnie XZ, przyjmiemy w podanym wzorze $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=\sqrt{7}$.

Biorąc pod uwagę, że $f'(x)=2x$ oraz wykonując po drodze podstawienie $t=1+4x^2$, czyli formalnie $dt=8x\,dx$, otrzymujemy:

$$2\pi\cdot\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{7}} x\cdot\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}\cdot\int_1^{\sqrt{29}}\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{3/2}\Big|_{t=1}^{29}=$$

$$=\frac{\pi}{6}\cdot t^{3/2}\Big|_{t=1}^{29}=\frac{\pi}{6}\cdot 29^{3/2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\cdot\left(29\sqrt{29}-1\right)\,.$$

Odpowiedź:
Pole danej w zadaniu powierzchni obrotowej jest równe $\frac{\pi}{6}\cdot\left(29\sqrt{29}-1\right)$.

1379. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^3 15x\cdot\sqrt{x+1}\,dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt{x+1},\qquad x=t^2-1$$

i formalnie

$$dx=2t\,dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=3$ odpowiada $t=2$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[0,\,3]$ odpowiada przedziałowi $t\in[1,\,2]$.

Otrzymujemy

$$\int_0^3 15x\cdot\sqrt{x+1}\,dx=\int_1^2 15\cdot\left(t^2-1\right)\cdot t\cdot 2t\,dt=30\cdot\int_1^2 t^4-t^2\,dt=30\cdot\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\Big|_{t=1}^{2}\right)=$$

$$=30\cdot\left(\frac{32-1}{5}-\frac{8-1}{3}\right)=6\cdot 31-10\cdot 7=186-70=116\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 116.

1380. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej

$$\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+2}=\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+1+1}=\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x-1)^2+1}\,,$$

a następnie wykonujemy podstawienie

$$t=x-1,\qquad\qquad x=t+1$$

i formalnie

$$dx=dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=-1$, a $x=1$ odpowiada $t=0$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[0,\,1]$ odpowiada przedziałowi $t\in[-1,\,0]$.

Otrzymujemy

$$\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x-1)^2+1}=\int\limits_{-1}^0 \frac{(t+1)\;dt}{t^2+1}=\int\limits_{-1}^0 \frac{t\,dt}{t^2+1}+\int\limits_{-1}^0 \frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\left(\left.\frac{\ln\left(t^2+1\right)}{2}\right|_{t=-1}^{0}\right)+\left(\left.\operatorname{arctg} t\right|_{t=-1}^{0}\right)=$$

$$=\frac{\ln 1}{2}-\frac{\ln 2}{2}+\operatorname{arctg} 0-\operatorname{arctg}\,(-1)=0-\frac{\ln 2}{2}+0-\frac{-\pi}{4}=$$

$$=-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}$.

1381. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3-x^2}=\frac{1}{(x-1)\cdot x^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x^2}+\frac{D}{x}\,,$$

$$1=A\cdot x^2+B\cdot(x-1)+D\cdot(x-1)\cdot x\,,$$

$$1=Ax^2+Bx-B+Dx^2-Dx\,,$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & A+D \\ 0 & = & B-D \\ 1 & = & -B\,, \end{array}\right.$$

skąd $B=-1$, $D=-1$ i $A=1$. W konsekwencji

$$\int \frac{dx}{x^3-x^2} = \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\,dx = \ln|x-1| + \frac{1}{x} - \ln|x| + C\,.$$

1382. Obliczyć wartość granicy (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+8}+\frac{9}{n^3+27}+\ldots+\frac{k^2}{n^3+k^3}+\ldots+\frac{4n^2}{n^3+8n^3}\right).$$

Rozwiązanie:

Przekształcenie danej w zadaniu granicy prowadzi do

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{n^3+k^3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{2n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right),$$

gdzie

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}\,.$$

Ponieważ uzyskana granica jest granicą ciągu sum Riemanna dla funkcji ciągłej f na przedziale $[0,2]$ odpowiadających podziałom tego przedziału na $2n$ przedziałów długości $1/n$, możemy zapisać jej wartość w postaci podanej niżej całki oznaczonej. Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C$$

obliczamy wartość tej całki:

$$\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\int_0^2\frac{3x^2\,dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\ln\left|x^3+1\right|\Bigg|_{x=0}^{2} = \frac{1}{3}\cdot(\ln 9 - \ln 1) = \frac{2\ln 3}{3}\,.$$

Odpowiedź: Podana granica ma wartość $\dfrac{2\ln 3}{3}$.

1383. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x^3\cdot\operatorname{arctg} x\,dx$. Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\pi$, gdzie w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Całkując przez części otrzymujemy

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^3\cdot\operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^4}{4}\cdot\operatorname{arctg} x\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{9}{4}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\cdot\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^4-1+1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{9}{4}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}\cdot\int_0^{\sqrt{3}} x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{3}}\right) =$$

$$=\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{12}=\frac{8\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\frac{2\pi}{3}$.

1384. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^{2017}n^{2016}}{n^{2/3}+n^{3/2}}$.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z kryterium zbieżności bezwzględnej oraz z kryterium porównawczego:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin^{2017}n^{2016}}{n^{2/3}+n^{3/2}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin^{2017}n^{2016}\right|}{n^{2/3}+n^{3/2}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}+n^{3/2}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{0+n^{3/2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}<+\infty\,,$$

bo $3/2>1$.

