79. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ zachodzi równość

$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}=\binom{n+1}{5}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=4$ mamy

$$L=\binom{4}{4}=1$$

oraz

$$P=\binom{5}{5}=1.$$

Zatem dana w zadaniu równość przyjmuje postać $1=1$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz $n \geqslant 4$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}=\binom{n+1}{5}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}+\binom{n+1}{4}=\binom{n+2}{5}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej równości i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L=\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}+\binom{n+1}{4}=\binom{n+1}{5}+\binom{n+1}{4}=\binom{n+2}{5}=P.$$

Powyżej wykorzystaliśmy wzór

$$\binom{m}{k}+\binom{m}{k+1}=\binom{m+1}{k+1}$$

dla $m=n+1$ oraz $k=4$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego $n \geqslant 4$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu równość została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$.

80. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\frac{5}{651}+\frac{6}{1333}+\ldots+\frac{n-1}{(n-1)^4+(n-1)^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2-n+1)}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=2$ mamy

$$L=\frac{1}{3}$$

oraz

$$P=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\,.$$

Zatem dana w zadaniu równość przyjmuje postać $1/3=1/3$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz $n\geqslant 2$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\frac{5}{651}+\frac{6}{1333}+\ldots+\frac{n-1}{(n-1)^4+(n-1)^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2-n+1)}\,.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\frac{5}{651}+\ldots+\frac{n-1}{(n-1)^4+(n-1)^2+1}+\frac{n}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2+n+1)}\,,\qquad(\clubsuit)$$

gdzie wykorzystaliśmy tożsamość $(n+1)^2-(n+1)+1=n^2+n+1$.

Wychodząc od lewej strony równości ($\clubsuit$) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned}L&=\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\frac{5}{651}+\ldots+\frac{n-1}{(n-1)^4+(n-1)^2+1}+\frac{n}{n^4+n^2+1}=\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2-n+1)}+\frac{n}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2-n+1)}+\frac{n}{(n^2-n+1)\cdot(n^2+n+1)}=\\
&=\frac{1}{2}-\frac{n^2+n+1}{2\cdot(n^2-n+1)\cdot(n^2+n+1)}+\frac{2n}{2\cdot(n^2-n+1)\cdot(n^2+n+1)}=\\
&=\frac{1}{2}-\frac{n^2-n+1}{2\cdot(n^2-n+1)\cdot(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2+n+1)}=P\,.\end{aligned}$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego $n\geqslant 2$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu równość została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$.

81. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $k<n$ spełniających równanie

$$k\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na wartość współczynnika dwumianowego otrzymujemy

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\qquad\text{oraz}\qquad\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}\,,$$

co po wstawieniu do równania danego w zadaniu prowadzi do

$$k\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}\,.$$

To z kolei daje kolejno równoważne postaci tego równania:

$$\frac{k}{k!\cdot(n-k-1)!\cdot(n-k)}=\frac{1}{k!\cdot(k+1)\cdot(n-k-1)!}\,,$$

$$\frac{k}{(n-k)}=\frac{1}{(k+1)}\,,$$

$$k\cdot(k+1)=n-k\,,$$
$$k\cdot(k+1)+k=n\,,$$
$$k^2+2k=n\,. \qquad (\spadesuit)$$

Zatem równanie dane w treści zadania jest równoważne równaniu (♠). Stąd wynika, że rozwiązaniem tego równania jest każda para $(k,\,n)$, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną oraz $n=k^2+2k$.

82. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4<\frac{n^2\cdot(n+1)^2\cdot(2n+1)}{10}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ lewa strona dowodzonej nierowności ma wartość 1, a prawa $12/10=6/5$. Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $1<6/5$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4<\frac{n^2\cdot(n+1)^2\cdot(2n+1)}{10}\,.$$

Wykażemy, że wówczas

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4+(n+1)^4<\frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2\cdot(2n+3)}{10}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony nierówności (♣) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L=1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4+(n+1)^4<\frac{n^2\cdot(n+1)^2\cdot(2n+1)}{10}+(n+1)^4=$$
$$=\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\Big(n^2\cdot(2n+1)+10\cdot(n+1)^2\Big)=\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\Big(2n^3+n^2+10n^2+20n+10\Big)=$$
$$=\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\Big(2n^3+11n^2+20n+10\Big)\,.$$

Z kolei prawą stronę nierówności (♣) możemy zapisać jako

$$P=\frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2\cdot(2n+3)}{10}=\frac{(n+1)^2}{10}\cdot(n+2)^2\cdot(2n+3)=$$
$$=\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\Big(n^2+4n+4\Big)\cdot(2n+3)=\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\Big(2n^3+8n^2+8n+3n^2+12n+12\Big)=$$
$$=\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\Big(2n^3+11n^2+20n+12\Big)\,.$$

Stąd otrzymujemy

$$L<\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\Big(2n^3+11n^2+20n+10\Big)<\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\Big(2n^3+11n^2+20n+12\Big)=P\,,$$

co kończy dowód drugiego kroku indukcyjnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

83. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+1)\cdot\binom{2n}{n}\geqslant 4^n\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n=1$ mamy $(n+1)\cdot\binom{2n}{n}=4$ oraz $4^n=4$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4\geqslant 4$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+1)\cdot\binom{2n}{n}\geqslant 4^n\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+2)\cdot\binom{2n+2}{n+1}\geqslant 4^{n+1}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$(n+2)\cdot\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(n+2)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=\frac{(n+2)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)}=$$

$$=(n+1)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{(n+2)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)^2}=(n+1)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{2(n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\geqslant$$

$$\geqslant 4^n\cdot\frac{2(n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\geqslant 4^n\cdot 4=4^{n+1}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\geqslant 4\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+2)(2n+1)\geqslant 4(n+1)(n+1)\,,$$

$$(n+2)(2n+1)\geqslant 2(n+1)(n+1)\,,$$

$$2n^2+5n+2\geqslant 2n^2+4n+2\,,$$

$$n\geqslant 0\,,$$

a to jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej n.

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

84. W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków $\geqslant$, $\leqslant$, a następnie dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy $(n+2)\cdot\binom{2n}{n}=3\cdot 2=6$ oraz $3\cdot 2^{2n-1}=3\cdot 2=6$, a zatem obie strony nierówności mają tę samą wartość. Tak więc dana w zadaniu nierówność jest prawdziwa bez względu na wybór kierunku nierówności.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+2)\cdot\binom{2n}{n}.....3\cdot 2^{2n-1},$$

gdzie w powyższej i wszystkich występujących dalej nierównościach w miejscu kropek należy konsekwentnie wstawić wybrany znak nierówności. Chcemy wykazać, że

$$(n+3)\cdot\binom{2n+2}{n+1}.....3\cdot 2^{2n+1}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$(n+3)\cdot\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(n+3)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=\frac{(n+3)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)}=$$

$$=(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{(n+3)(2n+1)(2n+2)}{(n+2)(n+1)^2}=(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{2(n+3)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}.....$$

$$.....3\cdot 2^{2n-1}\cdot\frac{2(n+3)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}.....3\cdot 2^{2n-1}\cdot 4=3\cdot 2^{2n+1},$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+3)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}.....4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+3)(2n+1).....4(n+2)(n+1),$$
$$(n+3)(2n+1).....2(n+2)(n+1),$$
$$2n^2+7n+3.....2n^2+6n+4,$$
$$n.....1.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla wszystkich $n\geqslant 1$, o ile w miejsce kropek wstawimy znak $\geqslant$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność dana w zadaniu, uzupełniona znakiem $\geqslant$, została udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n.

85. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+3)\cdot\binom{2n}{n}>7\cdot 4^{n-1}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n=1$ mamy

$$(n+3)\cdot\binom{2n}{n}=4\cdot 2=8$$

oraz

$$7\cdot 4^{n-1}=7\cdot 4^0=7\,,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $8>7$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+3)\cdot\binom{2n}{n}>7\cdot 4^{n-1}\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+4)\cdot\binom{2n+2}{n+1}>7\cdot 4^n\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$(n+4)\cdot\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(n+4)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=\frac{(n+4)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)}=$$

$$=(n+3)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{(n+4)(2n+1)(2n+2)}{(n+3)(n+1)^2}=(n+3)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)}>$$

$$>7\cdot 4^{n-1}\cdot\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)}\geqslant 7\cdot 4^{n-1}\cdot 4=7\cdot 4^n\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)}\geqslant 4\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+4)(2n+1)\geqslant 4(n+3)(n+1)\,,$$

$$(n+4)(2n+1)\geqslant 2(n+3)(n+1)\,,$$

$$2n^2+n+8n+4\geqslant 2\left(n^2+n+3n+3\right)\,,$$

$$2n^2+9n+4\geqslant 2n^2+8n+6\,,$$

$$n\geqslant 2\,.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n\geqslant 2$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=2$. Sprawdzenie dla $n=2$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n=2$ otrzymujemy

$$5\cdot\binom{4}{2}=5\cdot 6=30>28=7\cdot 4^1\,.$$

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$, a ponadto na początku rozwiązania wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n=1$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n=2$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} \geqslant 4$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} > 4\,, \qquad (\spadesuit)$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n>2$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n=3$.

86. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+4)\cdot\binom{2n}{n} > 2^{2n+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

Dla $n=1$ mamy $(n+4)\cdot\binom{2n}{n}=10$ oraz $2^{2n+1}=8$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $10>8$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+4)\cdot\binom{2n}{n} > 2^{2n+1}\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+5)\cdot\binom{2n+2}{n+1} > 2^{2n+3}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$(n+5)\cdot\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(n+5)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(n+5)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} =$$

$$= (n+4)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{(n+5)(2n+1)(2n+2)}{(n+4)(n+1)^2} = (n+4)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} >$$

$$> 2^{2n+1}\cdot\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} \geqslant 2^{2n+1}\cdot 4 = 2^{2n+3}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} \geqslant 4\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$2(n+5)(2n+1) \geqslant 4(n+4)(n+1)\,,$$

co kolejno przekształca się do

$$(n+5)(2n+1) \geqslant 2(n+4)(n+1)\,,$$
$$2n^2+11n+5 \geqslant 2n^2+10n+8\,,$$

czyli $n \geqslant 3$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geqslant 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=2$ oraz $n=3$. Sprawdzenie dla $n=3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n=2$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadku, który dotąd nie został sprawdzony, ani też nie wynika z dowodu indukcyjnego.

Dla $n=2$ otrzymujemy

$$6 \cdot \binom{4}{2} = 36 > 32 = 2^5\,.$$

Dla $n=3$ otrzymujemy

$$7 \cdot \binom{6}{3} = 7 \cdot 20 = 140 > 128 = 2^7\,.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n=1$ oraz dla $n=2$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n=3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} \geqslant 4$$

pojawi się nierówność

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} > 4\,,$$ ♠

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n>3$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n=4$.

87. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{2n}{n}^2 \geqslant 4^{2n-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy

$$L = 1 \cdot \binom{2}{1}^2 = 1 \cdot 2^2 = 4$$

oraz

$$P = 4^{2\cdot 1-1} = 4^1 = 4\,.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 \geqslant 4$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$n \cdot \binom{2n}{n}^2 \geqslant 4^{2n-1} . \qquad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$(n+1) \cdot \binom{2n+2}{n+1}^2 \geqslant 4^{2n+1} . \qquad (\diamondsuit)$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności ($\clubsuit$) można zapisać jako

$$n \cdot \binom{2n}{n}^2 = n \cdot \left(\frac{(2n)!}{n! \cdot n!}\right)^2 = n \cdot \frac{((2n)!)^2}{(n!)^4} = \frac{((2n)!)^2}{(n-1)! \cdot (n!)^3} .$$

