Kolokwium nr 1: środa 14.10.2026, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 0–96.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach[1] w piątek 2.10.2026, poniedziałek 5.10.2026, piątek 9.10.2026 i poniedziałek 12.10.2026.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Zadania będą omawiane na ćwiczeniach tylko w miarę wolnego czasu – proszę umieć wskazać zadania, których rozwiązania chcecie Państwo zobaczyć.

Przypomnij sobie ze szkoły: wzory skróconego mnożenia, wzór dwumianowy Newtona, postęp arytmetyczny i geometryczny, logarytmy.

0. Omówić zadania z testu kwalifikacyjnego.

Oznaczenia:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Oblicz wartości wyrażeń (doprowadź wynik do możliwie prostej postaci):

1. $\sum_{i=3}^{5} i^2$ **2.** $\sum_{i=-99}^{100} i^3$ **3.** $\sum_{i=-10}^{10} 7$ **4.** $\sum_{i=1}^{100} i$ **5.** $\sum_{i=1}^{24} i^2$ **6.** $\prod_{i=1}^{6} i$ **7.** $\prod_{i=-2025}^{2025} i^{2025}$

8. $\sum_{n=1}^{2024} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ **9.** $\sum_{n=1}^{9799} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$ **10.** $\sum_{n=1}^{47} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+3}}$

11. $\prod_{n=1}^{2025} \left(1+\frac{1}{n}\right)$ **12.** $\sum_{n=2}^{7} \log_6 \log_n (n+2)$ **13.** $\prod_{m=2}^{2025} \prod_{n=1}^{m-1} \left(\sqrt[m]{m} - \sqrt[n]{n}\right)$

14. Wiadomo, że wśród następujących sześciu liczb

$$3465^2-2, \quad 3465^2-4, \quad 3465^2-8, \quad 3465^2-16, \quad 3465^2-32, \quad 3465^2-64$$

trzy są pierwsze, a trzy złożone. Które z podanych liczb są pierwsze?

15. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

a) $a^3+b^3=(a+b)\cdot\ldots$
b) $a^3-b^3=(a-b)\cdot\ldots$
c) $a^3\ldots b^3=(a^2+ab+b^2)\cdot\ldots$
d) $a^4\ldots b^4=(a+b)\cdot\ldots$
e) $a^4\ldots b^4=(a-b)\cdot\ldots$
f) $a^5\ldots b^5=(a+b)\cdot\ldots$
g) $a^5\ldots b^5=(a-b)\cdot\ldots$
h) $(a+b)^3=a^3+3\ldots$
i) $(a-b)^4=a^4-\ldots$

[1] Powtórka ze szkoły ok. 4 godzin i indukcja/dwumian ok. 4 godzin.

j) $(a-b)^5 = a^5 - \ldots$
k) $a^n - b^n = (a-b)\cdot\ldots$
l) $a^n + b^n = (a+b)\cdot\ldots$ - dla których n ?
m) $a^n - b^n = (a+b)\cdot\ldots$ - dla których n ?
n) $a^n + b^n = (a^2+b^2)\cdot\ldots$ - dla których n ?
o) $a^n - b^n = (a^2+b^2)\cdot\ldots$ - dla których n ?

16. W liczbie dziewięciocyfrowej podanych jest 5 cyfr. Wpisz brakujące 4 cyfry tak, aby uzyskana liczba była kwadratem liczby całkowitej.

a) | 1 | 0 | 0 | 1 | 8 | | | | | ; b) | 4 | 0 | 0 | 2 | 4 | | | | | ;

c) | 9 | 0 | 0 | 2 | 4 | | | | | ; d) | 9 | 0 | 0 | 4 | 8 | | | | | .

17. Zapisz podaną liczbę wymierną w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}+1} = \ldots\ldots\ldots$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{7}+1} = \ldots\ldots\ldots$;

c) $\dfrac{1}{\sqrt{11}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{11}+1} = \ldots\ldots\ldots$; d) $\dfrac{1}{\sqrt{13}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{13}+1} = \ldots\ldots\ldots$.