1385. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx$.

Rozwiązanie:

Oznaczamy daną całkę przez $I(x)$ i całkujemy dwukrotnie przez części:

$$I(x)=\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{e^{2x}}{2}\cdot\sin 3x-\int\frac{e^{2x}}{2}\cdot 3\cos 3x\,dx=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3}{2}\cdot\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,dx=$$

$$=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}\cdot\cos 3x-\int\frac{e^{2x}}{2}\cdot(-3\sin 3x)\,dx\right)=$$

$$=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x}{4}-\frac{9}{4}\cdot\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x}{4}-\frac{9}{4}\cdot I(x)\,,$$

co prowadzi do

$$4\cdot I(x)=2\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x-3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x-9\cdot I(x)\,,$$

skąd

$$I(x)=\frac{2\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x-3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x}{13}+C\,.$$

1386. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8^n+n^{11}}}{\sqrt{4^n+n^{9999}}}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego dla ciągów otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{11}}{8^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{9999}}{4^n}=0\,.$$

Standardowe rachunki są tu pominięte, ale w rozwiązaniu muszą się znaleźć wraz z powołaniem się na odpowiednie kryterium.

Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8^n+n^{11}}}{\sqrt{4^n+n^{9999}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot\sqrt[3]{1+\frac{n^{11}}{8^n}}}{2^n\cdot\sqrt{1+\frac{n^{9999}}{4^n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{n^{11}}{8^n}}}{\sqrt{1+\frac{n^{9999}}{4^n}}}=\frac{\sqrt[3]{1+0}}{\sqrt{1+0}}=1\,.$$

1387. Funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma pochodną daną wzorem $f'(x)=|x|$. Ponadto wiadomo, że $f(-1)=-1$. Wyznaczyć $f(1)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$f'(x)=\begin{cases} -x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,0) \\ x & \text{dla} \quad x\in[0,+\infty) \end{cases}$$

otrzymujemy

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}+C & \text{dla} \quad x\in(-\infty,0) \\ \dfrac{x^2}{2}+D & \text{dla} \quad x\in[0,+\infty) \end{cases}$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 0 wymaga zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x=0$, czyli musi zachodzić równość $C=D$.

Warunek $f(-1)=-1$ sprowadza się do $C=-1/2$.

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2} & \text{dla} \quad x\in(-\infty,0) \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2} & \text{dla} \quad x\in[0,+\infty) \end{cases}$$

Zatem $f(1)=0$.

1388. Obliczyć całkę oznaczoną $\displaystyle\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $x=t^6$ i formalnie $dx=6t^5\,dt$, otrzymujemy:

$$\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int_1^2\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\cdot\int_1^2\frac{t^3\,dt}{t+1}=6\cdot\int_1^2\frac{t^3+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\,dt=6\cdot\int_1^2 t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\,dt=$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|\Bigg|_{t=1}^{2}=16-12+12-6\ln 3-2+3-6+6\ln 2=11-6\ln 3+6\ln 2\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $11-6\ln 3+6\ln 2=11+6\ln\dfrac{2}{3}$.

1389. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} n^p\cdot\sum_{k=1}^{55n}\sqrt{\sqrt{n}+\sqrt{9n+k}}$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$n^p\cdot\sum_{k=1}^{55n}\sqrt{\sqrt{n}+\sqrt{9n+k}}=n^{p+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{55n}\sqrt{\sqrt{n}+\sqrt{9n+k}}=n^{p+5/4}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{55n}\sqrt{1+\sqrt{9+\frac{k}{n}}}=$$

$$=n^{p+5/4}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{55n}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{9+x}}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $55n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej, przy obliczaniu której korzytsamy z podstawienia $t=\sqrt{1+\sqrt{9+x}}$, czyli $x=\left(t^2-1\right)^2-9=t^4-2t^2-8$ i formalnie $dx=\left(4t^3-4t\right)\,dt$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{55n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^{55}f(x)\,dx=\int_0^{55}\sqrt{1+\sqrt{9+x}}\,dx=\int_2^3 t\cdot\left(4t^3-4t\right)\,dt=4\cdot\int_2^3 t^4-t^2\,dt=$$

$$=4\cdot\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{t=2}^{3}=4\cdot\left(\frac{243-32}{5}-\frac{27-8}{3}\right)=4\cdot\left(\frac{211}{5}-\frac{19}{3}\right)=4\cdot\frac{633-95}{15}=4\cdot\frac{538}{15}=$$

$$=\frac{2152}{15}.$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+5/4}$ będzie równy 0, czyli dla $p=-5/4$.

Odpowiedź: Dla $p=-5/4$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $2152/15$.

