Kolokwium nr 3: środa 18.11.2026, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 0–362.

Zadania do omówienia[1] na ćwiczeniach[2] w piątek 30.10.2026, poniedziałek 2.11.2026, piątek 6,11.2026, poniedziałek 9.11.2026 i poniedziałek 16.11.2026.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Ciągi liczbowe, granica.

W pierwszej kolejności należy omówić zadania z wykrzyknikiem.

Dla podanego wyrażenia $W(n)$ dobierz odpowiednie stałe g oraz C i udowodnij, że nierówności $g-C/n<W(n)<g+C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

215. $\dfrac{n^5+n^4+1}{2n^5+n^3+5}$ **216.** $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ **217!** $\dfrac{\sqrt{4n^4+1}}{n^2+1}$ **218.** $\sqrt{n^2+4n}-n$

219! $\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\dfrac{n}{n^2+3}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}$

Dla podanego wyrażenia $W(n,k)$ dobierz odpowiednią wartość parametru k i odpowiednie stałe dodatnie g oraz C i udowodnij, że nierówności $g-C/n<W(n,k)<g+C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

220! $\dfrac{\sqrt{n^k+1}}{n^6+n^5}$ **221!** $\dfrac{\sqrt{n^6+n^5}}{n^k+1}$ **222!** $\sqrt{n^8+n^k}-n^4$ **223!** $\sqrt{n^4+n^3}-n^2-kn$

224! Ciąg o wyrazach całkowitych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy .....

225! Dla których liczb naturalnych $k\geqslant 2$ ze zbieżności ciągu $\left(a_n^k\right)$ wynika zbieżność ciągu (a_n)?

226! Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^6+n^5+1}-n^3}{\sqrt[4]{n^6+n^5+1}-n^2}.$$

227. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^{16}+n^3}-n^8\right)^3}{\left(\sqrt{n^{16}+n^5}-n^8\right)^5}.$$

228. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^{18}+n^7}-n^6\right)^2}{\left(\sqrt{n^{18}+n^7}-n^9\right)^5}.$$

[1] Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

[2] Ciągi ok. 4 godzin, 3 ciągi ok. 2-3 godzin i kresy ok. 3-4 godzin.

229. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{12}+n}-n^6}{\left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k, aby granica ta była dodatnia i skończona.

230! Wskaż liczbę naturalną k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{14}+9n^9+1}-n^7}{n^k}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

231. Wskaż liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt{n^{666}+1}-n^{333}\right)\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

232. Wskaż liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}-n^{222}\right)\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

233! Wskaż liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^{666}+n^k}-n^{222}\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

234! Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+6n^3}-n^2-3n\right).$$

235! Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^{24}+n^{11}}-n^6}{\left(\sqrt{n^{24}+n^{11}}-n^{12}\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k, aby granica ta była dodatnia i skończona.

236! Wskaż liczbę rzeczywistą k, dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k. Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{n}{3}\right)=$ ..... dla $k=$ .....

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{n+4}{n}\right)=$ ..... dla $k=$ .....

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n}{4}\right)=$ ..... dla $k=$ .....

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n+2}{5}\right)=$ ..... dla $k=$ .....

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n+2020}{6}\right)=$ ..... dla $k=$ .....

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{n}{2}}{2}\right)=$ ..... dla $k=$ .....

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{2}}{2}\right)=$ ..... dla $k=$ .....

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{n}{2}}{3}\right)=$ ..... dla $k=$ .....

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{2}}{3}\right)=$ ..... dla $k=$ .....

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{n}{3}}{2}\right)=$ ..... dla $k=$ .....

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{2}}{4}\right)=$ ..... dla $k=$ .....

l) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{4}}{3}\right)=$ ..... dla $k=$ .....

237! Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall_{n>1000} \; |a_n - 100| < 10 \,.$$

Czy stąd wynika, że
a) ciąg (a_n) jest zbieżny,
b) ciąg (a_n) jest rozbieżny,
c) każdy wyraz ciągu (a_n) jest dodatni,
d) ciąg (a_n) ma co najmniej jeden wyraz dodatni,
e) od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,
f) $a_{666} < 7777777$,
g) $a_{1111} > 88$,
h) $\forall_{n>1729} \; |a_n - 100| < 1$,
i) $\forall_{n>345} \; |a_n - 100| < 17$,
j) $\forall_{n>5555} \; |a_n - 99| < 13$,
k) ciąg (a_n) jest ograniczony,
l) $\exists_{n>444} \; |a_n - 95| < 37$,
m) $\exists_{n>4444} \; |a_n - 80| < 37$,
n) $\exists_{n<444} \; |a_n - 95| < 37$,
o) $\exists_{n<4444} \; |a_n - 80| < 37$,
p) $\forall_m \exists_{n>m} \; a_n > 0$,
q) $\forall_{n>1331} \; |a_n - 66| > 12$,
r) $\forall_{m>1234} \forall_{n>5678} \; |a_n - a_m| < 7$,
s) $\forall_{m>1234} \forall_{n>5678} \; |a_n - a_m| < 17$,
t) $\forall_{m>123} \forall_{n>45678} \; |a_n - a_m| < 27$,
u) $\forall_{m>1234} \forall_{n>5678} \; |a_n - a_m| < 37$,
v) $\exists_{m<123} \exists_{n<456} \; |a_n - a_m| < 3$,
w) $\forall_{m>12345} \forall_{n>67890} \; |a_n + a_m| < 210$,
x) $\forall_{m>1296} \forall_{n>7776} \; |a_n + a_m| < 222$,
y) $\forall_{m>1024} \forall_{n>8192} \; |a_n + a_m| > 128$,
z) $\exists_n \; a_n < 92$,
ź) $\exists_n \; a_n > 91$,
ż) $\exists_m \exists_{n\neq m} \; |a_n - a_m| < 10^{-1000000}$.

238! Dany jest taki ciąg (a_n), że

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \forall_{n\geqslant 5/\varepsilon} |a_n - 7| < \varepsilon \;.$$

Podaj granicę ciągu (a_n).

Wskaż taką liczbę M, że $\forall\limits_{n} |a_n| < M$.
Wskaż taką liczbę N, że $\forall\limits_{n\geqslant N} a_n > 6$.
Wskaż taką liczbę N, że $\forall\limits_{n\geqslant N} a_n < 7{,}01$.
Wskaż taką liczbę N, że $\forall\limits_{n\geqslant N} |a_n - 8| > 1/3$.

239! Dany jest taki ciąg (b_n), że

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \forall_{n\geqslant 10/\varepsilon} |b_n + 2| < \varepsilon \ .$$

Podaj granicę ciągu (b_n).
Wskaż taką liczbę M, że $\forall\limits_{n} |b_n| < M$.
Wskaż taką liczbę N, że $\forall\limits_{n\geqslant N} b_n < 0$.
Wskaż taką liczbę N, że $\forall\limits_{n\geqslant N} b_n > -3$.
Wskaż taką liczbę N, że $\forall\limits_{n\geqslant N} |b_n - 2| > 1/10$.

240! Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall_{\varepsilon\geqslant 1} \ \exists_{N} \ \forall_{n\geqslant N} \ |a_n - 1| \leqslant \varepsilon \ .$$

Czy stąd wynika, że

240.1 ciąg (a_n) jest zbieżny .....
240.2 ciąg (a_n) jest rozbieżny .....
240.3 ciąg (a_n) jest ograniczony .....
240.4 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie .....
240.5 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne .....
240.6 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie .....
240.7 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne .....
240.8 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów dodatnich .....
240.9 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów nieujemnych .....
240.10 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz dodatni .....
240.11 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz nieujemny .....
240.12 $\forall\limits_{n} a_n > 0$ .....
240.13 $\forall\limits_{n} a_n \geqslant 0$ .....
240.14 $\exists\limits_{N} \forall\limits_{n\geqslant N} a_n > 0$ .....
240.15 $\exists\limits_{N} \forall\limits_{n\geqslant N} a_n \geqslant 0$ .....
240.16 $\forall\limits_{N} \exists\limits_{n\geqslant N} a_n > 0$ .....
240.17 $\forall\limits_{N} \exists\limits_{n\geqslant N} a_n \geqslant 0$ .....
240.18 $\exists\limits_{n} a_n > 0$ .....
240.19 $\exists\limits_{n} a_n \geqslant 0$ .....