18. Zapisz podaną liczbę w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych większych od 1.

a) $9\,991 = \ldots\ldots$; b) $89\,951 = \ldots\ldots$; c) $999\,919 = \ldots\ldots$; d) $8\,999\,999 = \ldots\ldots$

19. Dla danej liczby n podaj dwucyfrową liczbę pierwszą p będącą dzielnikiem liczby n.

a) $n = 77^{111} - 24^{111}$, $p = \ldots\ldots\ldots$; b) $n = 69^{122} - 20^{122}$, $p = \ldots\ldots\ldots$;

c) $n = 51^{133} + 22^{133}$, $p = \ldots\ldots\ldots$; d) $n = 66^{166} - 31^{166}$, $p = \ldots\ldots\ldots$

20. Podaj liczbę rzeczywistą x, dla której zachodzi podana równość.

a) $3^x + 9^x = 30$ dla $x = \ldots\ldots\ldots$; b) $2^x + 4^x = 12$ dla $x = \ldots\ldots\ldots$;

c) $2^x + 8^x = 130$ dla $x = \ldots\ldots\ldots$; d) $2^x + 4^x = 132$ dla $x = \ldots\ldots\ldots$

21. Wiedząc, że

$$\binom{14}{4} = 1001, \qquad \binom{14}{5} = 2002, \qquad \binom{14}{6} = 3003,$$

podać wartość współczynnika dwumianowego

a) $\binom{15}{5} = \ldots\ldots$; b) $\binom{15}{6} = \ldots\ldots$; c) $\binom{16}{6} = \ldots\ldots$; d) $\binom{15}{10} = \ldots\ldots$

22. Dla podanych liczb a oraz k wskazać taką liczbę naturalną n, aby zachodziła równość

$$\left(a^{a^k}\right)^{a^{a^k}} = a^{a^n}.$$

Uwaga: Potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

a) $a=5$, $k=2$, $n = \ldots\ldots\ldots$; b) $a=3$, $k=3$, $n = \ldots\ldots\ldots$;

c) $a=2$, $k=5$, $n = \ldots\ldots\ldots$; d) $a=3$, $k=4$, $n = \ldots\ldots\ldots$

23. Wskazać taką liczbę C, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych n i k, gdzie $n \geqslant k+2$, prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + C \cdot \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

24. Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7}, \quad \binom{100}{27}, \quad \binom{100}{47}, \quad \binom{100}{57}, \quad \binom{100}{77}, \quad \binom{100}{97}.$$

25. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a,b,c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b} = \binom{a+b+c}{b}\binom{a+c}{a}.$$

Uwaga: Przyjmujemy, że w postępie geometrycznym wszystkie wyrazy są różne od zera.

26. Obliczyć sumę postępu geometrycznego

$$1+3+9+27+\ldots+3^n.$$

27. Pierwszy, czwarty i dziesiąty wyraz postępu arytmetycznego tworzą (z zachowaniem kolejności) postęp geometryczny trójwyrazowy. Wyznaczyć iloraz tego postępu geometrycznego.

28. Wyznaczyć pierwszy wyraz postępu arytmetycznego z poprzedniego zadania, jeśli wiadomo ponadto, że jego siódmy wyraz jest równy 21.

29. Jeżeli w poprzednich dwóch zadaniach uzyskał(a/e)ś odpowiedzi odpowiednio 2 i 7, rozwiąż je ponownie, tym razem poprawnie.

30. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie?
W dowolnym postępie arytmetycznym n-wyrazowym o sumie 0 co najmniej jeden z wyrazów jest równy 0.

31. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie?
W dowolnym postępie **geometrycznym** n-wyrazowym o **iloczynie wyrazów równym 1**, co najmniej jeden z wyrazów jest równy **1**.

32. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 3$ dowolny postęp geometryczny n-wyrazowy ma dodatni iloczyn wyrazów?

33. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 3$ istnieje postęp arytmetyczny n-wyrazowy o sumie n i jednym z wyrazów równym n ?

