123. Dowieść, że liczba $\log_{45}75$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{45}75$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{45}75=\frac{m}{n}\,,$$

$$45^{m/n}=75\,,$$

$$45^m=75^n\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$3^{2m}\cdot 5^m=3^n\cdot 5^{2n}\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m &= n \\ m &= 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$n=2m>m=2n>n\,,$$

czyli $n>n$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{45}75$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{45}75$ jest niewymierna.

124. Niech

$$a=2^{32}\cdot 3^{11}\cdot 6^{10}\qquad\text{oraz}\qquad b=2^{34}\cdot 3^{12}\cdot 6^{10}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_a b$ jest wymierna czy niewymierna.

Rozwiązanie:

Ponieważ $a=2^{42}\cdot 3^{21}=12^{21}$ oraz $b=2^{44}\cdot 3^{22}=12^{22}$, otrzymujemy

$$\log_a b=\frac{22}{21}\,,$$

co jest liczbą wymierną.

125. Dowieść, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\dfrac{9}{8}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest wymierna i niech m/n będzie

jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)=\frac{m}{n}\,,$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{m/n}=\frac{9}{8}\,,$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{m}=\left(\frac{9}{8}\right)^{n}\,,$$
$$8^n\cdot 3^m=2^m\cdot 9^n\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{3n}\cdot 3^m=2^m\cdot 3^{2n}\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 3n &= m \\ m &= 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$m=3n>2n=m\,,$$

czyli $m>m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest niewymierna.

126. Dowieść, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest wymierna i niech będzie ona równa $-m/n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi **(zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, a liczba logarytmowana jest większa od 1).** Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)=-\frac{m}{n}\,,$$
$$\left(\frac{4}{15}\right)^{-m/n}=\frac{15}{8}\,,$$
$$\left(\frac{4}{15}\right)^{-m}=\left(\frac{15}{8}\right)^{n}\,,$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^m = \left(\frac{15}{8}\right)^n ,$$
$$15^m \cdot 8^n = 15^n \cdot 4^m .$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{3n} \cdot 3^m \cdot 5^m = 2^{2m} \cdot 3^n \cdot 5^n .$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 3n = 2m \\ m = n \\ m = n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m = 3n > 2n = 2m ,$$

czyli $2m > 2m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:
• zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami piętnastki,
lub
• występują wykładniki, o których nie wiadomo, czy są nieujemne.

127. Dowieść, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że dana w zadaniu liczba jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wówczas otrzymujemy kolejno:

$$w = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} ,$$
$$w - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3} ,$$
$$\left(w - \sqrt{2}\right)^3 = 3 ,$$
$$w^3 - 3w^2 \cdot \sqrt{2} + 6w - 2\sqrt{2} = 3 ,$$
$$w^3 + 6w - 3 = \left(3w^2 + 2\right) \cdot \sqrt{2} ,$$
$$\frac{w^3 + 6w - 3}{3w^2 + 2} = \sqrt{2} ,$$

co nie jest możliwe, gdyż po lewej stronie równości występuje liczba wymierna (zauważmy, że mianownik $3w^2+2$ jest różny od zera jako liczba dodatnia), a po prawej niewymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że błędne było założenie, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ jest wymierna. Zatem liczba ta jest niewymierna.

128. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, że liczby $a+b+c$ oraz $a^2+b^2+c^2$ są wymierne. Dowieść, że liczba $ab+bc+ca$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Teza zadania wynika ze wzoru

$$ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}\,.$$

129. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej dodatniej $x\neq 1$, że liczba $\log_x(x+10)$ jest wymierna.

Wskazówka: Załóż, że $\log_x(x+10)$ jest równe tak dobranej konkretnej liczbie wymiernej, aby dało się wyliczyć x.

Uzasadnić poprawność podanego przykładu, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+10)$.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Zakładając, że

$$\log_x(x+10)=w\,,$$

otrzymujemy równanie

$$x^w=x+10\,. \qquad (\#)$$

Wybieramy taką wartość wymierną w, abyśmy umieli rozwiązać równanie (#) i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla $w=2$ równanie (#) przybiera postać

$$x^2=x+10\,.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe[1] otrzymując

$$x=\frac{1\pm\sqrt{41}}{2}\,,$$

a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy

$$x=\frac{1+\sqrt{41}}{2}$$

i wówczas

$$\log_x(x+10)=\log_x x^2=2$$

jest liczbą wymierną.

Sposób II:

Postępujemy jak w sposobie I przyjmując $w=-1$, co prowadzi nas do równania

$$x^{-1}=x+10$$

[1]Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.

mającego rozwiązanie dodatnie

$$x=\sqrt{26}-5\,.$$

Wówczas

$$\log_x(x+10)=\log_x x^{-1}=-1$$

jest liczbą wymierną.

130. Podać 4 przykłady liczb rzeczywistych dodatnich $x\neq 1$, dla których liczba

$$\log_x(x+120)$$

jest wymierna.

Wsk.: Najpierw rozwiąż poprzednie zadanie lub zapoznaj się z jego rozwiązaniem.
Uzasadnić poprawność podanych przykładów, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+120)$.

Rozwiązanie:

Przykład I:

Dla $x=5$ liczba $\log_x(x+120)=\log_5 125=3$ jest liczbą wymierną.

Przykład II:

Dla $x=8$ liczba $\log_x(x+120)=\log_8 128=\dfrac{7}{3}$ jest liczbą wymierną.

Przykład III:

Zakładając, że

$$\log_x(x+120)=w\,,$$

otrzymujemy równanie

$$x^w=x+120\,. \qquad (\#)$$

Wybieramy taką wartość wymierną w, abyśmy umieli rozwiązać równanie (#) i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla $w=2$ równanie (#) przybiera postać

$$x^2=x+120\,.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe[2] otrzymując

$$x=\frac{1\pm\sqrt{481}}{2}\,,$$

a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy

$$x=\frac{1+\sqrt{481}}{2}$$

i wówczas

$$\log_x(x+120)=\log_x x^2=2$$

jest liczbą wymierną.