241. W każdym[3] z zadań **241.1–241.11** podaj granicę (lub granicę niewłaściwą) ciągu. Liczby wymierne podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

241.1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+64^n}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

241.2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

241.3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+64^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

241.4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}{1+64+4096+\ldots+64^k+\ldots+64^n}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

241.5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}{1+64+4096+\ldots+64^k+\ldots+64^n}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

241.6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+3+9+27+\ldots+3^k+\ldots+9^n}{1+9+81+729+\ldots+9^k+\ldots+9^n}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

241.7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+5+25+125+\ldots+5^k+\ldots+25^n}{1+25+625+\ldots+25^k+\ldots+25^n}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

241.8. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+3+9+27+\ldots+3^k+\ldots+27^n}{1+27+729+\ldots+27^k+\ldots+27^n}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

241.9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+5+25+125+\ldots+5^k+\ldots+125^n}{1+125+15625+\ldots+125^k+\ldots+125^n}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

241.10. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+16^n}{1+16+256+\ldots+16^k+\ldots+16^n}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

241.11. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+3+9+27+\ldots+3^k+\ldots+81^n}{1+81+6561+\ldots+81^k+\ldots+81^n}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

PRAWDA CZY FAŁSZ?

242! Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne, to ciąg (a_n+b_n) jest rozbieżny.

243! Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg (a_n+b_n) jest rozbieżny.

244! Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg (a_nb_n) jest rozbieżny.

245! Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, ciąg (b_n) rozbieżny, a ponadto obydwa ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg (a_nb_n) jest rozbieżny.

246! Jeżeli (a_n) jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.

247! Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy dodanie jak i ujemne, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

248! Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy mniejsze od 1 jak i większe od 3, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

[3]Nie ma sensu rozwiązywać wszystkich 11 zadań, jeśli w którymś momencie uznasz, że już umiesz rozwiązywać tego typu zadania.

Obliczanie granic ciągów – podstawowe fakty.

1. Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

2. Granica sumy jest sumą granic.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_n+b_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n\ .$$

3. Granica różnicy jest różnicą granic.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_n-b_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n\ .$$

4. Granica iloczynu jest iloczynem granic.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_nb_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n\ .$$

5. Granica ilorazu jest ilorazem granic.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $b_n\neq 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, to ciąg $(\frac{a_n}{b_n})$ jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\ .$$

6. Zbieżność i granica nie zależą od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów ciągu.

7. Słabe nierówności zachowują się przy przejściu do granicy.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym dla każdego n zachodzi nierówność $a_n\leqslant b_n$ (odpowiednio $a_n\geqslant b_n$), to $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ (odpowiednio $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$).

8. Kilka podstawowych granic.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$
$\lim\limits_{n\to\infty}a=a$
$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ dla $|a|<1$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ dla $a>0$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

9. Z granicą można wchodzić pod pierwiastek.

Dokładniej, jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, przy czym $a_n\geqslant 0$, to dla $k\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{\lim_{n\to\infty}a_n}\ .$$

Dla nieparzystych k warunek $a_n\geqslant 0$ można pominąć.

Twierdzenie o trzech ciągach.

249. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^3}+\frac{n}{n^3+1}+\frac{n}{n^3+2}+\frac{n}{n^3+3}+\frac{n}{n^3+4}+\frac{n}{n^3+5}+\frac{n}{n^3+6}+\ldots+\frac{n}{(n+1)^3}\right).$$

250. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^5+1}{\sqrt{18n^{18}+1}}+\frac{5n^5+2}{\sqrt{18n^{18}+2}}+\frac{5n^5+3}{\sqrt{18n^{18}+3}}+\frac{5n^5+4}{\sqrt{18n^{18}+4}}+\ldots+\frac{5n^5+4n^4}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}}\right).$$

251! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7-1}}+\frac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{49n^7+1}}+\frac{\sqrt{n^3+3}}{\sqrt{49n^7-1}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^3+k}}{\sqrt{49n^7+(-1)^k}}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}}\right).$$

252. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{n^2+1}{\sqrt{(n^2+1)^3+1}}+\frac{n^2+2}{\sqrt{(n^2+2)^3+1}}+\frac{n^2+3}{\sqrt{(n^2+3)^3+1}}+\frac{n^2+4}{\sqrt{(n^2+4)^3+1}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}}+\ldots+\frac{(n+3)^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}}\right).$$

253. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}}+\frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2}}+\frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{(n^2+n)^2+2n^2}}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{\sqrt{(n^2+n)^2+3n^2}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+4)^2-4}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-2n^2}}+\frac{\sqrt{(n+4)^2-2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-n^2}}+\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}}\right).$$

254! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+1}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+2}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+3}-n^2}+\ldots\right.$$
$$\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+k}-n^2}+\ldots$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-2}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-1}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n}-n^2}\right).$$

255! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2+4}+\sqrt[3]{n^2+8}+\sqrt[3]{n^2+12}+\sqrt[3]{n^2+16}+\sqrt[3]{n^2+20}+\ldots+\sqrt[3]{(n+2)^2}}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2+3}+\sqrt[3]{n^2+6}+\sqrt[3]{n^2+9}+\sqrt[3]{n^2+12}+\sqrt[3]{n^2+15}+\ldots+\sqrt[3]{(n+3)^2}}.$$

256! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^7+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^7+4}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+3}}{n^7+9}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+4}}{n^7+16}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+5}}{n^7+25}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^3}}{n^7+n^6}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

257! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^p+1}{\sqrt{900n^{900}+1}}+\frac{n^p+8}{\sqrt{900n^{900}+32}}+\ldots+\frac{n^p+k^3}{\sqrt{900n^{900}+k^5}}+\ldots+\frac{n^p+8n^{18}}{\sqrt{900n^{900}+32n^{30}}}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru p, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

258. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+4}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+3}}{n^{13}+9}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+4}}{n^{13}+16}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}+n^8}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

259. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+2}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+3}}{n^{13}+3}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+4}}{n^{13}+4}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^{13}+n^5}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

260! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^k+n^4}+\frac{n^4+1}{n^k+n^4+1}+\frac{n^4+2}{n^k+n^4+2}+\frac{n^4+3}{n^k+n^4+3}+\frac{n^4+4}{n^k+n^4+4}+\ldots+\frac{(n+1)^4}{n^k+(n+1)^4}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

261! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{n^3}\frac{\sqrt{n^p+k}}{n^7+k^2}$$

dobierając tak wartość parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

262! a) Dobrać takie liczby całkowite $A>0$ i $B>1$, aby zadanie **b)** miało sens.

b) Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2}+\frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+1)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+4}+\frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+1)^2+6}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-4}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla A i B dobranych w zadaniu **a)**.

263. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+3)^2}+\frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+3)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+3)^2+4}+\frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+3)^2+6}+\frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+3)^2+8}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-6}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-4}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>3$, aby zadanie miało sens.

264! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+B)^2}+\frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+B)^2+1}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+B)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+B)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+12}}{(n+B)^2+4}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+B)^2+k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-9}}{(n+6)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+6)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+6)^2-1}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+6)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B<6$, aby zadanie miało sens.

265! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2}}+\frac{n^2+5}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+2}}+\frac{n^2+10}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+4}}+\frac{n^2+15}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+6}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{n^2+5k}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+2k}}+\ldots+\frac{(n+10)^2-10}{n^2\cdot\sqrt{(n+B)^2-4}}+\frac{(n+10)^2-5}{n^2\cdot\sqrt{(n+B)^2-2}}+\frac{(n+10)^2}{n^2\cdot\sqrt{(n+B)^2}}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych dodatnich $A<B$, aby zadanie miało sens.

266. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2}+\frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+1)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+1)^2+6}+\frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+1)^2+9}+\frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+1)^2+12}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-9}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-6}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>1$, aby zadanie miało sens.

267. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+2)^2}+\frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+2)^2+1}+\frac{\sqrt{n^2+4}}{(n+2)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+2)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+8}}{(n+2)^2+4}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-4}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-2}}{(n+B)^2-1}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>2$, aby zadanie miało sens.

268. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+A)^2}+\frac{\sqrt{n^2+7}}{(n+A)^2+1}+\frac{\sqrt{n^2+14}}{(n+A)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+21}}{(n+A)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+28}}{(n+A)^2+4}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+7)^2-21}}{(n+B)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+7)^2-14}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+7)^2-7}}{(n+B)^2-1}+\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A<B$, aby zadanie miało sens.

269! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+n+2}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+n+3}}+\ldots+\frac{9n}{\sqrt{n^4+9n}}\right).$$

270! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{\sqrt{4n^4+4n}}+\frac{4n+3}{\sqrt{4n^4+4n+3}}+\frac{4n+6}{\sqrt{4n^4+4n+6}}+\frac{4n+9}{\sqrt{4n^4+4n+9}}+\frac{4n+12}{\sqrt{4n^4+4n+12}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{13n-9}{\sqrt{4n^4+13n-9}}+\frac{13n-6}{\sqrt{4n^4+13n-6}}+\frac{13n-3}{\sqrt{4n^4+13n-3}}+\frac{13n}{\sqrt{4n^4+13n}}\right).$$

271! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{3^n+1}+\frac{3^{n-1}\cdot 2}{3^n+2}+\frac{3^{n-2}\cdot 4}{3^n+4}+\frac{3^{n-3}\cdot 8}{3^n+8}+\ldots+\frac{9\cdot 2^{n-2}}{3^n+2^{n-2}}+\frac{3\cdot 2^{n-1}}{3^n+2^{n-1}}+\frac{2^n}{3^n+2^n}\right).$$

272! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1}\cdot 7}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2}\cdot 7^2}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k}\cdot 7^k}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}\right).$$

273! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{(n+2)^2}{\sqrt{n^6+2}}+\frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+3}}+\ldots+\frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}}+\ldots+\frac{(2n-1)^2}{\sqrt{n^6+n-1}}+\frac{(2n)^2}{\sqrt{n^6+n}}\right).$$

Wskazówka-przypomnienie: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

274! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+1}}+\frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3}}+\frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+9}}+\frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+27}}+\ldots+\frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^{n-1}}}+\frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}}\right).$$

275! Obliczyć granicę ciągu zaczynającego się od wyrazu o indeksie 7:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k+7}}+\frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k+8}}+\frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k+9}}+\frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k+10}}+\ldots+\frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k+n-1}}+\frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}}\right)$$

dla tak dobranej wartości naturalnej parametru k, aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Kresy zbiorów.

Rozumienie i analizowanie wybranych napisów matematycznych.

Zapisz podany zbiór używając przedziałów, zbioru liczb wymiernych oraz działań na zbiorach. $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ jest zbiorem liczb naturalnych.

276. $\left\{x^2 : x\in(-2,1]\right\}$

277. $\left\{x^3 : x\in(-2,1]\right\}$

278. $\left\{x^2+y^3 : x,y\in(-2,1]\right\}$

279. $\left\{x^3+y^4 : x,y\in(-2,1]\right\}$

280. $\{xy : x,y\in(-2,1]\}$

281. $\left\{xy^2 : x,y\in(-2,1]\right\}$

282. $\left\{\sqrt{(x-5)^2} : x\in(2,7]\right\}$

283. $\left\{\sqrt[3]{(x-5)^3} : x\in(2,7]\right\}$

284. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge m^2\geqslant 2n^2\right\}$

285. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge m^2\geqslant 4n^2\right\}$

286. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge m^3\leqslant 5n^3\right\}$

287. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge m^3\leqslant 8n^3\right\}$

288. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8n^2\leqslant m^2\leqslant 9n^2\right\}$

289. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8n^3\leqslant m^3\leqslant 9n^3\right\}$

290. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 3^n\leqslant 2^m\leqslant 4^n\right\}$

291. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8^n\leqslant 4^m\leqslant 9^n\right\}$

W każdym[4] z poniższych zadań podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być podane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty=\infty$.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

292. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-60} : n\in\mathbb{N}\right\}$

293. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-70} : n\in\mathbb{N}\right\}$

294. $Z=\left\{\sqrt{25n^2+24n}-5n : n\in\mathbb{N}\right\}$

295. $Z=\left\{\sqrt{25n^2-24n}-5n : n\in\mathbb{N}\right\}$

296. $Z=\left\{\sqrt{25n^2+24n}+\sqrt{25n^2-24n}-10n : n\in\mathbb{N}\right\}$

[4]Nie ma sensu rozwiązywać wszystkich zadań, możesz pominąć zadania podobne do wcześniejszych.

297. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 16n^2\leqslant 9m^2\leqslant 25n^2\right\}$

298. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 16n^2\leqslant 2m^2\leqslant 32n^2\right\}$

299. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 3n^2\leqslant m^2\leqslant 4n^2\right\}$

300. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4m^2\leqslant n^2\leqslant 5m^2\right\}$

301. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 3^n\leqslant 2^m\leqslant 4^n\right\}$

302. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4^m\leqslant 2^n\leqslant 5^m\right\}$

303. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 9^{n^2}\leqslant 3^{m^2}\leqslant 27^{n^2}\right\}$

304. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 16^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 32^{n^2}\right\}$

305. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 16^{n^2}\leqslant 9^{m^2}\leqslant 25^{n^2}\right\}$

306. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4^n\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 27^n\cdot n^m\right\}$

307. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 2^{24n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 3^{18n}\cdot n^m\right\}$

308. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 2^{8n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 2^{160n}\cdot n^m\right\}$

309. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 2^{64n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 3^{81n}\cdot n^m\right\}$

310. $Z=\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{5}\right)^2: n\in\mathbb{N}\right\}$

311. $Z=\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{5}\right)^3: n\in\mathbb{N}\right\}$

312. $Z=\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^n: n\in\mathbb{N}\right\}$

313. $Z=\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^{n^2}: n\in\mathbb{N}\right\}$

314. $Z=\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^{n^2+n}: n\in\mathbb{N}\right\}$

315. $Z=\left\{\dfrac{1}{n^2-40n+370}: n\in\mathbb{N}\right\}$

316. $Z=\left\{\dfrac{1}{n^2-40n+390}: n\in\mathbb{N}\right\}$

317. $Z=\left\{\dfrac{1}{n^2-40n+410}: n\in\mathbb{N}\right\}$

318. $Z=\left\{\dfrac{1}{n^2-40n+430}: n\in\mathbb{N}\right\}$

319. $Z=\left\{\dfrac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25n^2\leqslant m^2\leqslant 27n^2\right\}$

320. $Z=\left\{\dfrac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25n^3\leqslant m^3\leqslant 27n^3\right\}$

321. $Z=\left\{\dfrac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16^n\leqslant 8^m\leqslant 27^n\right\}$

322. $Z=\left\{\dfrac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16^n\leqslant 9^m\leqslant 27^n\right\}$

323. $Z=\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)^n: n\in\mathbb{N}\right\}$

324. $Z=\left\{\left(2-\sqrt{5}\right)^n: n\in\mathbb{N}\right\}$

325. $Z=\left\{\binom{50}{n}: n\in\{0,1,2,3,\ldots,49,50\}\right\}$

326. $Z=\left\{\binom{50}{n}\cdot(-1)^n: n\in\{0,1,2,3,\ldots,49,50\}\right\}$

327. $Z=\left\{\sqrt{x^2+2x+1}: x\in(-5,2)\right\}$

328. $Z=\left\{\sqrt[4]{x^2+2x+1}: x\in(-5,2)\right\}$

329. $Z=\left\{\dfrac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 5^3\cdot n^{15}\leqslant m^{15}\leqslant 3^5\cdot n^{15}\right\}$

330. $Z=\left\{\dfrac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 5^2\cdot n^{10}\leqslant m^{10}\leqslant 2^5\cdot n^{10}\right\}$

331. $Z=\left\{\dfrac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 3^2\cdot n^6\leqslant m^6\leqslant 2^3\cdot n^6\right\}$

332. $Z=\left\{\dfrac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 8^{mn}\right\}$

333. $Z=\left\{\dfrac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 4^{mn}\right\}$

334. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 81^{n^2}\leqslant 3^{m^2}\leqslant 11^{mn}\right\}$

335. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 8^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 5^{mn}\right\}$

336. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 32^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 3^{mn}\right\}$

337. $Z=\left\{\frac{m^2}{n^2}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 8n^3\leqslant m^3\leqslant 27n^3\right\}$

338. $Z=\left\{\frac{m^2}{n^2}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 25n^4\leqslant m^4\leqslant 49n^4\right\}$

339. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 3^{18^2\cdot n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 2^{2^{11}\cdot n}\cdot n^m\right\}$

340. $Z=\{\log_x 8: x\in[2,+\infty)\}$

341. $Z=\{\log_x 32: x\in(0,1/2]\}$

342. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-44}: n\in\mathbb{N}\right\}$