34. Dla których liczb naturalnych n podany wzór jest poprawnym wzorem na sumę n-wyrazowego postępu arytmetycznego $a_1, a_2, \ldots, a_n$?

a) $S_n = \dfrac{a_7+a_8+a_{12}}{3} \cdot n$ **b)** $S_n = \dfrac{3a_{11}+a_{17}}{4} \cdot n$

c) $S_n = \dfrac{a_7+a_8+a_n}{3} \cdot n$ **d)** $S_n = \dfrac{a_4+a_7+a_{n-9}+a_n}{4} \cdot n$

35. Dobrać takie liczby A, B (być może zależne od n), aby otrzymać wzór na sumę n-wyrazowego postępu arytmetycznego $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
a) $S_n = Aa_1 + Ba_2 \quad (n \geqslant 3)$
b) $S_n = Aa_3 + Ba_7 \quad (n \geqslant 7)$

36. W dowolnym postępie arytmetycznym n-wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ o sumie 90, co najmniej jeden z wyrazów jest równy w.

Dla podanej liczby n podać liczbę w, dla której powyższe zdanie jest prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli liczba w o żądanej własności nie istnieje.

a) $n=5$, $w=$ ..... ; b) $n=9$, $w=$ ..... ;
c) $n=10$, $w=$ ..... ; d) $n=15$, $w=$ .....

37. Dla podanej liczby n podać przykład rosnącego postępu arytmetycznego n-wyrazowego o sumie wyrazów równej n^2, w którym występuje wyraz równy 1.

a) $n=3$, ... ; b) $n=4$, ... ;
c) $n=5$, ... ; d) $n=7$, ...

38. Zapisać podane sumy w postaci ułamka dziesiętnego z przybliżeniem do 100 miejsc po przecinku:
a) $\sum_{n=1}^{2025} \frac{1}{2^n}$ **b)** $\sum_{n=1}^{2025} \frac{1}{3^n}$ **c)** $\sum_{n=1}^{2025} \frac{1}{4^n}$ **d)** $\sum_{n=1}^{2025} \frac{1}{6^n}$ **e)** $\sum_{n=1}^{2025} \frac{(-1)^n}{9^n}$

39. Uzupełnić zdanie: Dla dowolnego postępu ..... $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ciąg $a_1+7, a_2+7, \ldots, a_n+7$ jest postępem .....

40. Uzupełnić zdanie: Dla dowolnego postępu ..... $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ciąg $7a_1, 7a_2, \ldots, 7a_n$ jest postępem .....

41. Uzupełnić zdanie: Dla dowolnego postępu ..... $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ciąg $a_1^7, a_2^7, \ldots, a_n^7$ jest postępem .....

42. Uzupełnić zdanie: Dla dowolnego postępu ..... $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ciąg $7^{a_1}, 7^{a_2}, \ldots, 7^{a_n}$ jest postępem .....

43. Uzupełnić zdanie: Dla dowolnego postępu ..... $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o wyrazach dodatnich ciąg $\log_7 a_1, \log_7 a_2, \ldots, \log_7 a_n$ jest postępem .....

Uprościć wyrażenia
44. $4^{2+\log_2 7}$ **45.** $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$ **46.** $\log_6 2 + \log_{36} 9$ **47.** $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$
48. $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$ **49.** $(\log_2 3 - \log_4 9)^{2025}$ **50.** $(\log_2 6 - \log_4 9)^{2025}$

51. Uzupełnić drugie zdanie:
Wiadomo, że wartość ułamka nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę różna od zera.
Podobnie, wartość logarytmu nie zmieni się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną .....

Indukcja matematyczna. Dwumian Newtona.

52. Wyznacz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których prawdziwa jest podana implikacja:

a) $x>0\Rightarrow x+1>2$ **b)** $x<1\Rightarrow x^2>0$ **c)** $x<1\Rightarrow x^2<0$ **d)** $x^5>32\Rightarrow x^6>64$

e) $x^6>64\Rightarrow x^7>128$ **f)** $x^5<32\Rightarrow x^6<64$ **g)** $x^6<64\Rightarrow x^7<128$

53. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2\ .$$

54. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}\ .$$

55. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n}{n}<7^n\ .$$

Oszustwo **56.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n<2^n+110\,. \qquad (*)$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ sprawdzamy bezpośrednio $30<2+110=112$.

2° Załóżmy, że $30n<2^n+110$. Udowodnimy nierówność $30(n+1)<2^{n+1}+110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1)=30n+30<2^n+110+30=2^{n+1}+110+30-2^n<2^{n+1}+110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n\geqslant 5$.