Przekształcając lewą stronę nierówności ($\diamondsuit$) i korzystając z założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$L = (n+1) \cdot \binom{2n+2}{n+1}^2 = (n+1) \cdot \frac{((2n+2)!)^2}{((n+1)!)^4} = (n+1) \cdot \frac{((2n)!)^2 \cdot (2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2}{(n-1)! \cdot n \cdot (n!)^3 \cdot (n+1)^4} =$$

$$= \frac{((2n)!)^2}{(n-1)! \cdot (n!)^3} \cdot (n+1) \cdot \frac{(2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2}{n \cdot (n+1)^4} = \frac{((2n)!)^2}{(n-1)! \cdot (n!)^3} \cdot \frac{(2n+1)^2 \cdot 2^2}{n \cdot (n+1)} \geqslant$$

$$\geqslant 4^{2n-1} \cdot \frac{4 \cdot (2n+1)^2}{n \cdot (n+1)} \geqslant 4^{2n-1} \cdot 4^2 = 4^{2n+1} = P ,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{4 \cdot (2n+1)^2}{n \cdot (n+1)} \geqslant 4^2 . \qquad (\heartsuit)$$

Nierówność ($\heartsuit$) jest równoważna kolejnym nierównościom

$$4 \cdot (2n+1)^2 \geqslant 4^2 \cdot n \cdot (n+1) ,$$

$$(2n+1)^2 \geqslant 4 \cdot n \cdot (n+1) ,$$

$$4n^2 + 4n + 1 \geqslant 4n^2 + 4n ,$$

$$1 \geqslant 0 ,$$

a zatem nierówność ($\heartsuit$) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności ($\clubsuit$) wynika nierówność ($\diamondsuit$).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

88. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n .$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy

$$L=\binom{4}{1}=4$$

oraz

$$P=4^1=4\,.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4\leqslant 4$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n+2}{n}\leqslant 4^n\,. \tag{♣}$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n+1}\leqslant 4^{n+1}\,. \tag{♢}$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności (♣) można zapisać jako

$$\binom{2n+2}{n}=\frac{(2n+2)!}{n!\cdot(n+2)!}\,.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności (♢) i korzystając z założenia indukcyjnego (♣) otrzymujemy

$$L=\binom{2n+4}{n+1}=\frac{(2n+4)!}{(n+1)!\cdot(n+3)!}=\frac{(2n+2)!}{n!\cdot(n+2)!}\cdot\frac{(2n+3)\cdot(2n+4)}{(n+1)\cdot(n+3)}\leqslant$$

$$\leqslant 4^n\cdot\frac{(2n+3)\cdot(2n+4)}{(n+1)\cdot(n+3)}\leqslant 4^n\cdot 4=4^{n+1}=P\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(2n+3)\cdot(2n+4)}{(n+1)\cdot(n+3)}\leqslant 4\,. \tag{♡}$$

Nierówność (♡) jest równoważna kolejnym nierównościom

$$(2n+3)\cdot(2n+4)\leqslant 4\cdot(n+1)\cdot(n+3)\,,$$

$$(2n+3)\cdot(n+2)\leqslant 2\cdot(n+1)\cdot(n+3)\,,$$

$$2n^2+7n+6\leqslant 2n^2+8n+6\,,$$

$$0\leqslant n\,,$$

a zatem nierówność (♡) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności (♣) wynika nierówność (♢).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

Sposób II:

Idea rozwiązania:

Wykażemy, że lewa strona dowodzonej nierówności, czyli liczba $\binom{2n+2}{n}$, jest sumą **czterech** liczb występujących w $2n$-tym wierszu trójkąta Pascala (rozszerzonego do dolnej półpłaszczyzny umownymi zerami). Z kolei prawa strona dowodzonej nierówności jest sumą **wszystkich** wyrazów tego wiersza. Ponieważ wyrazy trójkąta Pascala są nieujemne, suma kilku wyrazów jednego wiersza nie przekracza sumy wszystkich wyrazów tego wiersza.