343. $Z=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2+44}: n\in\mathbb{N}\right\}$

344. $Z=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2-44}: n\in\mathbb{N}\right\}$

345. $Z=\left\{\left(\frac{-1}{3}\right)^n: n\in\mathbb{N}\right\}$

346. $Z=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3^i}: n\in\mathbb{N}\right\}$

347. $Z=\left\{x^n: x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)\wedge n\in\mathbb{N}\right\}$

348. $Z=\{\log_2(2n-1)-\log_2 n: n\in\mathbb{N}\}$

349. $Z=\left\{\frac{(\log_2(n^2+1))\cdot\log_3(n^2+4)}{(\log_8(n^2+4))\cdot\log_9(n^2+1)}: n\in\mathbb{N}\right\}$

350. $Z=\left\{\frac{1}{5^m-11^n}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$

351. $Z=\left\{\frac{mn}{m^2+4n^2}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$

352. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} |a_n - 1| < \frac{1}{n}\,.$$

W każdym z zadań **352.1-352.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

352.1. $\sup\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

352.2. $\inf\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

352.3. $\sup\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

352.4. $\inf\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

352.5. $\sup\{a_2-a_3 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

352.6. $\inf\{a_2-a_3 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

352.7. $\sup\{a_3-a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

352.8. $\inf\{a_3-a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

352.9. $\sup\{a_2+a_3+a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

352.10. $\inf\{a_2+a_3+a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

353. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n - \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n}\,.$$

W każdym z zadań **353.1-353.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

353.1. $\sup\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

353.2. $\inf\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

353.3. $\sup\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

353.4. $\inf\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

353.5. $\sup\{a_2-a_3 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

353.6. $\inf\{a_2-a_3 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

353.7. $\sup\{a_3-a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

353.8. $\inf\{a_3-a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

353.9. $\sup\{a_2+a_3+a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

353.10. $\inf\{a_2+a_3+a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ .....

354. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów **zbieżnych** (a_n) spełniających warunek

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} |a_n - 6| < \frac{n+1}{n}\,.$$

W każdym z zadań **354.1-354.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

354.1. $\sup\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\} =$ .....

354.2. $\inf\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\} =$ .....

354.3. $\sup\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} =$ .....

354.4. $\inf\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} =$ .....

354.5. $\sup\{a_1 - a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} =$ .....

354.6. $\inf\{a_1 - a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} =$ .....

354.7. $\sup\left\{\lim_{n\to\infty} a_n : (a_n)\in\mathbb{T}\right\} =$ .....

354.8. $\inf\left\{\lim_{n\to\infty} a_n : (a_n)\in\mathbb{T}\right\} =$ .....

354.9. $\sup\left\{\lim_{n\to\infty} (a_n - a_1) : (a_n)\in\mathbb{T}\right\} =$ .....

354.10. $\inf\left\{\lim_{n\to\infty} (a_n - a_1) : (a_n)\in\mathbb{T}\right\} =$ .....

355. W każdym z zadań **355.1-355.6** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} |a_n - a_{n+1}| < \frac{1}{n}\,.$$

355.1. $A = \{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf A =$ ..... $\sup A =$ .....

355.2. $B = \{a_3 - a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf B =$ ..... $\sup B =$ .....

355.3. $C = \{a_4 - a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf C =$ ..... $\sup C =$ .....

355.4. $D = \{a_4 - a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf D =$ ..... $\sup D =$ .....

355.5. $E = \left\{(a_3 - a_1)^2 : (a_n)\in\mathbb{T}\right\}$

$\inf E =$ ..... $\sup E =$ .....

355.6. $F = \left\{a_3^2 - a_1^2 : (a_n)\in\mathbb{T}\right\}$

$\inf F =$ ..... $\sup F =$ .....

---

356. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z=\left\{\frac{mn}{4m^2+9n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

357. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$Z=\left\{\frac{kmn}{8k^3+27m^3+125n^3}:k,m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

358. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2+5n+3}-n:n\in\mathbb{N}\right\}.$$

359. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2+5n+10}-n:n\in\mathbb{N}\right\}.$$

360. Wyznaczyć (wraz z uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\frac{1}{5^m-3^n}:m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

361. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\frac{1}{m^2-3n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

362. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\frac{1}{m^2-7n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$