Przykład IV:

Postępujemy jak w przykładzie III przyjmując $w=-1$, co prowadzi nas do równania

$$x^{-1}=x+120$$

[2]Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.

mającego rozwiązanie dodatnie

$$x=\sqrt{3601}-60\,.$$

Wówczas

$$\log_x(x+120)=\log_x x^{-1}=-1$$

jest liczbą wymierną.

Inny sposób uzyskania tego przykładu: W równości

$$\log_{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=-1\,.$$

podstawiamy $n=3600$, skąd otrzymujemy $x=\sqrt{3601}-60$.

131. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych $n\geqslant 2$, że liczba

$$\sum_{k=2}^{n}\log_2\log_k(k+1)$$

jest wymierna.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy $n=2^{2^m}-1$, gdzie m jest liczbą naturalną. Wówczas korzystając z równości $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$ otrzymujemy

$$\sum_{k=2}^{n}\log_2\log_k(k+1)=\log_2\prod_{k=2}^{n}\log_k(k+1)=\log_2\log_2(n+1)=\log_2\log_2 2^{2^m}=m\,.$$

132. Dowieść, że liczba $\log_{60}150$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{60}150$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{60}150=\frac{m}{n}\,,$$

$$60^{m/n}=150\,,$$

$$60^m=150^n\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Sposób I

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m}\cdot 3^m\cdot 5^m=2^n\cdot 3^n\cdot 5^{2n}\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m &= n\\ m &= n\\ m &= 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$n = 2m > m = n\,,$$

czyli $n > n$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Sposób II

Ostatnią niezerową cyfrą liczby 60^m jest 6, a ostatnią niezerową cyfrą liczby 150^n jest 5, zatem liczby te nie mogą być równe.

W obu sposobach doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{60}150$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{60}150$ jest niewymierna.

133. Udowodnij, że liczba $\log_{(7/10)}\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{7}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(7/10)}\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{7}\right)$ jest wymierna i niech będzie ona równa $-m/n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi **(zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, a liczba logarytmowana jako równa $\sqrt{50/49}$ jest większa od 1).** Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(7/10)}\left(\frac{5\sqrt{2}}{7}\right) = -\frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{7}{10}\right)^{-m/n} = \frac{5\sqrt{2}}{7}\,,$$

$$\left(\frac{7}{10}\right)^{-m} = \left(\frac{5\sqrt{2}}{7}\right)^{n}\,,$$

$$\left(\frac{10}{7}\right)^{m} = \left(\frac{5\sqrt{2}}{7}\right)^{n}\,,$$

$$10^m \cdot 7^n = \left(5\sqrt{2}\right)^n \cdot 7^m\,,$$

$$10^{2m} \cdot 7^{2n} = 50^n \cdot 7^{2m}\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m} \cdot 5^{2m} \cdot 7^{2n} = 2^n \cdot 5^{2n} \cdot 7^{2m}\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m &= n \\ 2m &= 2n \\ 2n &= 2m \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2n = 2m = n\,,$$

czyli $2n = n$, co nie jest prawdą dla dodatniej liczby n.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(7/10)}\left(\frac{5\sqrt{2}}{7}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(7/10)}\left(\frac{5\sqrt{2}}{7}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:
• zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami liczb złożonych
lub
• występują wykładniki, o których nie wiadomo, że są całkowite i nieujemne
lub
• nie zauważono, że liczba w treści zadania jest ujemna i zapisano ją w postaci ułamka o dodatnim liczniku i mianowniku.

Zgodnie z ogólną zasadą, częściowa punktacja za błędne rozwiązanie musi być niższa niż **50%,** a zatem na kolokwium i egzaminie takie rozwiązania nie mogą być ocenione na więcej niż **4 punkty na 10.** Jednak sprawdzający ma prawo uznać powyższe błędy za dyskwalifikujące i dawać za takie rozwiązania **0 punktów.** A może dawać **4 punkty** lub cokolwiek pomiędzy 0 a 4 – to jego suwerenna decyzja, której nikt nie powinien podważać.

163. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2015}$?

Odpowiedź: $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2017} > \left(7-\sqrt{17}\right)^{2015}$.

Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017} > x^{2015}$ dla $x > 1$ oraz z oszacowania

$$\mathbf{7-\sqrt{17}} > 7-\sqrt{25} = 7-5 = 2 > \mathbf{1}\,.$$

164. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2015}$?

Odpowiedź: $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2017} < \left(7-\sqrt{37}\right)^{2015}$.

Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017} < x^{2015}$ dla $0 < x < 1$ oraz z oszacowań

$$\mathbf{0} = 7-7 = 7-\sqrt{49} < \mathbf{7-\sqrt{37}} < 7-\sqrt{36} = 7-6 = \mathbf{1}\,.$$

165. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2015}$?

Odpowiedź: $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2017} > \left(7-\sqrt{57}\right)^{2015}$.

Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017} > x^{2015}$ dla $-1 < x < 0$ oraz z oszacowań

$$-\mathbf{1} = 7-8 = 7-\sqrt{64} < \mathbf{7-\sqrt{57}} < 7-\sqrt{49} = 7-7 = \mathbf{0}\,.$$

166. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2015}$?

Odpowiedź: $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2017} < \left(7-\sqrt{77}\right)^{2015}$.

Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017} < x^{2015}$ dla $x < -1$ oraz z oszacowania

$$\mathbf{7-\sqrt{77}} < 7-\sqrt{64} = 7-8 = -\mathbf{1}\,.$$

167. Która liczba jest większa: $2^{2^{2^{11}}}$ czy $1000^{2^{2^{10}}}$?

Odpowiedź: $2^{2^{2^{11}}} > 1000^{2^{2^{10}}}$.