1390. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t=\sqrt[3]{x+1}$, czyli $x=t^3-1$ i formalnie $dx=3t^2\,dt$, otrzymujemy

$$\int x^2\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx=\int\left(t^3-1\right)^2\cdot t\cdot 3t^2\,dt=3\cdot\int t^9-2t^6+t^3\,dt=3\cdot\left(\frac{t^{10}}{10}-\frac{2t^7}{7}+\frac{t^4}{4}\right)+C=$$

$$=\frac{3t^{10}}{10}-\frac{6t^7}{7}+\frac{3t^4}{4}+C=\frac{3\cdot(x+1)^{10/3}}{10}-\frac{6\cdot(x+1)^{7/3}}{7}+\frac{3\cdot(x+1)^{4/3}}{4}+C.$$

Uwaga: Można też całkować przez części.

1391. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^e x^2\cdot\ln x\,dx.$$

Rozwiązanie:

Wykonując całkowanie przez części otrzymujemy:

$$\int_1^e x^2\cdot\ln x\,dx=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x\,\Bigg|_{x=1}^{e}-\int_1^e\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\cdot\int_1^e x^2\,dx=\frac{e^3}{3}-\left(\frac{x^3}{9}\Bigg|_{x=1}^{e}\right)=$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3}{9}+\frac{1}{9}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\dfrac{2e^3}{9}+\dfrac{1}{9}$.

1392. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1+k/n}{1+(k/n)^2}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\,,$$

gdzie $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^2}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\,dx=\operatorname{arctg}x+\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2}\Bigg|_{x=0}^{1}=$$

$$=\operatorname{arctg}1+\frac{\ln 2}{2}-\operatorname{arctg}0-\frac{\ln 2}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}\,.$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}\,.$$

1393. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=2\qquad\text{dla}\qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=x$ dla $x\in\{0,\,2,\,4\}$. Wyznaczyć $f(5)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\frac{d^2}{dx^2}\,x^2=2\,,$$

a funkcjami o drugiej pochodnej równej 0 są funkcje liniowe, funkcja f jest określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}x^2+Ax+B & \text{dla}\quad x\in(-\infty,\,3)\\[2mm] x^2+Cx+D & \text{dla}\quad x\in[3,\,+\infty)\end{cases}\tag{$*$}$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 3 wymaga zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x=3$, czyli musi zachodzić równość

$$3A+B=3C+D\,. \tag{$\clubsuit$}$$

Warunki $f(x)=x$ dla $x\in\{0,\,2,\,4\}$ sprowadzają się odpowiednio do

$$0=B\,, \tag{$\diamondsuit$}$$

$$2=4+2A+B\,, \tag{$\heartsuit$}$$

$$4=16+4C+D\,. \tag{$\spadesuit$}$$

Rozwiązanie układu otrzymanych czterech równań ($\clubsuit$), ($\diamondsuit$), ($\heartsuit$) i ($\spadesuit$) prowadzi do

$$A=-1\,,\qquad B=0\,,\qquad C=-9\,,\qquad D=24\,.$$

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,3) \\ x^2-9x+24 & \text{dla} \quad x\in[3,\,+\infty) \end{cases} \tag{$**$}$$

Zatem $f(5)=4$.

1394. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int\limits_1^9 \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\,dx\,.$$

Pamiętaj o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Podstawiamy $x=t^4$, czyli formalnie $dx=4t^3\,dt$:

$$\int\limits_1^9 \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\,dx=\int\limits_1^{\sqrt{3}} 4t^3\cdot\operatorname{arctg}t\,dt\,.$$

Następnie wykonujemy całkowanie przez części:

$$\int\limits_1^{\sqrt{3}} 4t^3\cdot\operatorname{arctg}t\,dt=t^4\cdot\operatorname{arctg}t\,\Bigg|_{t=1}^{\sqrt{3}}-\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{t^4}{t^2+1}\,dt=$$

$$=9\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}1-\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{t^4-1+1}{t^2+1}\,dt=9\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\int\limits_1^{\sqrt{3}}t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\,dt=$$

$$=3\pi-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t\,\Bigg|_{t=1}^{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=3\pi-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\frac{1}{3}+1-\operatorname{arctg}1\right)=$$

$$=3\pi-\frac{\pi}{4}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}=3\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}=\frac{8\pi}{3}-\frac{2}{3}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\dfrac{8\pi}{3}-\dfrac{2}{3}$.

1395. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} n^p\cdot\left(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+\sqrt[3]{n+3}+\sqrt[3]{n+4}+\ldots+\sqrt[3]{8n-2}+\sqrt[3]{8n-1}+\sqrt[3]{8n}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{7n} n^p\cdot\sqrt[3]{n+k}=n^{p+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{7n}\sqrt[3]{n+k}=n^{p+4/3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{7n}\sqrt[3]{1+\frac{k}{n}}=n^{p+4/3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{7n} f\left(1+\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $7n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{7n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_1^8 f(x)\,dx=\int_1^8\sqrt[3]{x}\,dx=\frac{3}{4}\cdot x^{4/3}\Big|_{x=1}^{8}=\frac{3}{4}\cdot 16-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot 15=\frac{45}{4}.$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+4/3}$ będzie równy 0, czyli dla $p=-4/3$.

Odpowiedź: Dla $p=-4/3$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $45/4$.

1396. W każdym z zadań **1396.1-1396.5** podaj w postaci uproszczonej normę supremum funkcji f określonej podanym wzorem w podanej dziedzinie.

Przypomnienie: $\|f\|=\sup\{|f(x)|:\, x\in D_f\}$.

