ANALIZA 1, KOLOKWIUM nr 2, 28.10.2026, godz. 8:15–9:45

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **1.** **(10 punktów)**

Udowodnij, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ jest niewymierna.

Zadanie **2.** **(10 punktów)**

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{2049}\cdot n \leqslant 2^n + 2^{2060}\,.$$

Przypomnienie: $2^{11} = 2048$.

Zadanie **3.** **(10 punktów)**

Dobierz odpowiednie liczby całkowite dodatnie s i t oraz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \left(\sqrt{n^{18}+8n^{10}}-n^9\right)^s \cdot \left(\sqrt[3]{n^{18}+7n^{10}}-n^6\right)^t \leqslant 10C\,.$$

Zadanie **4.** **(10 punktów)**

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} k^3(k+1)^3 < \frac{n^2\cdot(n+1)^3\cdot(n+2)^2}{7}\,.$$