Korzystając z własności potęgowania otrzymujemy

$$2^{2^{2^{11}}} = 2^{2^{2^{10}+2^{10}}} = 2^{2^{2^{10}}\cdot 2^{2^{10}}} = \left(2^{2^{2^{10}}}\right)^{2^{2^{10}}} > 1000^{2^{2^{10}}}\,.$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności

$$2^{2^{2^{10}}} = 2^{2^{1024}} > 2^{2^{10}} = 2^{1024} > 2^{10} = 1024 > 1000\,.$$

168. Która liczba jest większa: $a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a}}}}}}}}}}}}}}}}$ czy 10^{10} ?

Liczba $a = \sqrt[4]{2}$ występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

Rozwiązanie:

Z równości $a^{16} = 16$ wynika, że pierwsza liczba jest równa 16, jest więc mniejsza.

169. Która liczba jest większa: $\log_a b$ czy $\log_b a$?
Przyjmujemy $a=\log_2 3$ oraz $b=\log_3 2$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $ab=1$, mamy $\log_a b=\log_b a=-1$.

170. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej.

$$A=10^{10^{11}},\quad B=10^{10^{20}},\quad C=10^{10^{50}},\quad D=10^{10^{250}},\quad E=(10!)^{10!}$$
$$F=(100!)^{10^{10}},\quad G=2^{100!},\quad H=2^{2^{100}},\quad I=10^{10^{10^3}},\quad J=2^{2^{2^{10}}}$$

Rozwiązanie:

Poprawny porządek jest następujący

$$E<A<F<B<H<C<G<D<J<I$$

Szacowania dowodzące poprawności powyższego uporządkowania:

$$E=(10!)^{10!}<\left(10^{10}\right)^{10^{10}}=10^{10^{11}}=A$$
$$A=10^{10^{11}}=\left(10^{10}\right)^{10^{10}}<\left(10^{90}\right)^{10^{10}}<(100!)^{10^{10}}=F$$
$$F=(100!)^{10^{10}}<\left(10^{200}\right)^{10^{10}}<\left(10^{1000}\right)^{10^{10}}=10^{10^{13}}<B$$
$$B<10^{10^{29}}<16^{10^{30}/4}=2^{10^{30}}=2^{1000^{10}}<2^{1024^{10}}=2^{2^{100}}=H$$
$$H=2^{2^{100}}<2^{2^{120}}=2^{8^{40}}<10^{10^{40}}<C$$
$$C<10^{10^{90}}<16^{100!/4}=2^{100!}=G$$
$$G=2^{100!}<10^{10^{200}}<D$$
$$D<10^{10^{299}}<16^{10^{300}/4}=2^{10^{300}}=2^{1000^{100}}<2^{1024^{100}}<2^{2^{1000}}<2^{2^{2^{10}}}=J$$
$$J=2^{2^{2^{10}}}=2^{2^{1024}}=2^{4^{512}}<10^{10^{512}}<10^{10^{1000}}=I$$

171. Dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej n udowodnić nierówności

$$n^{2^{120}}<2^n<n^{2^{122}}\,.$$

Rozwiązanie:

Przyjęcie $n=2^m$ pozwala na przepisanie podanej nierówności w postaci równoważnej:

$$2^{m\cdot 2^{120}}<2^{2^m}<2^{m\cdot 2^{122}}\,,$$

czyli

$$m\cdot 2^{120}<2^m<m\cdot 2^{122}\,.$$

Z kolei podstawienie $m=2^k$ prowadzi do

$$2^{k+120}<2^{2^k}<2^{k+122},$$

czyli

$$k+120<2^k<k+122.$$

Zauważając, że powyższe nierówności są prawdziwe dla $k=7$, otrzymujemy $m=2^7=128$ i w konsekwencji $n=\mathbf{2^{128}}$.

172. Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$n^{2^{2017}}<2^n<n^{2^{2018}}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Przyjmijmy $n=2^k$. Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$2^{k\cdot 2^{2017}}<2^{2^k}<2^{k\cdot 2^{2018}},$$

czyli

$$k\cdot 2^{2017}<2^k<k\cdot 2^{2018}.$$

Zauważmy, że powyższe nierówności są prawdziwe dla $k=2028$, gdyż wtedy

$$k\cdot 2^{2017}=2028\cdot 2^{2017}<2048\cdot 2^{2017}=2^{11}\cdot 2^{2017}=2^{2028}=2^k$$

oraz

$$2^k=2^{2028}=2^{10}\cdot 2^{2018}=1024\cdot 2^{2018}<2028\cdot 2^{2018}=k\cdot 2^{2018}.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n=2^{2028}$.

Sposób II

Przyjmijmy $n=k\cdot 2^{2017}$. Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$\left(k\cdot 2^{2017}\right)^{2^{2017}}<2^{k\cdot 2^{2017}}<\left(k\cdot 2^{2017}\right)^{2^{2018}},$$

czyli

$$\left(k\cdot 2^{2017}\right)^{2^{2017}}<\left(2^k\right)^{2^{2017}}<\left(k^2\cdot 2^{4034}\right)^{2^{2017}},$$

co jest równoważne nierównościom

$$k\cdot 2^{2017}<2^k<k^2\cdot 2^{4034} \qquad (\heartsuit).$$

Zauważmy, że nierówności $(\heartsuit)$ są prawdziwe dla $k=2028$, gdyż wówczas

$$k\cdot 2^{2017}=2028\cdot 2^{2017}<2048\cdot 2^{2017}=2^{11}\cdot 2^{2017}=2^{2028}=2^k$$

oraz

$$2^k=2^{2028}=2^{20}\cdot 2^{2008}=1024^2\cdot 2^{2008}<2028^2\cdot 2^{2008}=k^2\cdot 2^{2008}<k^2\cdot 2^{4034}.$$

Ale nierówności $(\heartsuit)$ są też prawdziwe dla $k=4056$, gdyż wówczas

$$k\cdot 2^{2017}=4056\cdot 2^{2017}<4096\cdot 2^{2017}=2^{12}\cdot 2^{2017}=2^{2029}<2^{4056}=2^k$$

oraz

$$2^k = 2^{4056} = 2^{22} \cdot 2^{4034} = 2048^2 \cdot 2^{4034} < 4056^2 \cdot 2^{4034} = k^2 \cdot 2^{4034}\,.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n = 2028 \cdot 2^{2017}$. A innym przykładem jest $n = 4056 \cdot 2^{2017}$.