1396.1. $f(x)=x^2-5$, $\quad D_f=(-1,3)$, $\quad \|f\|=\mathbf{5}$

1396.2. $f(x)=x^3-15$, $\quad D_f=(-1,3)$, $\quad \|f\|=\mathbf{16}$

1396.3. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+5}$, $\quad D_f=\mathbb{R}$, $\quad \|f\|=\mathbf{1/4}$

1396.4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$, $\quad D_f=\mathbb{R}$, $\quad \|f\|=\mathbf{1}$

1396.5. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+7}$, $\quad D_f=\mathbb{R}$, $\quad \|f\|=\mathbf{4/3}$

1397. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2-4x+4}}.$$

Doprowadzić wynik do postaci niezawierającej „arctg”.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2-4x+4}} = \int_1^3 \frac{dx}{1+\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2}$$

i wykonujemy podstawienie $t=\sqrt[3]{x-2}$, czyli $x=t^3+2$ i formalnie $dx=3t^2\,dt$. Otrzymujemy

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2} = \int_{-1}^1 \frac{3t^2\,dt}{1+t^2} = 3\cdot\int_{-1}^1 \frac{t^2+1-1\,dt}{1+t^2} = 3\cdot\int_{-1}^1 dt - 3\cdot\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 6-3\cdot\left(\operatorname{arctg} t \Big|_{t=-1}^{1}\right) = 6-3\cdot\operatorname{arctg} 1 + 3\cdot\operatorname{arctg}(-1) = 6-3\cdot\frac{\pi}{4}+3\cdot\frac{-\pi}{4} = 6-\frac{3\pi}{2}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $6-\dfrac{3\pi}{2}$.

1398. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+4}\,.$$

Wskazówka: $n^4+4=(n^2-2n+2)\cdot(n^2+2n+2)$.

Rozwiązanie:

Rozłóżmy na ułamki proste wyraz ogólny szeregu:

$$\frac{n}{n^4+4} = \frac{n}{(n^2-2n+2)\cdot(n^2+2n+2)} = \frac{An+B}{n^2-2n+2} + \frac{Cn+D}{n^2+2n+2}\,,$$

$$n=(An+B)\cdot\left(n^2+2n+2\right)+(Cn+D)\cdot\left(n^2-2n+2\right)\,,$$

$$n=An^3+2An^2+2An+Bn^2+2Bn+2B+Cn^3-2Cn^2+2Cn+Dn^2-2Dn+2D\,,$$

$$\begin{cases} 0 = 2B+2D\,, & (n^0) \\ 1 = 2A+2B+2C-2D\,, & (n^1) \\ 0 = 2A+B-2C+D\,, & (n^2) \\ 0 = A+C\,. & (n^3) \end{cases}$$

Z pierwszego i czwartego równania dostajemy odpowiednio $D=-B$ oraz $C=-A$, co prowadzi kolejno do

$$\begin{cases} 1 = 2A+2B-2A+2B\,, \\ 0 = 2A+B+2A-B\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 4B\,, \\ 0 = 4A\,, \end{cases}$$

$$B=1/4, \qquad D=-1/4, \qquad A=C=0\,.$$

Zatem

$$\frac{n}{n^4+4} = \frac{1/4}{n^2-2n+2} - \frac{1/4}{n^2+2n+2} = \frac{1/4}{(n-1)^2+1} - \frac{1/4}{(n+1)^2+1}\,.$$

W konsekwencji sumy częściowe danego szeregu wyrażają się wzorem

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n^4+4} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1/4}{(n-1)^2+1} - \frac{1/4}{(n+1)^2+1} \right) =$$

$$= \left(\frac{1/4}{0^2+1} - \frac{1/4}{2^2+1} \right) + \left(\frac{1/4}{1^2+1} - \frac{1/4}{3^2+1} \right) + \left(\frac{1/4}{2^2+1} - \frac{1/4}{4^2+1} \right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1/4}{(N-3)^2+1} - \frac{1/4}{(N-1)^2+1} \right) + \left(\frac{1/4}{(N-2)^2+1} - \frac{1/4}{N^2+1} \right) +$$

$$+ \left(\frac{1/4}{(N-1)^2+1} - \frac{1/4}{(N+1)^2+1} \right) = \frac{1/4}{0^2+1} + \frac{1/4}{1^2+1} - \frac{1/4}{N^2+1} - \frac{1/4}{(N+1)^2+1} \to \frac{3}{8}$$

przy $N \to \infty$.

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa 3/8.

1399. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} + \frac{1}{81} - \frac{1}{100} + \frac{1}{121} - \frac{1}{144} + \frac{1}{169} - \ldots$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ dany szereg jest bezwzględnie zbieżny, możemy beztrosko zmieniać kolejność jego wyrazów, a nawet rozdzielać go na sumę dwóch szeregów. W konsekwencji otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12} \,.$$

Odpowiedź: Suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ jest równa $\frac{\pi^2}{12}$.

