Kolokwium nr 2: środa 28.10.2026, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 0–214.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach[1] w piątek 16.10.2026 , poniedziałek 19.10.2026, piątek 23.10.2026 i poniedziałek 26.10.2026.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Liczby wymierne i niewymierne.

97. Czy istnieją takie liczby naturalne $m, n>1$, że $\log_m n = 13/7$?

98. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n, liczby całkowite oraz znaki $+,-,\cdot,:$ i $\sqrt{\ }$ zapisz liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

Oszustwo **99.**

Zadanie: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w=\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$
$$w+\sqrt{2}=\sqrt{3-\sqrt{8}}$$
$$w^2+2\sqrt{2}w+2=3-2\sqrt{2}$$
$$2\sqrt{2}(w+1)+(w-1)(w+1)=0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2}+w-1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

100. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

101. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?

102. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?

[1] Liczby wymierne/niewymierne ok. 4 godzin i szacowanie ok. 4 godzin.

20 przykładów.

Odpowiedzi, których poprawności nie da się uzasadnić elementarnie, nie mogą być uznane.

Podaj przykład takiej liczby rzeczywistej x, że

103. $0<x<1$ oraz x jest niewymierna,

104. $\sqrt{5}<x<\sqrt{6}$ oraz x jest wymierna,

105. x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,

106. x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,

107. $(x+1)^2$ jest niewymierna,

108. x jest niewymierna, ale $x+\frac{1}{x}$ jest wymierna,

109. x jest niewymierna i 2^x jest niewymierna,

110. 2^x+3^x jest liczbą niewymierną,

111. 2^x+3^x jest liczbą wymierną,

112. $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

113. $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą wymierną,

114. $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

115. $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą wymierną,

116. $2^x+\log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,

117. $2^x+\log_2 x$ jest liczbą niewymierną,

118. $x+\log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

119. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

120. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,

121. $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,

122. $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.

Zadania do samodzielnego przeanalizowania. Mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko w miarę wolnego czasu – proszę umieć wskazać zadania, których rozwiązania chcecie Państwo zobaczyć.

---

123. Dowieść, że liczba $\log_{45}75$ jest niewymierna.

124. Niech

$$a=2^{32}\cdot 3^{11}\cdot 6^{10} \qquad \text{oraz} \qquad b=2^{34}\cdot 3^{12}\cdot 6^{10}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_a b$ jest wymierna czy niewymierna.

125. Dowieść, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\dfrac{9}{8}\right)$ jest niewymierna.

126. Dowieść, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\dfrac{15}{8}\right)$ jest niewymierna.

127. Dowieść, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

128. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, że liczby $a+b+c$ oraz $a^2+b^2+c^2$ są wymierne. Dowieść, że liczba $ab+bc+ca$ jest wymierna.

129. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej dodatniej $x\neq 1$, że liczba $\log_x(x+10)$ jest wymierna.
Wskazówka: Załóż, że $\log_x(x+10)$ jest równe tak dobranej konkretnej liczbie wymiernej, aby dało się wyliczyć x.
Uzasadnić poprawność podanego przykładu, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+10)$.

130. Podać 4 przykłady liczb rzeczywistych dodatnich $x\neq 1$, dla których liczba

$$\log_x(x+120)$$

jest wymierna.
Wsk.: Najpierw rozwiąż poprzednie zadanie lub zapoznaj się z jego rozwiązaniem.
Uzasadnić poprawność podanych przykładów, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+120)$.

131. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych $n\geqslant 2$, że liczba

$$\sum_{k=2}^{n}\log_2\log_k(k+1)$$

jest wymierna.

132. Dowieść, że liczba $\log_{60}150$ jest niewymierna.

133. Udowodnij, że liczba $\log_{(7/10)}\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{7}\right)$ jest niewymierna.

Szacowanie liczb i wyrażeń.

Która z liczb jest większa ?

134. $123456\cdot 123458$ czy 123457^2

135. $\binom{2007}{666}^{2007}$ czy $\binom{2007}{666}^{666}$

136. $\left(\sqrt[4]{83}-2\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{83}-2\right)^{666}$

137. $\left(\sqrt[4]{79}-2\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-2\right)^{666}$

138. $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{666}$

139. $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{667}$

140. 2^{1000} czy 3^{700}

141. 5^{444} czy 3^{700}

142. $\frac{17}{20}$ czy $\frac{16}{21}$

143. $\frac{100}{7}$ czy $\frac{150}{11}$

144. $\frac{8^{444}}{17^{17}}$ czy $\frac{16^{333}}{19^{17}}$

145. $\frac{17^{667}}{3333^4+6666^4}$ czy $\frac{17^{666}}{3333^4}$

146. $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2007}{667}$

147. $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2008}{666}$

148. $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2007}{1667}$

149. $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2008}{1666}$

150. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\sqrt{37}+6$

151. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy 12

152. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\frac{1}{\sqrt{97}-10}$

153. $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8}$ czy $\left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$

154. $\log_9 27$ czy $\log_4 8$

155. $\log_3 8$ czy $\log_2 5$

156. $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$

157. $(\log_2 3)\cdot\log_5 7$ czy $(\log_2 7)\cdot\log_5 3$

158. $(\log_2 3)\cdot\log_7 5$ czy $(\log_7 9)\cdot\log_{16} 25$

159. $\log_2 3$ czy $\log_3 5$

160. $\log_3 7$ czy $\log_5 19$

161. $\log_2 3$ czy $\log_5 13$

162. $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$

Wskazówka do niektórych pytań:
Wiadomo, że wartość ułamka nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę różną od zera.
Podobnie, wartość logarytmu nie zmieni się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną .....

163. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2015}$?

164. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2015}$?

165. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2015}$?

166. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2015}$?

167. Która liczba jest większa: $2^{2^{2^{11}}}$ czy $1000^{2^{2^{10}}}$?

168. Która liczba jest większa: $a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}}$ czy 10^{10} ?
Liczba $a=\sqrt[4]{2}$ występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

169. Która liczba jest większa: $\log_a b$ czy $\log_b a$?
Przyjmujemy $a=\log_2 3$ oraz $b=\log_3 2$.

170. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej.

$$A=10^{10^{11}},\quad B=10^{10^{20}},\quad C=10^{10^{50}},\quad D=10^{10^{250}},\quad E=(10!)^{10!}$$
$$F=(100!)^{10^{10}},\quad G=2^{100!},\quad H=2^{2^{100}},\quad I=10^{10^{10^3}},\quad J=2^{2^{2^{10}}}$$

171. Dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej n udowodnić nierówności

$$n^{2^{120}}<2^n<n^{2^{122}}.$$

172. Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$n^{2^{2017}}<2^n<n^{2^{2018}}.$$

173*. Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$4^n<n^{2^{2017}}<8^n.$$

174. Udowodnić nierówność

$$n^{n^{2^{1000}}}<2^{2^n}$$

dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n>1$.

175. Niech $A_n=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n<2$.

176. Niech $A_n=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^3}}}}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n<3$.

177. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt{n^2+1}-n-\frac{C}{n}\right|<\frac{D}{n^3}.$$

178. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5} \leqslant D\,.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 6C$ (wersja łatwiejsza).
Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 4C$ (wersja trudniejsza).

179. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3} \leqslant D\,.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 8C$ (wersja najłatwiejsza).
Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 4C$ (wersja średnio trudna).
Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 2C$ (wersja najtrudniejsza).

180. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną k oraz liczby wymierne dodatnie C oraz D, a następnie udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$Cn^k \leqslant \sqrt{4n^2+1}+\sqrt{4n^2+2}+\sqrt{4n^2+3}+\sqrt{4n^2+4}+\ldots+\sqrt{16n^2-1}+\sqrt{16n^2} \leqslant Dn^k\,.$$

Trudność zadania zależy od uzyskanego przez Ciebie ilorazu D/C:
• Przy $D/C \geqslant 2$ zadanie jest najłatwiejsze.
• Przy $D/C < 3/2$ zadanie jest najtrudniejsze.

181. Dobrać odpowiednie liczby całkowite dodatnie s i t oraz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}-n^5\right)^s}{\left(\sqrt{n^8+3n^7}-n^4\right)^t} \leqslant 18C\,.$$

Poniższe zadania omówić tylko wtedy, gdy zostanie czasu.

W każdym z poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 5 ,10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, $10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

182. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 2^{500} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

183. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 3^{2000} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

184. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 2^{10000} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

185. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 30^{10000} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

186. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 2^{2^{10}} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

187. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 4444^{4444} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

188. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 7777^{7777} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

189. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 2011^{2011} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

190. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 222^{5555} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

191. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 5555^{222} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

192. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 333^{333} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

193. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 10000! < \ldots\ldots\ldots\ldots$

194. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 666! < \ldots\ldots\ldots\ldots$

195. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 5000! < \ldots\ldots\ldots\ldots$

196. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 35000! < \ldots\ldots\ldots\ldots$

197. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \left(10^5\right)! < \ldots\ldots\ldots\ldots$

198. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \left(7+2\sqrt{2}\right)^{500} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

199. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \left(6+3\sqrt{2}\right)^{500} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

200. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \left(91+\sqrt{91}\right)^{100} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

201. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{1000}{3} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

202. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{1000}{4} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

203. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{10000}{5} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

204. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{10^5}{100} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

205. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{10^{10}}{20} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

206. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt{9n^2+40n}-\sqrt{9n^2+16n} \leqslant 2C\,.$$

207. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt[3]{n^3+63n^2}-n \leqslant 7C\,.$$

208. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt[8]{n^8+255n^7}-n \leqslant 32C\,.$$

209. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{C}{n} \leqslant \sqrt[4]{n^4+15n^2}-n \leqslant \frac{4C}{n}\,.$$

210. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{25n^2+11}-5n}{\sqrt[4]{n^4+80n^2}-n} \leqslant 11C\,.$$

211. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{25n^2+24}-5n}{\sqrt{9n^2+40}-3n} \leqslant 2C\,.$$

212. Na potrzeby tego zadania liczbę nazwiemy ładną, jeśli ma jednocyfrowy licznik i jednocyfrowy mianownik.
Dla odpowiednio dobranych **ładnych** liczb wymiernych dodatnich C i D spełniających nierówność $D<3C$ udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt[3]{n^3+7}-n}{\sqrt{4n^4+5}-2n^2} \leqslant D\,.$$

213. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{36n+28}-\sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75}-\sqrt{25n+11}} \leqslant 2C\,.$$

214. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k \leqslant \frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1} \leqslant 4C\cdot n^k\,.$$