173*. Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$4^n < n^{2^{2017}} < 8^n\,.$$

Rozwiązanie:

Ślepa uliczka

Przyjmijmy $n = 2^k$. Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$4^{2^k} < 2^{k \cdot 2^{2017}} < 8^{2^k}\,,$$

czyli kolejno

$$2 \cdot 2^k < k \cdot 2^{2017} < 3 \cdot 2^k\,,$$

$$2 \cdot 2^{k-2017} < k < 3 \cdot 2^{k-2017}\,. \qquad (\heartsuit)$$

Jednak nie udaje się dobrać liczby naturalnej k, która spełniałaby nierówności ($\heartsuit$).

Rozwiązanie poprawne

Przyjmijmy $n = k \cdot 2^{2017}$. Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$4^{k \cdot 2^{2017}} < \left(k \cdot 2^{2017}\right)^{2^{2017}} < 8^{k \cdot 2^{2017}}\,,$$

czyli

$$\left(4^k\right)^{2^{2017}} < \left(k \cdot 2^{2017}\right)^{2^{2017}} < \left(8^k\right)^{2^{2017}}\,,$$

co jest równoważne kolejnym nierównościom

$$4^k < k \cdot 2^{2017} < 8^k\,,$$

$$2^{2k} < k \cdot 2^{2017} < 2^{3k}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Zauważmy, że nierówności ($\clubsuit$) są prawdziwe dla $k = 1000$, gdyż wówczas

$$2^{2k} = 2^{2000} < 1000 \cdot 2^{2017} < 2^{10} \cdot 2^{2017} = 2^{2027} < 2^{3000} = 2^{3k}\,.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n = 1000 \cdot 2^{2017}$.

Uwaga

Liczbę wymaganą w zadaniu otrzymamy także dla k spełniających nierówności

$$676 \leqslant k \leqslant 1013\,.$$

Zauważ, że wśród tych liczb nie ma potęgi dwójki!!!

174. Udowodnić nierówność

$$n^{n^{2^{1000}}} < 2^{2^n}$$

dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n>1$.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że $n=2^{2^k}$, gdzie k jest liczbą naturalną. Dana w zadaniu nierówność przyjmuje wówczas postać

$$\left(2^{2^k}\right)^{\left(2^{2^k}\right)^{2^{1000}}} < 2^{2^{2^{2^k}}},$$

co po uproszczeniu sprowadza się do

$$2^{2^{k+2^{k+1000}}} < 2^{2^{2^{2^k}}}. \tag{1}$$

Dwukrotne zlogarytmowanie przy podstawie 2 nierówności (1) prowadzi do nierówności równoważnej

$$k+2^{k+1000} < 2^{2^k}. \tag{2}$$

Zauważmy, że nierówność (2) jest spełniona dla $k=10$, gdyż wówczas mamy

$$L = 10+2^{1010} < 2^4+2^{1010} < 2^{1010}+2^{1010} = 2^{1011} < 2^{1024} = P.$$

Odpowiedź:

Przykładem liczby spełniającej warunki zadania jest $n=2^{2^{10}}=2^{1024}$.

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}}}}}}}$$

175. Niech $A_n=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n<2$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy indukcyjny dowód nierówności

$$A_n < 2.$$

1° Dla $n=1$ mamy $A_1=\sqrt{2}$, dowodzona nierówność przybiera więc postać

$$\sqrt{2} < 2,$$

jest zatem prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$A_n < 2. \tag{♣}$$

Wykażemy, że wówczas

$$A_{n+1} < 2. \tag{♢}$$

Zauważmy, że

$$A_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{A_n},$$

wobec czego po skorzystaniu z założenia indukcyjnego (♣) oraz z nierówności $a^x < a^y$ dla $a>1$ i $x<y$, otrzymujemy

$$A_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{A_n} < \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\,,$$

co kończy dowód nierówności (♢).

Na mocy zasady indukcji dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

176. Niech $A_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^3}}}}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n < 3$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy indukcyjny dowód nierówności

$$A_n < 3\,.$$

1° Dla $n=1$ mamy $A_1 = \sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, dowodzona nierówność przybiera więc postać

$$\sqrt{8} < 3 = \sqrt{9}\,,$$

jest zatem prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$A_n < 3\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas

$$A_{n+1} < 3\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Zauważmy, że

$$A_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{A_n}\,,$$

wobec czego po skorzystaniu z założenia indukcyjnego (♣) oraz z nierówności $a^x < a^y$ dla $a>1$ i $x<y$, otrzymujemy

$$A_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{A_n} < \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3\,,$$

co kończy dowód nierówności (♢).

Na mocy zasady indukcji dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

177. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt{n^2+1} - n - \frac{C}{n}\right| < \frac{D}{n^3}\,.$$

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy lewą stronę nierówności w postaci niezawierającej różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości:

$$\left|\sqrt{n^2+1}-n-\frac{C}{n}\right|=\left|\sqrt{n^2+1}-\left(n+\frac{C}{n}\right)\right|=\left|\frac{n^2+1-\left(n+\frac{C}{n}\right)^2}{\sqrt{n^2+1}+\left(n+\frac{C}{n}\right)}\right|=\left|\frac{1-2C-\frac{C^2}{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+\left(n+\frac{C}{n}\right)}\right|.$$

W liczniku ostatniego wyrażenia dominującymi składnikami są 1 oraz $2C$. Aby wyrażenie to miało możliwie mały rząd wielkości, dobieramy C tak, aby te dwa składniki się uprościły, czyli $C=1/2$. Przy tej wartości C wykonujemy szacowanie od góry:

$$\frac{\frac{1}{4n^2}}{\sqrt{n^2+1}+\left(n+\frac{1}{2n}\right)}=\frac{1}{4n^2\left(\sqrt{n^2+1}+n+\frac{1}{2n}\right)}<\frac{1}{4n^2\left(\sqrt{n^2+0}+n+0\right)}=\frac{1/8}{n^3},$$

co kończy rozwiązanie zadania z $D=1/8$.