1400. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (4n-3) \cdot (4n+1)}{(3n-2) \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)} \,.$$

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-3)\cdot(4n+1)}{(3n-2)\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(4-\frac{3}{n}\right)\cdot\left(4+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}{\left(3-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{4}{n}\right)}=\frac{4\cdot4\cdot0}{3\cdot3\cdot3}=0\,.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(4n-3)\cdot(4n+1)}{(3n-2)\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}\geqslant\frac{(4n+1)\cdot(4n+5)}{(3n+1)\cdot(3n+4)\cdot(3n+7)}\,,$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{4n-3}{3n-2}\geqslant\frac{4n+5}{3n+7}\,,$$

$$(4n-3)\cdot(3n+7)\geqslant(4n+5)\cdot(3n-2)\,,$$

$$12n^2+28n-9n-21\geqslant12n^2-8n+15n-10\,,$$

$$12n^2+19n-21\geqslant12n^2+7n-10\,,$$

$$12n\geqslant11\,,$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

1401. Funkcja $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\int_1^x(\log_2 t-3)^{2017}\,dt\,.$$

Wyznaczyć punkt, w którym f osiąga najmniejszą wartość.

Rozwiązanie:

Ponieważ $f'(x)=(\log_2 x-3)^{2017}$, mamy $f'(x)<0$ dla $x\in(1,8)$ oraz $f'(x)>0$ dla $x>8$. Stąd wniosek, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(1,8)$ i rosnąca w przedziale $(8,+\infty)$, a zatem osiąga najmniejszą wartość w punkcie 8.

Odpowiedź: Dana w zadaniu funkcja osiąga najmniejszą wartość w punkcie 8.

1402. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^5\frac{dx}{x^2-4x+5}\,,$$

a następnie doprowadzić wynik do postaci $w\pi$, gdzie w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t=x-2$ i formalnie $dx=dt$ otrzymujemy

$$\int_0^5\frac{dx}{x^2-4x+5}=\int_0^5\frac{dx}{(x-2)^2+1}=\int_{-2}^3\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg}t\Big|_{t=-2}^{3}=\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}(-2)=$$

$$=\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}2=\arg(1+3i)+\arg(1+2i)=\arg\Big((1+3i)(1+2i)\Big)=\arg(-5+5i)=\frac{3\pi}{4}\,.$$

Należy zauważyć, że ze względu na niejednoznaczność argumentu mogliśmy popełnić błąd będący wielokrotnością 2π. Jednak ze względu na oszacowania

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}2<\frac{\pi}{2}$$

oraz

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}3<\frac{\pi}{2}$$

otrzymujemy

$$\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3<\pi\,,$$

co pokazuje, że otrzymany wynik jest poprawny (dodanie lub odjęcie 2π wyprowadziłoby go poza otrzymane powyżej oszacowania).

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $3\pi/4$.

1403. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\,dx\,.$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt[3]{x+1},\qquad\qquad x=t^3-1$$

i formalnie

$$dx=3t^2\,dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=7$ odpowiada $t=2$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[0,\,7]$ odpowiada przedziałowi $t\in[1,\,2]$.

Otrzymujemy

$$\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\,dx=\int_1^2 \frac{4\cdot(t^3-1)}{t^2}\,3t^2dt=12\cdot\int_1^2 t^3-1\,dt=12\cdot\left(\frac{t^4}{4}-t\,\Bigg|_{t=1}^{2}\right)=$$

$$=12\cdot\left(\frac{16-1}{4}-(2-1)\right)=12\cdot\left(\frac{15}{4}-\frac{4}{4}\right)=12\cdot\frac{11}{4}=33\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 33.

1404. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^6 \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}\,.$$

Zapisać wynik w postaci $\ln w$, gdzie w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3+3x^2+2x}=\frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}\,,$$

$$1=A\cdot(x+1)\cdot(x+2)+B\cdot x\cdot(x+2)+C\cdot x\cdot(x+1)\,. \qquad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości ($\heartsuit$), a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C.

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości ($\heartsuit$) kolejno $x=0$, $x=-1$, $x=-2$ otrzymując odpowiednio

$$1=2A, \quad \text{skąd} \quad A=\frac{1}{2}\,,$$
$$1=-B, \quad \text{skąd} \quad B=-1\,,$$
$$1=2C, \quad \text{skąd} \quad C=\frac{1}{2}\,.$$

Wobec tego

$$\int_1^6 \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}=\int_1^6 \frac{1/2}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1/2}{x+2}\,dx=\frac{\ln|x|}{2}-\ln|x+1|+\frac{\ln|x+2|}{2}\Bigg|_{x=1}^{6}=$$

$$=\frac{\ln 6}{2}-\ln 7+\frac{\ln 8}{2}-\frac{\ln 1}{2}+\ln 2-\frac{\ln 3}{2}=\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{2}-\ln 7+\frac{3\cdot\ln 2}{2}-0+\ln 2-\frac{\ln 3}{2}=$$

$$=3\cdot\ln 2-\ln 7=\ln 8-\ln 7=\ln\frac{8}{7}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $\ln\frac{8}{7}$.