Rozwiązanie właściwe:

Korzystając ze wzorów

$$\binom{m}{k}=\binom{m-1}{k-1}+\binom{m-1}{k} \qquad \text{oraz} \qquad \binom{m}{k}=\binom{m}{m-k}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}\binom{2n+2}{n}&=\binom{2n+1}{n-1}+\binom{2n+1}{n}=\binom{2n}{n-2}+\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n}=\\&=\binom{2n}{n-2}+\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n+1}+\binom{2n}{n}=\binom{2n}{n-2}+\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n+1}=\\&=\sum_{k=n-2}^{n+1}\binom{2n}{k}\leqslant\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}=(1+1)^{2n}=2^{2n}=4^n\,,\end{aligned}$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

Uwagi:

Dla $n=1$ składnik $\binom{2n}{n-2}=\binom{2}{-1}$ jest legalny i ma wartość 0.

Podobnie, poprawnym, choć może nieco dziwnym sposobem zapisania sumy $\sum\limits_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$ jest

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\binom{2n}{k}.$$

Jeśli ktoś się brzydzi rozszerzaniem trójkąta Pascala przez wypełnienie dolnej półpłaszczyzny zerami, może po prostu sprawdzić prawdziwość dowodzonej nierówności dla $n=1$, a dalszą część rozumowania przeprowadzić dla $n\geqslant 2$ jak wyżej, bez konieczności odwoływania się do wyrazów rozszerzonego trójkąta Pascala równych 0.

89. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n}>\left(\frac{15}{4}\right)^n.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n=1$ mamy

$$\binom{2n+2}{n}=\binom{4}{1}=4$$

oraz

$$\left(\frac{15}{4}\right)^n = \left(\frac{15}{4}\right)^1 = \frac{15}{4}\,,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 > 15/4$, jest więc prawdziwa, gdyż $4 = 16/4$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$\binom{2n+4}{n+1} > \left(\frac{15}{4}\right)^{n+1}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\binom{2n+4}{n+1} = \frac{(2n+4)!}{(n+1)!(n+3)!} = \frac{(2n+2)!(2n+3)(2n+4)}{n!(n+1)(n+2)!(n+3)} = \binom{2n+2}{n}\cdot\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} >$$

$$> \left(\frac{15}{4}\right)^n \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \geqslant \left(\frac{15}{4}\right)^n \cdot \frac{15}{4} = \left(\frac{15}{4}\right)^{n+1}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \geqslant \frac{15}{4}\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$4(2n+3)(2n+4) \geqslant 15(n+1)(n+3)\,,$$

$$4\left(4n^2+14n+12\right) \geqslant 15\left(n^2+4n+3\right)\,,$$

$$16n^2+56n+48 \geqslant 15n^2+60n+45\,,$$

$$n^2-4n+3 \geqslant 0\,,$$

$$(n-1)(n-3) \geqslant 0\,,$$

co jest prawdą dla wszystkich liczb całkowitych $n \neq 2$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n = 1$ oraz $n \geqslant 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 3$. Sprawdzenie dla $n = 3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego. Sprawdzenie dla $n = 2$ nie jest konieczne, gdyż drugi krok indukcyjny został przeprowadzony także dla $n = 1$, dowodząc tym samym implikacji $T(1) \Rightarrow T(2)$, gdzie $T(n)$ jest dowodzoną nierównością. Jednak bezpośrednie sprawdzenie danej w treści zadania nierówności dla $n = 2$ może być uznane za prostsze, niż powoływanie się na mini-dowód indukcyjny działający dla $n \leqslant 2$.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym w dowodzie dla $n \geqslant 3$) Dla $n = 3$ dana w treści zadania nierówność przyjmuje postać:

$$\binom{8}{3} > \left(\frac{15}{4}\right)^3\,,$$

co jest kolejno równoważne nierównościom:

$$56 > \frac{15^3}{4^3}\,,$$

$$56\cdot 64 > 15^3\,,$$

$$28\cdot 128 > 3^3\cdot 5^3\,,$$

$$28\cdot 128 > 27\cdot 125\,,$$

a ta nierówność jest prawdziwa, gdyż czynniki w iloczynie po jej lewej stronie są większe od odpowiednich czynników po stronie prawej.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona w jednym dowodzie indukcyjnym dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 3$, a w drugim dowodzie indukcyjnym dla $n\leqslant 2$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n=3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)}\geqslant\frac{15}{4}$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)}>\frac{15}{4}\,,$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n>3$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n=4$. ♠

90. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{25}\cdot\binom{5n}{n}\cdot\binom{4n}{2n}<\sqrt[n]{27}\cdot\binom{5n}{2n}\cdot\binom{3n}{n}\,.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\binom{5n}{n}\cdot\binom{4n}{2n}=\frac{(5n)!}{n!\cdot(4n)!}\cdot\frac{(4n)!}{(2n)!\cdot(2n)!}=\frac{(5n)!}{n!\cdot(2n)!\cdot(2n)!}$$

oraz

$$\binom{5n}{2n}\cdot\binom{3n}{n}=\frac{(5n)!}{(2n)!\cdot(3n)!}\cdot\frac{(3n)!}{n!\cdot(2n)!}=\frac{(5n)!}{n!\cdot(2n)!\cdot(2n)!}\,,$$

skąd

$$\binom{5n}{n}\cdot\binom{4n}{2n}=\binom{5n}{2n}\cdot\binom{3n}{n}\,.$$

Wobec tego dana w treści zadania nierówność upraszcza się do nierówności

$$\sqrt[n]{25}<\sqrt[n]{27}\,,$$

jest więc prawdziwa jako nierówność $25<27$ podniesiona obustronnie do dodatniej potęgi $1/n$.

Uwagi

Ponieważ obie strony dowodzonej nierówności mają postać iloczynową, a iloraz większej do mniejszej maleje wraz z n, nie wydaje się możliwe udowodnienie implikacji $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, gdzie $T(n)$ jest nierównością z treści zadania, w inny sposób niż poprzez bezpośrednie udowodnienie następnika bez odwoływania się do założenia o prawdziwości poprzednika. Tym samym każde zastosowanie indukcji jest albo błędne (dowód *udał się* dzięki błędom rachunkowym), albo lipne (mimo ubrania dowodu w szatę indukcji, i tak dana nierówność jest dowodzona bezpośrednio).

91. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{65} \cdot n \leqslant 2^n + 2^{71} .$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leqslant 64$.

Dla $n \leqslant 64$ zachodzą nierówności

$$2^{65} \cdot n \leqslant 2^{65} \cdot 64 = 2^{65} \cdot 2^6 = 2^{71} < 2^n + 2^{71} ,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geqslant 65$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 65$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L = 2^{65} \cdot 65 ,$$
$$P = 2^{65} + 2^{71} = 2^{65} + 2^6 \cdot 2^{65} = 2^{65} + 64 \cdot 2^{65} = 65 \cdot 2^{65} ,$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geqslant 65$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{65} \cdot n \leqslant 2^n + 2^{71} .$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{65} \cdot (n+1) \leqslant 2^{n+1} + 2^{71} .$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geqslant 65$ otrzymujemy

$$L = 2^{65} \cdot (n+1) = 2^{65} \cdot n + 2^{65} \leqslant 2^n + 2^{71} + 2^{65} \leqslant 2^n + 2^{71} + 2^n = 2^{n+1} + 2^{71} = P ,$$

co kończy dowód indukcyjny.

92. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{2n} \cdot \binom{2n}{n} > \binom{4n}{2n} .$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy $L = 8$ oraz $P = 6$, skąd $L > P$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{2n}\cdot\binom{2n}{n}>\binom{4n}{2n}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$2^{2n+2}\cdot\binom{2n+2}{n+1}>\binom{4n+4}{2n+2}. \qquad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony równości ($\clubsuit$) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L=2^{2n+2}\cdot\frac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2}=4\cdot 2^{2n}\cdot\frac{(2n)!\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}{\big(n!\big)^2\cdot(n+1)^2}=2^{2n}\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{8\cdot(2n+1)}{n+1}>$$