Uwagi:

Stała C jest wyznaczona jednoznacznie. Każde rozwiązanie z $C\neq 1/2$ jest błędne.

Stała $D=1/8$ jest najmniejsza możliwa. Każde rozwiązanie z $D<1/8$ jest błędne.

178. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5}\leqslant D\,.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D\leqslant 6C$ (wersja łatwiejsza).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D\leqslant 4C$ (wersja trudniejsza).

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy dane w zadaniu wyrażenie w postaci niezawierającej w liczniku różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości:

$$\frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5}=\frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5}\cdot\frac{\sqrt{n^8+3n^6}+n^4}{\sqrt{n^8+3n^6}+n^4}=\frac{n^8+3n^6-n^8}{(7n^2-4n+5)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)}=$$

$$=\frac{3n^6}{(7n^2-4n+5)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)}$$

Przeprowadzamy szacowanie od góry:

$$\frac{3n^6}{(7n^2-4n+5)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)}\leqslant\frac{3n^6}{(7n^2-4n^2+0)\cdot\left(\sqrt{n^8+0}+n^4\right)}=\frac{3}{3\cdot 2}=\frac{1}{2}=D\,.$$

Przeprowadzamy szacowanie od dołu:

$$\frac{3n^6}{(7n^2-4n+5)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)}\geqslant\frac{3n^6}{(7n^2-0+5n^2)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^8}+n^4\right)}=\frac{3}{12\cdot 3}=\frac{1}{12}=C\,,$$

co daje zależność $D=6C$ wystarczającą do rozwiązania w wersji łatwiejszej.

Subtelniejsze szacowanie od dołu wykorzystuje nierówność $4(n-1)\geqslant 0$ zamiast $4n\geqslant 0$ i wygląda następująco:

$$\frac{3n^6}{(7n^2-4n+5)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)}=\frac{3n^6}{(7n^2-4(n-1)+1)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{3n^6}{(7n^2-0+n^2)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^8}+n^4\right)}=\frac{3}{8\cdot 3}=\frac{1}{8}=C\,,$$

co daje zależność $D=4C$ wystarczającą do rozwiązania w wersji trudniejszej.

179. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}\leqslant D\,.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D\leqslant 8C$ (wersja najłatwiejsza).
Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D\leqslant 4C$ (wersja średnio trudna).
Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D\leqslant 2C$ (wersja najtrudniejsza).

Rozwiązanie:

Przeprowadzamy szacowanie od góry:

$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}\leqslant\frac{6n^{11}-0+2n^{11}}{6n^{11}-3n^{11}+0}=\frac{8n^{11}}{3n^{11}}=\frac{8}{3}=D\,.$$

Przeprowadzamy szacowanie od dołu:

$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}\geqslant\frac{6n^{11}-3n^{11}+0}{6n^{11}-0+3n^{11}}=\frac{3n^{11}}{9n^{11}}=\frac{1}{3}=C\,,$$

co daje zależność $D=8C$ wystarczającą do rozwiązania wersji najłatwiejszej.

Subtelniejsze szacowania wykorzystują nierówności $-3n^6+2\leqslant -3+2=-1<0$ oraz $-3n^5+3\leqslant -3+3=0$ zamiast odpowiednio $-3n^6\leqslant 0$ oraz $-3n^5\leqslant 0$ i wyglądają następująco:

$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}=\frac{6n^{11}+(-3n^6+2)}{6n^{11}-3n^5+3}\leqslant\frac{6n^{11}-0}{6n^{11}-3n^{11}+0}=\frac{6n^{11}}{3n^{11}}=2=D\,,$$
$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}=\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}+(-3n^5+3)}\geqslant\frac{6n^{11}-3n^{11}+0}{6n^{11}-0}=\frac{3n^{11}}{6n^{11}}=\frac{1}{2}=C\,.$$

To daje zależność $D=4C$ wystarczającą do rozwiązania wersji średniej.

Można też zauważyć, że

$$6n^{11}-3n^6+2\leqslant 6n^{11}-3n^5+2<6n^{11}-3n^5+3\,,$$

skąd

$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}<1=D\,.$$

Zatem rozwiązanie wersji średniej można uzyskać także przy użyciu szacowań z $C=1/3$ oraz $D=1$.

Przedstawione wyżej szacowania z $C=1/2$ oraz $D=1$ składają się na rozwiązanie wersji najtrudniejszej.

180. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną k oraz liczby wymierne dodatnie C oraz D, a następnie udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$Cn^k \leqslant \sqrt{4n^2+1}+\sqrt{4n^2+2}+\sqrt{4n^2+3}+\sqrt{4n^2+4}+\ldots+\sqrt{16n^2-1}+\sqrt{16n^2} \leqslant Dn^k\,.$$

Trudność zadania zależy od uzyskanego przez Ciebie ilorazu D/C:
• Przy $D/C \geqslant 2$ zadanie jest najłatwiejsze.
• Przy $D/C < 3/2$ zadanie jest najtrudniejsze.

Rozwiązanie:

Dana w zadaniu suma ma $12n^2$ składników. Możemy zatem wykonać szacowania

$$24n^3 = 12n^2\cdot\sqrt{4n^2} \leqslant \sum_{i=4n^2+1}^{16n^2}\sqrt{i} \leqslant 12n^2\cdot\sqrt{16n^2} = 48n^3\,,$$

co kończy rozwiązanie w wersji najłatwiejszej.