1405. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+50}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia $y=x+1$ oraz $t=y/7$:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+50}=\int \frac{dx}{(x+1)^2+49}=\int \frac{dy}{y^2+49}=\int \frac{dy}{49(y/7)^2+49}=\int \frac{7\,dt}{49t^2+49}=$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{\operatorname{arctg} t}{7}+C=\frac{\operatorname{arctg}(y/7)}{7}+C=\frac{\operatorname{arctg}((x+1)/7)}{7}+C\,.$$

1406. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx\,.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Sposób I: (rzemieślniczy)

Wykonujemy całkowanie przez części:

$$\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx = x\cdot\sin x\Bigg|_{x=0}^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin x\,dx = 0-0-\int_0^{2\pi}\sin x\,dx = 0\,,$$

gdyż całka z sinusa po pełnym okresie jest równa 0.

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 0.

Sposób II: (pomysłowy)

Wykonując podstawienie $x=t+\pi$, czyli $t=x-\pi$, otrzymujemy:

$$\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)\cos(t+\pi)\,dt = -\int_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)\cos t\,dt = -\int_{-\pi}^{\pi}t\cos t\,dt - \pi\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\,dt\,.$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że całka $\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\cos t\,dt$ jest równa 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera, a całka $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos t\,dt$ jest równa 0 jako całka z cosinusa po pełnym okresie.

1407. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}\,.$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładając funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych otrzymujemy:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x} = \int_1^{\infty}\frac{dx}{x\cdot(x+1)} = \int_1^{\infty}\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x|-\ln|x+1|\Bigg|_{x=1}^{\infty} = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_{x=1}^{\infty} =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \ln\frac{1}{2} = \ln\left|\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}\right| + \ln 2 = \ln|1| + \ln 2 = \ln 2\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\ln 2$.

1408. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{2x+1}{x^4+x^2}\,dx\,.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{2x+1}{x^4+x^2} = \frac{1}{(x^2+1)\cdot x^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}\,,$$

$$2x+1 = (Ax+B)\cdot x^2 + C\cdot x\cdot\left(x^2+1\right) + D\cdot\left(x^2+1\right)\,,$$

$$2x+1=Ax^3+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^2+D\,,$$

$$\begin{cases} 0 &= & A+C \\ 0 &= & B+D \\ 2 &= & C \\ 1 &= & D \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $A=-2$ i $B=-1$.

Wobec tego

$$\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{2x+1}{x^4+x^2}\,dx=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty} -\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\,dx=-\ln\left(x^2+1\right)-\operatorname{arctg} x+2\ln|x|-\frac{1}{x}\Bigg|_{x=\sqrt{3}}^{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(-\operatorname{arctg} x)+\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)+\ln 4+\operatorname{arctg}\sqrt{3}-2\ln\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}+0+\ln 1+\frac{\pi}{3}+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}+\ln\left(\frac{4}{3}\right)\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość $\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}+\ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

1409. W każdym z zadań **1409.1-1409.20** podaj sumę szeregu (może być liczbą rzeczywistą albo jednym z symboli $+\infty$ i $-\infty$).

Niech $a_n=\frac{6}{n}$. Wówczas:

1409.1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$

1409.2. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n} = +\infty$

1409.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-a_{n+1}) = \mathbf{6}$

1409.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-a_{n+2}) = \mathbf{9}$

1409.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-a_{n+3}) = \mathbf{11}$

1409.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}-a_{n+2}) = \mathbf{3}$

1409.7. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}-a_{n+3}) = \mathbf{5}$

1409.8. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2}-a_{n+3}) = \mathbf{2}$

1409.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2-a_{n+1}^2\right) = \mathbf{36}$

1409.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2-a_{n+2}^2\right) = \mathbf{45}$

1409.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2-a_{n+3}^2\right) = \mathbf{49}$

1409.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1}^2-a_{n+2}^2\right) = \mathbf{9}$

1409.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1}^2-a_{n+3}^2\right) = \mathbf{13}$

1409.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+2}^2-a_{n+3}^2\right) = \mathbf{4}$

1409.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right) = \mathbf{63}$

1409.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n}-2^{a_{n+2}}\right) = \mathbf{70}$

1409.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n}-2^{a_{n+3}}\right) = \mathbf{73}$

1409.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+1}}-2^{a_{n+2}}\right) = \mathbf{7}$

1409.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+1}}-2^{a_{n+3}}\right) = \mathbf{10}$

1409.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+2}}-2^{a_{n+3}}\right) = \mathbf{3}$

1410. W każdym z zadań **1410.1-1410.14** podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Niech $a_n=\frac{n^2}{2^n}$. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6\,.$$

Wobec tego:

1410.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \mathbf{23/2}$

1410.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+2}) = \mathbf{21/2}$

1410.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \mathbf{1/2}$

1410.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) = \mathbf{3/2}$

1410.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) = \mathbf{1/4}$

1410.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+2}^2\right) = \mathbf{5/4}$

1410.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}\right) = \mathbf{1}$

1410.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(4^{a_n} - 4^{a_{n+2}}\right) = \mathbf{4}$

1410.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(9^{a_n} - 9^{a_{n+1}}\right) = \mathbf{2}$

1410.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(9^{a_n} - 9^{a_{n+2}}\right) = \mathbf{10}$

1410.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(16^{a_n} - 16^{a_{n+1}}\right) = \mathbf{3}$

1410.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(16^{a_n} - 16^{a_{n+2}}\right) = \mathbf{18}$

