KOLOKWIUM nr 2, 28.10.2026, godz. 8:15–9:45

Zadanie **1. (10 punktów)**

Udowodnij, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ jest wymierna i niech będzie ona równa $-m/n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi **(zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo podstawa logarytmu jest większa od 1, a liczba logarytmowana jako równa $\sqrt{8/9}$ jest mniejsza od 1).** Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(3/2)}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-m/n}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\,,$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-m}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{n}\,,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{m}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{n}\,,$$

$$2^m\cdot 3^n=\left(2\sqrt{2}\right)^n\cdot 3^m\,,$$

$$2^{2m}\cdot 3^{2n}=2^{3n}\cdot 3^{2m}\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Zauważmy, że obie strony powyższej równości zapisane są w postaci uporządkowanych iloczynów potęg liczb pierwszych.

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m &= 3n \\ 2n &= 2m \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2n=2m=3n\,,$$

czyli $2n=3n$, co nie jest prawdą dla dodatniej liczby n.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:
• zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami liczb złożonych
lub
• występują wykładniki, o których nie wiadomo, że są całkowite i nieujemne
lub
• nie zauważono, że liczba w treści zadania jest ujemna i zapisano ją w postaci ułamka o dodatnim liczniku i mianowniku.

Zgodnie z ogólną zasadą, częściowa punktacja za błędne rozwiązanie musi być niższa niż **50%,** a zatem takie rozwiązania nie mogą być ocenione na więcej niż **4 punkty.** Jednak sprawdzający ma prawo uznać powyższe błędy za dyskwalifikujące i dawać za takie rozwiązania **0 punktów.** A może dawać **4 punkty** lub cokolwiek pomiędzy 0 a 4 – to jego suwerenna decyzja, której nikt nie powinien podważać.

Zadanie **2. (10 punktów)**
Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{2049} \cdot n \leqslant 2^n + 2^{2060} .$$

Przypomnienie: $2^{11} = 2048$.

Rozwiązanie:
Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leqslant 2048$.

Dla $n \leqslant 2048$ zachodzą nierówności

$$2^{2049} \cdot n \leqslant 2^{2049} \cdot 2048 = 2^{2049} \cdot 2^{11} = 2^{2060} < 2^n + 2^{2060} ,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geqslant 2049$.
Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 2049$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L = 2^{2049} \cdot 2049 ,$$
$$P = 2^{2049} + 2^{2060} = 2^{2049} \cdot \left(1 + 2^{11}\right) = 2^{2049} \cdot 2049 ,$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geqslant 2049$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{2049} \cdot n < 2^n + 2^{2060} .$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{2049} \cdot (n+1) < 2^{n+1} + 2^{2060} .$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geqslant 2049$ otrzymujemy

$$L = 2^{2049} \cdot (n+1) = 2^{2049} \cdot n + 2^{2049} \leqslant 2^n + 2^{2060} + 2^{2049} \leqslant 2^n + 2^{2060} + 2^n = 2^{n+1} + 2^{2060} = P ,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie **3. (10 punktów)**

Dobierz odpowiednie liczby całkowite dodatnie s i t oraz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \left(\sqrt{n^{18}+8n^{10}}-n^9\right)^s \cdot \left(\sqrt[3]{n^{18}+7n^{10}}-n^6\right)^t \leqslant 10C\,.$$

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzorów na różnice kwadratów i sześcianów oraz wykonując odpowiednie szacowania otrzymujemy

$$2n = \frac{8n^{10}}{\sqrt{n^{18}+8n^{18}}+n^9} \leqslant \sqrt{n^{18}+8n^{10}}-n^9 = \frac{8n^{10}}{\sqrt{n^{18}+8n^{10}}+n^9} \leqslant \frac{8n^{10}}{\sqrt{n^{18}+0}+n^9} = 4n$$

oraz

$$\frac{1}{n^2} = \frac{7n^{10}}{\left(n^{18}+7n^{18}\right)^{2/3}+n^6\cdot\left(n^{18}+7n^{18}\right)^{1/3}+n^{12}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[3]{n^{18}+7n^{10}}-n^6 = \frac{7n^{10}}{\left(n^{18}+7n^{10}\right)^{2/3}+n^6\cdot\left(n^{18}+7n^{10}\right)^{1/3}+n^{12}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{7n^{10}}{\left(n^{18}+0\right)^{2/3}+n^6\cdot\left(n^{18}+0\right)^{1/3}+n^{12}} = \frac{7}{3n^2}\,,$$