Uzyskaliśmy tu liczby $k=3$, $C=24$, $D=48$ i iloraz $D/C=2$.

Bardziej subtelne szacowanie wymaga rozbicia wyjściowej sumy na dwie sumy

$$\sum_{i=4n^2+1}^{16n^2}\sqrt{i} \;=\; \sum_{i=4n^2+1}^{9n^2}\sqrt{i} \;+\; \sum_{i=9n^2+1}^{16n^2}\sqrt{i}\quad,$$

a następnie wykonania szacowania dla każdej z sum z osobna.

Otrzymujemy

$$10n^3 = 5n^2\cdot\sqrt{4n^2} \leqslant \sum_{i=4n^2+1}^{9n^2}\sqrt{i} \leqslant 5n^2\cdot\sqrt{9n^2} = 15n^3$$

oraz

$$21n^3 = 7n^2\cdot\sqrt{9n^2} \leqslant \sum_{i=9n^2+1}^{16n^2}\sqrt{i} \leqslant 7n^2\cdot\sqrt{16n^2} = 28n^3\,,$$

skąd po dodaniu

$$31n^3 \leqslant \sum_{i=4n^2+1}^{16n^2}\sqrt{i} \leqslant 43n^3\,.$$

To kończy rozwiązanie wersji najtrudniejszej.

Uzyskane liczby to $k=3$, $C=31$, $D=43$, a zatem $D/C=43/31<45/30=3/2$.

181. Dobrać odpowiednie liczby całkowite dodatnie s i t oraz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}-n^5\right)^s}{\left(\sqrt{n^8+3n^7}-n^4\right)^t} \leqslant 18C\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,.$$

Otrzymujemy

$$\frac{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}-n^5\right)^s}{\left(\sqrt{n^8+3n^7}-n^4\right)^t}=\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t\cdot(8n^7)^s}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s\cdot(3n^7)^t}=\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t\cdot 2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s\cdot 3^t\cdot n^{7t}}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t\cdot 2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s\cdot 3^t\cdot n^{7t}}\leqslant\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^8}+n^4\right)^t\cdot 2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+0}+n^5\right)^s\cdot 3^t\cdot n^{7t}}=\frac{(3n^4)^t\cdot 2^{3s}\cdot n^{7s}}{(2n^5)^s\cdot 3^t\cdot n^{7t}}=2^{2s}\cdot n^{2s-3t}$$

i od dołu

$$\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t\cdot 2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s\cdot 3^t\cdot n^{7t}}\geqslant\frac{\left(\sqrt{n^8+0}+n^4\right)^t\cdot 2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^{10}}+n^5\right)^s\cdot 3^t\cdot n^{7t}}=\frac{(2n^4)^t\cdot 2^{3s}\cdot n^{7s}}{(4n^5)^s\cdot 3^t\cdot n^{7t}}=\frac{2^{s+t}\cdot n^{2s-3t}}{3^t}.$$

Ponieważ oszacowania mają być niezależne od n, musi być $2s-3t=0$, wobec czego przyjmujemy $s=3$ i $t=2$. Wówczas dolne oszacowanie przybiera wartość $C=32/9$, a górne $64=18C$.

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi $s=3$, $t=2$ oraz $C=32/9$.

W każdym z poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 5 ,10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, $10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

182. $10^{100}\ <2^{500}<\ 10^{200}$

183. $10^{500}\ <3^{2000}<\ 10^{1000}$

184. $10^{2000}\ <2^{10000}<\ 10^{5000}$

185. $10^{10000}\ <30^{10000}<\ 10^{20000}$

186. $10^{200}\ <2^{2^{10}}<\ 10^{500}$

187. $10^{10000}\ <4444^{4444}<\ 10^{20000}$

188. $10^{20000}\ <7777^{7777}<\ 10^{50000}$

189. $10^{5000}\ <2011^{2011}<\ 10^{10000}$

190. $10^{10000}\ <222^{5555}<\ 10^{20000}$

191. $10^{500}\ <5555^{222}<\ 10^{1000}$

192. $10^{500}\ <333^{333}<\ 10^{1000}$

193. $10^{20000} < 10000! < 10^{50000}$

194. $10^{1000} < 666! < 10^{2000}$

195. $10^{10000} < 5000! < 10^{20000}$

196. $10^{100000} < 35000! < 10^{200000}$

197. $10^{200000} < \left(10^5\right)! < 10^{500000}$

198. $10^{200} < \left(7+2\sqrt{2}\right)^{500} < 10^{500}$

199. $10^{500} < \left(6+3\sqrt{2}\right)^{500} < 10^{1000}$

200. $10^{200} < \left(91+\sqrt{91}\right)^{100} < 10^{500}$

201. $10^5 < \binom{1000}{3} < 10^{10}$

202. $10^{10} < \binom{1000}{4} < 10^{20}$

203. $10^{10} < \binom{10000}{5} < 10^{20}$

204. $10^{200} < \binom{10^5}{100} < 10^{500}$

205. $10^{100} < \binom{10^{10}}{20} < 10^{200}$

206. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt{9n^2+40n}-\sqrt{9n^2+16n} \leqslant 2C\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

prawdziwy w przypadku $a+b\neq 0$, otrzymujemy

$$\sqrt{9n^2+40n}-\sqrt{9n^2+16n}=\frac{24n}{\sqrt{9n^2+40n}+\sqrt{9n^2+16n}}=\frac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}}\,.$$

Szacowanie od dołu (mianownika od góry, czyli n od dołu przez 1) prowadzi do:

$$\frac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}}\geqslant\frac{24}{\sqrt{9+40}+\sqrt{9+16}}=\frac{24}{7+5}=2=C\,.$$

Szacowanie od góry (mianownika od dołu, czyli $1/n$ przez 0) prowadzi do:

$$\frac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}}\leqslant\frac{24}{\sqrt{9+0}+\sqrt{9+0}}=\frac{24}{3+3}=4=2C\,.$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C=2$.