1410.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+48a_n} - \sqrt{1+48a_{n+1}}\right) = \mathbf{4}$

1410.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+48a_n} - \sqrt{1+48a_{n+2}}\right) = \mathbf{10}$

1411. Rozstrzygnąć, czy wartość całki

$$\int\limits_{160\,000}^{160\,001} 100\cdot\ln x-\sqrt{x}\,dx=798,292\,596\,921\,596\,397\ldots$$

jest mniejsza czy większa od

$$400\cdot\ln 20-400-\frac{1}{3200}=798,292\,596\,921\,596\,397\ldots$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję podcałkową

$$f(x)=100\cdot\ln x-\sqrt{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{100}{x}-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{100}{x^2}+\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}=\frac{-400+\sqrt{x}}{4\cdot x^2}>0$$

dla $x>160\,000$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $[160\,000,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>160\,000$ leży powyżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie odpowiadającym $x=160\,000$. Ponieważ $f'(160\,000)=-1/1600$, dla $x>160\,000$ zachodzi nierówność

$$f(x)>f(160\,000)-\frac{1}{1600}\cdot(x-160\,000)\,.$$

Szacując całkę przez pole trapezu ograniczonego od góry styczną do wykresu funkcji podcałkowej otrzymujemy

$$\int\limits_{160\,000}^{160\,001} 100\cdot\ln x-\sqrt{x}\,dx>\frac{f(160\,000)+\left(f(160\,000)-\frac{1}{1600}\right)}{2}=f(160\,000)-\frac{1}{3200}=$$

$$=400\cdot\ln 20-400-\frac{1}{3200}\,.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki jest większa od podanej liczby.

1412. Obliczyć sumę szergu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^2}\,.$$

Wskazówka: Rozłożyć na ułamki proste.

Odpowiedź: $\dfrac{\pi^2}{6}-1$.

1413. Obliczyć sumę szergu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(6n+1)^2}+\frac{1}{(6n+5)^2}\right)\,.$$

Wskazówka: Wykazać, że suma danego szeregu jest równa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n)^2}\,.$$

Odpowiedź: $\frac{\pi^2}{9}$.

W każdym z kolejnych 10 zadań podaj w **postaci uproszczonej** wartość całki oznaczonej.

1414. $\int\limits_0^{\sqrt{6}}\sqrt{6-x^2}\,dx=\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$ **1415.** $\int\limits_0^{\sqrt{30}}\sqrt{30-x^2}\,dx=\boldsymbol{\frac{15\pi}{2}}$

1416. $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{6-x^2}\,dx=\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}}$ **1417.** $\int\limits_0^{\sqrt{15}}\sqrt{30-x^2}\,dx=\boldsymbol{\frac{15\pi}{4}+\frac{15}{2}}$

1418. $\int\limits_0^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$ **1419.** $\int\limits_0^{\sqrt{5}}\sqrt{20-x^2}\,dx=\boldsymbol{\frac{5\pi}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{2}}$

1420. $\int\limits_0^{\sqrt{7}}\sqrt{28-x^2}\,dx=\boldsymbol{\frac{7\pi}{3}+\frac{7\sqrt{3}}{2}}$ **1421.** $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

1422. $\int\limits_0^{\sqrt{15}}\sqrt{20-x^2}\,dx=\boldsymbol{\frac{10\pi}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{2}}$ **1423.** $\int\limits_0^{\sqrt{21}}\sqrt{28-x^2}\,dx=\boldsymbol{\frac{14\pi}{3}+\frac{7\sqrt{3}}{2}}$

1424. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-1}^{0} x\cdot\sqrt[4]{x+1}\,dx$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt[4]{x+1}, \qquad x=t^4-1$$

i formalnie

$$dx=4t^3\,dt.$$

Ponadto $x=-1$ odpowiada $t=0$, a $x=0$ odpowiada $t=1$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[-1,\,0]$ odpowiada przedziałowi $t\in[0,\,1]$.

Otrzymujemy

$$\int_{-1}^{0} x\cdot\sqrt[4]{x+1}\,dx=\int_{0}^{1}\left(t^4-1\right)\cdot t\cdot 4t^3\,dt=4\cdot\int_{0}^{1} t^8-t^4\,dt=4\cdot\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^5}{5}\Bigg|_{t=0}^{1}\right)=$$

$$=4\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{5}\right)=4\cdot\frac{5-9}{45}=4\cdot\frac{-4}{45}=-\frac{16}{45}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-16/45$.

1425. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{1}^{4}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonując całkowanie przez części otrzymujemy:

$$\int_{1}^{4}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{x}\cdot\ln x\Bigg|_{x=1}^{4}-\int_{1}^{4}2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx=4\cdot\ln 4-2\cdot\int_{1}^{4}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=8\cdot\ln 2-\left(4\cdot\sqrt{x}\Bigg|_{x=1}^{4}\right)=$$

$$=8\cdot\ln 2-8+4=8\cdot\ln 2-4\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $-4+8\cdot\ln 2$.