$$>\binom{4n}{2n}\cdot\frac{8\cdot(2n+1)}{n+1}=\frac{(4n)!}{\big((2n)!\big)^2}\cdot\frac{8\cdot(2n+1)}{n+1}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(4n)!\cdot(4n+1)\cdot(4n+2)\cdot(4n+3)\cdot(4n+4)}{\big((2n)!\big)^2\cdot(2n+1)^2\cdot(2n+2)^2}=\frac{(4n+4)!}{\big((2n+2)!\big)^2}=\binom{4n+4}{2n+2}=P,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{8\cdot(2n+1)}{n+1}\geqslant\frac{(4n+1)\cdot(4n+2)\cdot(4n+3)\cdot(4n+4)}{(2n+1)^2\cdot(2n+2)^2}. \qquad (\heartsuit)$$

Przekształcanie nierówności ($\heartsuit$) prowadzi do kolejnych nierówności równoważnych:

$$\frac{8\cdot(2n+1)}{n+1}\geqslant\frac{2\cdot(4n+1)\cdot(4n+3)}{(2n+1)\cdot(n+1)},$$

$$4\cdot(2n+1)\geqslant\frac{(4n+1)\cdot(4n+3)}{2n+1},$$

$$4\cdot(2n+1)^2\geqslant(4n+1)\cdot(4n+3),$$

$$16n^2+16n+4\geqslant 16n^2+16n+3,$$

$$1\geqslant 0,$$

a zatem nierówność ($\heartsuit$) jest prawdziwa dla każdej liczby n.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego n naturalnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

93. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$3^{28}\cdot n\leqslant 3^n+3^{31}.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 27$.

Dla $n\leqslant 27$ zachodzą nierówności

$$3^{28}\cdot n\leqslant 3^{28}\cdot 27=3^{28}\cdot 3^3=3^{31}<3^n+3^{31},$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geqslant 28$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 28$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L = 3^{28} \cdot 28\,,$$
$$P = 3^{28} + 3^{31} = 3^{28} + 27 \cdot 3^{28} = 28 \cdot 3^{28}\,,$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geqslant 28$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$3^{28} \cdot n \leqslant 3^n + 3^{31}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$3^{28} \cdot (n+1) \leqslant 3^{n+1} + 3^{31}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geqslant 28$ otrzymujemy

$$L = 3^{28} \cdot (n+1) = 3^{28} \cdot n + 3^{28} \leqslant 3^n + 3^{31} + 3^{28} \leqslant 3^n + 3^{31} + 3^n = 2 \cdot 3^n + 3^{31} <$$
$$< 3 \cdot 3^n + 3^{31} = 3^{n+1} + 3^{31} = P,$$

co kończy dowód indukcyjny.

94. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} < (n+1) \cdot \binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n}\,.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} = \frac{(6n)!}{(2n)! \cdot (4n)!} \cdot \frac{(4n)!}{n! \cdot (3n)!} = \frac{(6n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (3n)!}$$

oraz

$$\binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n} = \frac{(6n)!}{(3n)! \cdot (3n)!} \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!} = \frac{(6n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (3n)!}\,,$$

skąd

$$\binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} = \binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n}\,.$$

Wobec tego dana w treści zadania nierówność upraszcza się do nierówności

$$n < n+1\,,$$

jest więc prawdziwa.

Uwagi

Ponieważ obie strony dowodzonej nierówności mają postać iloczynową, a iloraz większej do mniejszej maleje wraz z n, nie wydaje się możliwe udowodnienie implikacji $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, gdzie $T(n)$ jest nierównością z treści zadania, w inny sposób niż poprzez bezpośrednie udowodnienie

następnika bez odwoływania się do założenia o prawdziwości poprzednika. Tym samym każde zastosowanie indukcji jest albo błędne (dowód *udał się* dzięki błędom rachunkowym), albo lipne (mimo ubrania dowodu w szatę indukcji, i tak dana nierówność jest dowodzona bezpośrednio).

95. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geqslant \frac{3^{n-1}}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

Dla $n=1$ mamy

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{2}{2} = 1$$

oraz

$$\frac{3^{n-1}}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać

$$1 > \frac{1}{2}\,,$$

jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geqslant \frac{3^{n-1}}{2}\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{n+2} \geqslant \frac{3^{n}}{2}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{n+2} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!(n+2)} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)} \cdot \frac{2(2n+1)}{(n+2)} >$$

$$> \frac{3^{n-1}}{2} \cdot \frac{2(2n+1)}{(n+2)} \geqslant \frac{3^{n-1}}{2} \cdot 3 = \frac{3^n}{2}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(2n+1)}{(n+2)} \geqslant 3\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$2(2n+1) \geqslant 3(n+2)\,,$$

co kolejno przekształca się do

$$4n+2 \geqslant 3n+6\,,$$

czyli $n \geqslant 4$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geqslant 4$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=2$, $n=3$ oraz $n=4$. Sprawdzenie dla $n=4$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n=2$ oraz $n=3$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadkach, które dotąd nie zostały sprawdzone, ani też nie wynikają z dowodu indukcyjnego.

Dla $n=2$ otrzymujemy

$$\frac{\binom{4}{2}}{3} = \frac{6}{3} = 2 > \frac{3}{2} = \frac{3^1}{2}\,.$$

Dla $n=3$ otrzymujemy

$$\frac{\binom{6}{3}}{4} = \frac{20}{4} = 5 > \frac{9}{2} = \frac{3^2}{2}\,.$$

Dla $n=4$ otrzymujemy

$$\frac{\binom{8}{4}}{5} = \frac{70}{5} = 14 > \frac{27}{2} = \frac{3^3}{2}\,.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n=1$, $n=2$ oraz dla $n=3$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n=4$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(2n+1)}{(n+2)} \geqslant 3$$

pojawi się nierówność

$$\frac{2(2n+1)}{(n+2)} > 3\,,$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n>4$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n=5$. ♠

Chociaż nie jest to od razu widoczne, ani też nie jest istotne dla tego zadania, liczby $\dfrac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ są całkowite. Chcesz wiedzieć więcej? Poszukaj hasła **Liczby Catalana**.

96. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} k^4(k+1)^4 < \frac{n^3\cdot(n+1)^3\cdot(n+2)^3}{9}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ lewa strona dowodzonej nierowności ma wartość 16, a prawa 24. Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $16<24$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\sum_{k=1}^{n} k^4(k+1)^4 < \frac{n^3\cdot(n+1)^3\cdot(n+2)^3}{9}\,.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^4(k+1)^4 < \frac{(n+1)^3\cdot(n+2)^3\cdot(n+3)^3}{9}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony nierówności (♣) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L=\sum_{k=1}^{n+1} k^4(k+1)^4 < \frac{n^3\cdot(n+1)^3\cdot(n+2)^3}{9}+(n+1)^4\cdot(n+2)^4 =$$

$$=\frac{(n+1)^3\cdot(n+2)^3}{9}\cdot\Big(n^3+9\cdot(n+1)\cdot(n+2)\Big)=\frac{(n+1)^3\cdot(n+2)^3}{9}\cdot\Big(n^3+9n^2+27n+18\Big)\,.$$

Z kolei prawą stronę nierówności (♣) możemy zapisać jako

$$P=\frac{(n+1)^3\cdot(n+2)^3\cdot(n+3)^3}{9}=\frac{(n+1)^3\cdot(n+2)^3}{9}\cdot(n+3)^3=$$

$$=\frac{(n+1)^3\cdot(n+2)^3}{9}\cdot\Big(n^3+9n^2+27n+27\Big)\,.$$

Stąd otrzymujemy

$$L<\frac{(n+1)^3\cdot(n+2)^3}{9}\cdot\Big(n^3+9n^2+27n+18\Big)<$$

$$<\frac{(n+1)^3\cdot(n+2)^3}{9}\cdot\Big(n^3+9n^2+27n+27\Big)=P\,,$$

co kończy dowód drugiego kroku indukcyjnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.