Uwaga:

Nietrudno zauważyć, że ciąg $\left(\dfrac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}}\right)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący, jego pierwszy wyraz jest równy 2, a granica[3] 4. Wynika stąd, że uzyskane przez nas oszacowania są optymalne, w związku z czym w każdym poprawnym rozwiązaniu musi być $C=2$.

207. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt[3]{n^3+63n^2}-n \leqslant 7C\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}\,.$$

Otrzymujemy

$$\sqrt[3]{n^3+63n^2}-n=\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2}\,.$$

[3]Tu i wszędzie dalej, gdzie pojawia się granica ciągu: Jeśli nie wiesz, co to jest, odłóż czytanie tych fragmentów na później.

Dalszą część rozwiązania można przeprowadzić dwoma sposobami.

Sposób I

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2}\geqslant\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^3}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^3}+n^2}=$$

$$=\frac{63n^2}{16n^2+4n^2+n^2}=\frac{63n^2}{21n^2}=3$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2}\leqslant\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+0}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+0}+n^2}=\frac{63n^2}{3n^2}=21=7\cdot 3\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=3$.

Sposób II

Oznaczamy uzyskane wyrażenie przez a_n i przepisujemy je w postaci

$$a_n=\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2}=\frac{63}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{63}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{63}{n}}+1}\,.$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem n, ciąg (a_n) jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_1\leqslant a_n\leqslant\lim_{n\to\infty}a_n\,.$$

Ponieważ $a_1=3$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=21$, otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C=3$.

208. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\sqrt[8]{n^8+255n^7}-n\leqslant 32C\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, powinniśmy przez wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia doprowadzić je do postaci, w której można będzie wykonać odejmowanie.

W tym celu trzykrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera.

Możemy też od razu zastosować wzór na różnicę ósmych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)}\,,$$

który powstaje właśnie przez trzykrotne skorzystanie ze wzoru na różnicę kwadratów.

Otrzymujemy

$$\sqrt[8]{n^8+255n^7}-n=\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^8}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^8}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^8}+n^4\right)}=$$

$$=\frac{255n^7}{17n\cdot 5n^2\cdot 3n^4}=\frac{255n^7}{255n^7}=1$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+0}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+0}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+0}+n^4\right)}=$$

$$=\frac{255n^7}{2n\cdot 2n^2\cdot 2n^4}=\frac{255n^7}{8n^7}=\frac{255}{8}<\frac{256}{8}=32\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=1$.

Sposób II:

Zaczynamy jak w sposobie I. Otrzymawszy wyrażenie $(\diamondsuit)$ przekształcamy je dalej i oznaczamy przez a_n:

$$\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}=$$

$$=\frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+255n^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+255n^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+255n^{-1}}+1\right)}=a_n\,.$$

Ponieważ w powyższym wyrażeniu wraz ze wzrostem n maleje mianownik, a przy tym wszystkie składowe tego wyrażenia są dodatnie, ciąg (a_n) jest rosnący. Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą więc nierówności

$$a_1\leqslant a_n<\lim_{k\to\infty}a_k\,. \qquad (\clubsuit)$$

Ponieważ

$$a_1=\sqrt[8]{1+255}-1=2-1=1$$

oraz

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+255k^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+255k^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+255k^{-1}}+1\right)}=$$

$$=\frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+0}+1\right)}=\frac{255}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{255}{8}<\frac{256}{8}=32\,,$$

otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C=1$.

Uwaga:
Formalnie poprawna, ale dydaktycznie bardzo niezręczna wersja nierówności (♣), to

$$a_1 \leqslant a_n < \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

W powyższym wzorze zmienna n występuje w dwóch zupełnie różnych rolach. Przemianowanie jednego z jej bytów na k pozwala uniknąć nieporozumień.

209. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{C}{n} \leqslant \sqrt[4]{n^4+15n^2}-n \leqslant \frac{4C}{n}\,.$$

Rozwiązanie:
Stosując wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)\cdot(a+b)}$$

otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^4+15n^2}-n=\frac{15n^2}{\left(\sqrt{n^4+15n^2}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+15n^2}+n\right)}=\frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)}$$

Szacowanie od dołu (mianownika od góry) prowadzi do:

$$\frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)} \geqslant \frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+15}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+15}+1\right)}=\frac{1}{n}\,.$$

Szacowanie od góry (mianownika od dołu) prowadzi do:

$$\frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)} \leqslant \frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+0}+1\right)}=\frac{15}{4n}<\frac{16}{4n}=\frac{4}{n}\,.$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C=1$.

210. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{25n^2+11}-5n}{\sqrt[4]{n^4+80n^2}-n} \leqslant 11C\,.$$

Rozwiązanie:
Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy w liczniku wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

a w mianowniku następujący wzór na różnicę czwartych potęg:

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}\,.$$

Otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{25n^2+11}-5n}{\sqrt[4]{n^4+80n^2}-n}=\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^2}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11}+5n\right)\cdot 80n^2}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^2}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11}+5n\right)\cdot 80n^2}\leqslant\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^4}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^4}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+0}+5n\right)\cdot 80n^2}=$$

$$=\frac{11\cdot 4n\cdot 10n^2}{10n\cdot 80n^2}=\frac{11}{20}$$

i od dołu

$$\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^2}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11}+5n\right)\cdot 80n^2}\geqslant\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+0}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+0}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11n^2}+5n\right)\cdot 80n^2}=$$

$$=\frac{11\cdot 2n\cdot 2n^2}{11n\cdot 80n^2}=\frac{1}{20}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=1/20$.

211. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\sqrt{25n^2+24}-5n}{\sqrt{9n^2+40}-3n}\leqslant 2C\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,.$$

Otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{25n^2+24}-5n}{\sqrt{9n^2+40}-3n}=\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24}+5n\right)}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24}+5n\right)}\leqslant\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40n^2}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+0}+5n\right)}=\frac{24\cdot(7n+3n)}{40\cdot(5n+5n)}=\frac{24\cdot 10n}{40\cdot 10n}=\frac{3}{5}$$

i od dołu

$$\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24}+5n\right)}\geqslant\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+0}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24n^2}+5n\right)}=\frac{24\cdot(3n+3n)}{40\cdot(7n+5n)}=\frac{24\cdot 6n}{40\cdot 12n}=\frac{3}{10}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=3/10$.

212. Na potrzeby tego zadania liczbę nazwiemy ładną, jeśli ma jednocyfrowy licznik i jednocyfrowy mianownik.

Dla odpowiednio dobranych **ładnych** liczb wymiernych dodatnich C i D spełniających nierówność $D<3C$ udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\sqrt[3]{n^3+7}-n}{\sqrt{4n^4+5}-2n^2}\leqslant D\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując do licznika wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}\,,$$

a do mianownika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

otrzymujemy

$$\frac{\sqrt[3]{n^3+7}-n}{\sqrt{4n^4+5}-2n^2}=\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+7)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7}+n^2\right)\cdot 5}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując licznik od dołu i mianownik od góry:

$$\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+7)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7}+n^2\right)\cdot 5}\geqslant\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+0}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+7n^3)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7n^3}+n^2\right)\cdot 5}=\frac{4}{5}\,.$$

Następnie szacujemy od góry, szacując licznik od góry i mianownik od dołu:

$$\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+7)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7}+n^2\right)\cdot 5}\leqslant\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5n^4}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+0)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+0}+n^2\right)\cdot 5}=\frac{7}{3}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi

$$C=\mathbf{\frac{4}{5}}\qquad\text{i}\qquad D=\mathbf{\frac{7}{3}}=\frac{35}{15}<\frac{36}{15}=\frac{12}{5}=3C\,.$$

213. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\sqrt{36n+28}-\sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75}-\sqrt{25n+11}}\leqslant 2C\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

prawdziwy w przypadku $a+b\neq 0$, otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{36n+28}-\sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75}-\sqrt{25n+11}}=\frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+75}+\sqrt{25n+11}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+28}+\sqrt{36n+13}\right)}\,.\tag{3}$$

Szacowanie od dołu (licznika od dołu i mianownika od góry) prowadzi do:

$$\frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+75}+\sqrt{25n+11}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+28}+\sqrt{36n+13}\right)}\geqslant\frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+0}+\sqrt{25n+0}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+28n}+\sqrt{36n+13n}\right)}=$$
$$=\frac{15\cdot 10\cdot\sqrt{n}}{64\cdot\left(\sqrt{64n}+\sqrt{49n}\right)}=\frac{150\cdot\sqrt{n}}{64\cdot 15\cdot\sqrt{n}}=\frac{5}{32}=C\,. \tag{4}$$

Szacowanie od góry (licznika od góry i mianownika od dołu) prowadzi do:

$$\frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+75}+\sqrt{25n+11}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+28}+\sqrt{36n+13}\right)}\leqslant\frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+75n}+\sqrt{25n+11n}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+0}+\sqrt{36n+0}\right)}=$$
$$=\frac{15\cdot\left(\sqrt{100n}+\sqrt{36n}\right)}{64\cdot 12\cdot\sqrt{n}}=\frac{15\cdot 16\cdot\sqrt{n}}{64\cdot 12\cdot\sqrt{n}}=\frac{5}{16}=2C\,. \tag{5}$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C=5/32$.

214. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k\leqslant\frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1}\leqslant 4C\cdot n^k\,.$$

Rozwiązanie:

Szacujemy dane w treści zadania wyrażenie od góry (szacujemy licznik od góry, a mianownik od dołu, upodabniając wszystkie składniki do składnika dominującego; następnie szacujemy współczynniki pod pierwiastkami tak, aby przy pierwiastkowaniu uzyskać liczby całkowite):

$$\frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1}<\frac{\sqrt{40n-0}+3n^{1/2}}{\sqrt[3]{40n+0}-n^{1/3}}<\frac{\sqrt{49n}+3n^{1/2}}{\sqrt[3]{27n}-n^{1/3}}=\frac{10n^{1/2}}{2n^{1/3}}=5n^{1/6}\,.$$

Analogiczne szacowanie od dołu (licznik od dołu, mianownik od góry) prowadzi do:

$$\frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1}>\frac{\sqrt{40n-11n}+0}{\sqrt[3]{40n+11n}-0}=\frac{\sqrt{29n}}{\sqrt[3]{51n}}>\frac{\sqrt{25n}}{\sqrt[3]{64n}}=\frac{5n^{1/2}}{4n^{1/3}}=\frac{5n^{1/6}}{4}\,.$$

Udowodniliśmy więc żądane nierówności ze stałymi $C=5/4$ i $k=1/6$.

Uwagi:

Liczba $k=1/6$ jest wyznaczona jednoznacznie. Każde rozwiązanie, w którym występuje inna wartość k, jest błędne.

Stała C wynika po części z natury szacowanego wyrażenia, a po części z przyjętej przez nas metody szacowania. Przy innej strategii szacowania można sobie wyobrazić poprawne rozwiązanie z inną stałą C.

W powyższym rozwiązaniu występują ostre nierówności, podczas gdy w treści zadania nierówności są słabe. To dlatego, że celem zadania jest uzyskanie zasadniczego oszacowania, a nie śledzenie, które nierówności są słabe, a które ostre – stąd słabe nierówności w tezie zadania, pomimo że łatwo można uzyskać ostre. Przy tak sformułowanej treści zadania, w przedstawionym wyżej rozwiązaniu można więc zamienić nierówności ostre na słabe (wszystkie lub niektóre z nich).