1426. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{\left(x,\,\frac{x^{3/2}}{3}\right):\ x\in[0,\,5]\right\}.$$

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji $f(x)=\frac{x^{3/2}}{3}$ na przedziale $[a,b]=[0,5]$ otrzymujemy:

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_0^5 \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_0^5 \sqrt{1+\frac{x}{4}}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^5 \sqrt{4+x}\,dx=$$

$$=\frac{(x+4)^{3/2}}{3}\Bigg|_{x=0}^{5}=\frac{1}{3}\cdot(27-8)=\frac{19}{3}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu krzywa ma długość 19/3.

1427. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx$$

jest zbieżna.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx=\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx+\int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx\,.$$

Zbadamy, dla których wartości parametru p całki występujące w powyższej sumie są zbieżne. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx\leqslant\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt[3]{0+x^5}}\,dx=\int_0^1 \frac{dx}{x^{5/3-p}}<+\infty\,,$$

o ile $5/3-p<1$, czyli $p>2/3$.

Ponadto

$$\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx\geqslant\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^5+x^5}}\,dx=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\int_0^1 \frac{dx}{x^{5/3-p}}=+\infty\,,$$

o ile $5/3-p\geqslant 1$, czyli $p\leqslant 2/3$.

Podobnie

$$\int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx\leqslant\int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+0}}\,dx=\int_1^\infty \frac{dx}{x^{7/3-p}}<+\infty\,,$$

o ile $7/3-p>1$, czyli $p<4/3$.

Ponadto

$$\int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx\geqslant\int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^7}}\,dx=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\int_1^\infty \frac{dx}{x^{7/3-p}}=+\infty\,,$$

o ile $7/3-p\leqslant 1$, czyli $p\geqslant 4/3$.

Wniosek: Jeżeli $2/3 < p < 4/3$, to obydwie całki powstałe z podziału przedziału całkowania są zbieżne, a więc i wyjściowa całka jest zbieżna. W przeciwnym razie jedna z tych całek jest rozbieżna, a zatem wyjściowa całka jest rozbieżna.

Odpowiedź: Podana całka jest zbieżna dla $p \in (2/3, 4/3)$.

1428. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-3)\cdot(7n+4)}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{(7n-3)\cdot(7n+4)} = \frac{A}{7n-3} + \frac{B}{7n+4}\,.$$

Po wymnożeniu powyższej równości stronami przez $(7n-3)\cdot(7n+4)$ otrzymujemy

$$1 = A(7n+4) + B(7n-3)\,. \qquad (*)$$

Dla $n=3/7$ otrzymujemy $A=1/7$, natomiast przyjęcie $n=-4/7$ daje $B=-1/7$.
Inny sposób: porównując w równaniu (*) współczynniki przy n oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(7n-3)\cdot(7n+4)} = \frac{1}{7}\cdot\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{7n-3} - \frac{1}{7n+4}\right) =$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{18}\right)+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{25}\right)+\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{32}\right)+\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{39}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{7N-17}-\frac{1}{7N-10}\right)+\left(\frac{1}{7N-10}-\frac{1}{7N-3}\right)+\left(\frac{1}{7N-3}-\frac{1}{7N+4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7N+4}\right)\,,$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/28$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/28$.

Uwaga: Istotną częścią rozwiązania jest poprawne wykonanie przejścia granicznego, co można uzyskać tylko przez rozważanie sum częściowych.

1429. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}\,.$$

Rozwiązanie:

Podstawiając we wzorze

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{n} \qquad x \in (-1, 1]$$

wartość $x=-1/3$ otrzymujemy

$$\ln\frac{2}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n\cdot 3^n}\,,$$

skąd

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}=-\ln\frac{2}{3}=\ln\frac{3}{2}\,.$$

Odpowiedź: Dany szereg ma sumę $\ln\frac{3}{2}$.

1430. Udowodnić nierówność

$$\sum_{n=1}^{10^{10}}\frac{1}{n}\ >\ \frac{1}{2}+10\cdot\ln 10\,.$$

Rozwiązanie:

Pole pod wykresem funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

na przedziale $[1,\,10^{10}]$ jest równe

$$\int_1^{10^{10}}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_{x=1}^{10^{10}}=\ln 10^{10}=10\cdot\ln 10\,.$$

Obszar pod łamaną[1] o wierzchołkach $(n,\,1/n)$ dla $n=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,10^{10}$ składa się z trapezów i ma pole równe

$$\sum_{n=1}^{10^{10}-1}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{10}}+\sum_{n=2}^{10^{10}-1}\frac{1}{n}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{10}}+\sum_{n=1}^{10^{10}}\frac{1}{n}\,.$$

Z uwagi na wypukłość funkcji f opisana łamana leży nad wykresem[2] funkcji f, skąd wynika nierówność między polami rozważanych figur:

$$10\cdot\ln 10\ <\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 10^{10}}+\sum_{n=1}^{10^{10}}\frac{1}{n}\,.$$

Wobec tego

$$\frac{1}{2}+10\cdot\ln 10\ <\ -\frac{1}{2\cdot 10^{10}}+\sum_{n=1}^{10^{10}}\frac{1}{n}\ <\ \sum_{n=1}^{10^{10}}\frac{1}{n}\,.$$

[1] A dokładniej: obszar między łamaną i osią OX.

[2] A dokładniej: wierzchołki łamanej leżą na wykresie a wnętrza odcinków nad wykresem.