Zatem nierówność $(*)$ została udowodniona dla $n\geqslant 5$.

Pozostaje sprawdzić, że

dla $n=2$ mamy $60<4+110=114$,

dla $n=3$ mamy $90<8+110=118$,

dla $n=4$ mamy $120<16+110=126$.

Tym samym nierówność $(*)$ jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n.

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n=6$ zachodzi nierówność $180<174$.

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

57. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{n^3}\leqslant\frac{5}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}\ .$$

58. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{3}+\ldots=F_{n+1}\,,$$

gdzie F_n oznacza n-ty wyraz ciągu Fibonacciego określonego wzorami $F_1=F_2=1$ oraz $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.

Wyznacz liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających podane warunki.

W poniższych zadaniach przyjęto oznaczenie $\mathbb{N}_k=\{k,k+1,k+2,\ldots\}$.

59. $99\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+1)\in A)$

60. $11\notin A,\quad 99\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+1)\in A)$

61. $99\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}_7}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+1)\in A)$

62. $11\notin A,\quad 99\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}_7}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+1)\in A)$

63. $11\notin A,\quad 99\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}_{77}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+1)\in A)$

64. $22\in A,\quad 99\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A)$

65. $1\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+3)\in A)$

66. $1\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+3)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+4)\in A)$

67. $1\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+4)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+5)\in A)$

68. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(2n)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_8}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-7)\in A)$

69. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(3n)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_8}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-7)\in A)$

70. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(3n)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_9}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-8)\in A)$

71. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(3n)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_{14}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-13)\in A)$

72. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(2n)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_{32}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-31)\in A)$

73. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\left(n\in A\Rightarrow\left(n^3\right)\in A\right),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_6}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-5)\in A)$

74. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\left(n\in A\Rightarrow\left(n^5\right)\in A\right),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_6}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-5)\in A)$

75. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\left(n\in A\Rightarrow\left(n^5\right)\in A\right),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_8}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-7)\in A)$

76. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\left(n\in A\Rightarrow\left(n^5+1\right)\in A\right),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_8}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-7)\in A)$

77. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\left(n\in A\Rightarrow\left(n^5+2\right)\in A\right),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_8}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-7)\in A)$

78. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\left(n\in A\Rightarrow\left(n^5+3\right)\in A\right),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_8}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-7)\in A)$

Zadania do samodzielnego przeanalizowania. Mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko w miarę wolnego czasu – proszę umieć wskazać zadania, których rozwiązania chcecie Państwo zobaczyć.

79. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ zachodzi równość

$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}=\binom{n+1}{5}.$$

80. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\frac{5}{651}+\frac{6}{1333}+\ldots+\frac{n-1}{(n-1)^4+(n-1)^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2-n+1)}.$$

81. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $k<n$ spełniających równanie

$$k\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k+1}.$$

82. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4<\frac{n^2\cdot(n+1)^2\cdot(2n+1)}{10}.$$

83. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+1)\cdot\binom{2n}{n}\geqslant 4^n.$$

84. W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków $\geqslant$, $\leqslant$, a następnie dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n-1}.$$

85. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+3)\cdot\binom{2n}{n}>7\cdot 4^{n-1}.$$

86. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+4)\cdot\binom{2n}{n}>2^{2n+1}.$$

87. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n\cdot\binom{2n}{n}^2\geqslant 4^{2n-1}.$$

88. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n .$$

89. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n .$$

90. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{25} \cdot \binom{5n}{n} \cdot \binom{4n}{2n} < \sqrt[n]{27} \cdot \binom{5n}{2n} \cdot \binom{3n}{n} .$$

91. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{65} \cdot n \leqslant 2^n + 2^{71} .$$

92. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{2n} \cdot \binom{2n}{n} > \binom{4n}{2n} .$$

93. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$3^{28} \cdot n \leqslant 3^n + 3^{31} .$$

94. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} < (n+1) \cdot \binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n} .$$

95. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geqslant \frac{3^{n-1}}{2} .$$

96. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 (k+1)^4 < \frac{n^3 \cdot (n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9} .$$