czyli podumowując:

$$2n \leqslant \sqrt{n^{18}+8n^{10}}-n^9 \leqslant 4n$$

$$\frac{1}{n^2} \leqslant \sqrt[3]{n^{18}+7n^{10}}-n^6 \leqslant \frac{7}{3n^2}\,.$$

Wobec tego

$$2^s\cdot n^{s-2t} \leqslant \left(\sqrt{n^{18}+8n^{10}}-n^9\right)^s \cdot \left(\sqrt[3]{n^{18}+7n^{10}}-n^6\right)^t \leqslant \frac{4^s\cdot 7^t}{3^t}\cdot n^{s-2t}\,.$$

Aby w oszacowaniach otrzymać wartości niezależne od n, musimy przyjąć $s-2t=0$. Ponieważ oszacowania dolne i górne "rozjeżdżają" się wraz ze wzrostem wykładników s i t, chcemy je wybrać możliwie małe. Wobec tego przyjmujemy $t=1$ i $s=2$, co prowadzi do

$$4 \leqslant \left(\sqrt{n^{18}+8n^{10}}-n^9\right)^2 \cdot \left(\sqrt[3]{n^{18}+7n^{10}}-n^6\right) \leqslant \frac{16\cdot 7}{3} = 4\cdot\frac{4\cdot 7}{3} = 4\cdot\frac{28}{3} < 10\cdot 4\,.$$

Udowodniliśmy więc wymagane nierówności ze stałymi $s=2$, $t=1$ oraz $C=4$.

Uwaga: Uzyskane oszacowania 4 i 112/3 nie dają się poprawić, bo dla $n=1$ szacowane wyrażenie przyjmuje wartość 4, a dla bardzo dużych n jest bliskie 112/3. Zatem w każdym poprawnym rozwiązaniu musi być $s=2$, $t=1$ oraz $C \in \left[\frac{56}{15},\, 4\right]$.

Zadanie **4. (10 punktów)**
Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} k^3(k+1)^3 < \frac{n^2\cdot(n+1)^3\cdot(n+2)^2}{7}\,.$$

Rozwiązanie:
Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ lewa strona dowodzonej nierowności ma wartość 8, a prawa $72/7 = 10\frac{2}{7}$. Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $8 < 10\frac{2}{7}$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\sum_{k=1}^{n} k^3(k+1)^3 < \frac{n^2\cdot(n+1)^3\cdot(n+2)^2}{7}\,.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3(k+1)^3 < \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^3\cdot(n+3)^2}{7}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony nierówności (♣) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L = \sum_{k=1}^{n+1} k^3(k+1)^3 < \frac{n^2\cdot(n+1)^3\cdot(n+2)^2}{7} + (n+1)^3\cdot(n+2)^3 =$$

$$= \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{7}\cdot\Big(n^2\cdot(n+1)+7\cdot(n+1)\cdot(n+2)\Big) =$$

$$= \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{7}\cdot\Big(n^3+n^2+7n^2+21n+14\Big) = \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{7}\cdot\Big(n^3+8n^2+21n+14\Big)\,.$$

Z kolei prawą stronę nierówności (♣) możemy zapisać jako

$$P = \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^3\cdot(n+3)^2}{7} = \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{7}\cdot(n+2)\cdot(n+3)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{7}\cdot(n+2)\cdot\Big(n^2+6n+9\Big) = \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{7}\Big(n^3+6n^2+9n+2n^2+12n+18\Big) =$$

$$= \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{7}\cdot\Big(n^3+8n^2+21n+18\Big)\,.$$

Stąd otrzymujemy

$$L < \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{7}\cdot\Big(n^3+8n^2+21n+14\Big) <$$

$$< \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{7}\cdot\Big(n^3+8n^2+21n+18\Big) = P\,,$$

co kończy dowód drugiego kroku indukcyjnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.